Problème de Mathématiques

Référence pp2020 — Version du 31 décembre 2025

Soit X, une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Pour tout $\omega \in \Omega$,

— si $X(\omega) = 0$ ou si $X(\omega)$ est impair, alors on pose

$$Y(\omega) = 0$$

— et si $X(\omega)$ est pair et non nul, alors on pose :

$$Y(\omega) = \frac{X(\omega)}{2}.$$

1. Démontrer que Y est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.
2. Calculer la loi de Y.
3. Démontrer que Y est une variable aléatoire d'espérance finie et exprimer son espérance à l'aide de fonctions usuelles.

Solution ❀ Loi d'une v.a. discrète

1. En tant qu'application, il est clair que

$$Y : \Omega \to \mathbb{N}.$$

Il s'agit donc maintenant de vérifier que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad [Y = k] \in \mathcal{A}.$$

Pour cela, nous savons que X *est une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *et donc que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad [X = n] \in \mathcal{A}.$$

❧ Par définition, $Y(\omega)$ est nul si, et seulement si, l'entier $X(\omega)$ est nul ou impair, c'est-à-dire

$$Y(\omega) = 0 \iff X(\omega) = 0 \quad \text{ou} \quad \exists\, k \in \mathbb{N},\ X(\omega) = 2k + 1.$$

Cette équivalence logique peut se traduire par une égalité ensembliste :

$$[Y = 0] = [X = 0] \cup \Big(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [X = 2k + 1]\Big). \tag{1}$$

Comme X est une variable aléatoire, on sait que $[X = 0]$ et les $[X = 2k + 1]$ sont des événements (c'est-à-dire des éléments de la tribu $\mathcal{A}$) et que la tribu $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable. Par conséquent,

$$[Y = 0] \in \mathcal{A}.$$

❧ Enfin, pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$Y(\omega) = k \iff X(\omega) = 2k$$

c'est-à-dire

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad [Y = k] = [X = 2k] \in \mathcal{A}. \tag{2}$$

❧ On a ainsi démontré que Y était une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

2. ❧ Pour tout entier $k \geqslant 1$, la probabilité de $[Y = k]$ peut donc se déduire directement de la loi de X et de (2).

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(Y = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}. \tag{3}$$

❧ Les événements qui apparaissent dans la décomposition (1) de $[Y = 0]$ sont deux à deux disjoints (car la variable aléatoire X ne peut pas prendre plusieurs valeurs en même temps). Comme $[Y = 0]$ est l'union d'une suite d'événements deux à deux disjoints, la σ-additivité de $\mathbf{P}$ nous assure d'une part que la série

$$\sum \mathbf{P}(X = 2k + 1)$$

est convergente et d'autre part que

$$\mathbf{P}(Y = 0) = \mathbf{P}(X = 0) + \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = 2k + 1) = e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k + 1)!}$$

et donc

$$\mathbf{P}(Y = 0) = e^{-\lambda}(1 + \operatorname{sh} \lambda)$$

en reconnaissant le développement en série entière de sh (rayon de convergence infini).

3. ❧ Pour démontrer que la variable aléatoire discrète Y est une variable aléatoire d'espérance finie, il faut démontrer que la série

$$\sum k\, \mathbf{P}(Y = k)$$

est convergente.

Le terme en $k = 0$ est sans intérêt pour la convergence (et de toute façon, il est nul).

Pour tout $k \geqslant 1$, on pose

$$u_k = k\, \mathbf{P}(Y = k) = e^{-\lambda} \frac{k.\lambda^{2k}}{(2k)!} > 0.$$

On constate facilement que

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{k+1}{k} \cdot \lambda^2 \cdot \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 < 1$$

et donc que la série $\sum k\,\mathbf{P}(Y = k)$ est convergente (règle de D'Alembert).

‖ *Pourquoi utiliser la règle de D'Alembert ici ? Vous avez* vu *l'expression du terme général ?*

❧ L'espérance de Y est alors la somme de cette série.

$$\mathbf{E}(Y) = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k.\lambda^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^{-\lambda}}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k}{(2k)!} \cdot \lambda^{2k} = \frac{\lambda.e^{-\lambda}}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{E}(Y) = \frac{\lambda.e^{-\lambda}\,\mathrm{sh}\,\lambda}{2}$$

à nouveau en reconnaissant le développement en série entière de sh.