Problème de Mathématiques

Référence pp2121 — Version du 31 décembre 2025

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sur lequel sont définies trois variables aléatoires X, Y_1 et Y_2 à valeurs dans $E = \{0; 1\}$.

On suppose que X suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ avec $0 < p < 1$. On suppose de plus que les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont conditionnellement indépendantes sachant X au sens où :

$$\forall\, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in E, \qquad \mathbf{P}_{[X=\varepsilon_0]}(Y_1 = \varepsilon_1, Y_2 = \varepsilon_2) = \mathbf{P}_{[X=\varepsilon_0]}(Y_1 = \varepsilon_1) \cdot \mathbf{P}_{[X=\varepsilon_0]}(Y_2 = \varepsilon_2). \tag{1}$$

On suppose enfin que

$$\mathbf{P}_{[X=1]}(Y_1 = 1) = \mathbf{P}_{[X=1]}(Y_2 = 1) = 1/2, \tag{2}$$
$$\mathbf{P}_{[X=0]}(Y_1 = 1) = \mathbf{P}_{[X=0]}(Y_2 = 1) = 1/6. \tag{3}$$

1. Pourquoi les relations (2) et (3) ont-elles un sens ?
2. Quelle est la loi de Y_1 ? celle de Y_2 ?
3. Les variables aléatoires X et Y_1 sont-elles indépendantes ?
4. Les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ? (Considérer les événements $[Y_1 = 1]$ et $[Y_2 = 1]$.)
5. Calculer la probabilité $\mathbf{P}(X = 1)$, puis les probabilités conditionnelles

$$\mathbf{P}_{[Y_1=1]}(X = 1) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{P}_{[Y_1=1, Y_2=1]}(X = 1).$$

6. On dispose d'un sac contenant 100 dés cubiques, dont 25 sont truqués. On admet que la probabilité d'obtenir 6 en lançant un dé truqué est égale à $1/2$.

On choisit un dé au hasard, en se demandant s'il est truqué. On lance ce dé et on obtient 6. On lance à nouveau ce dé et on obtient encore 6.

Que penser de cela ?

Solution ❀ Lois conditionnelles

1. Par hypothèse, $\mathbf{P}(X=1)=p$ et, par conséquent,

$$\mathbf{P}(X=0)=1-\mathbf{P}(X=1)=1-p.$$

Comme $0<p<1$, ni l'événement $[X=1]$, ni l'événement $[X=0]$ n'est négligeable et les probabilités conditionnelles (2) et (3) ont bien un sens.

2. Comme Y_1 est une variable aléatoire à valeurs dans $\{0;1\}$, sa loi est une loi de Bernoulli, qui est donc caractérisée par son paramètre $\mathbf{P}(Y_1=1)$.

Comme X est une variable aléatoire de Bernoulli, le couple $\big([X=0],[X=1]\big)$ est un système complet d'événements. D'après la Formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(Y_1=1)=\mathbf{P}(Y_1=1\mid X=1)\,\mathbf{P}(X=1)+\mathbf{P}(Y_1=1\mid X=0)\,\mathbf{P}(X=0)$$

et donc

$$\mathbf{P}(Y_1=1)=\frac{p}{2}+\frac{1-p}{6}=\frac{2p+1}{6}.$$

❧ D'après (2) et (3), la loi de Y_2 est la même que la loi de Y_1.

3. Par hypothèse, $\mathbf{P}(X=1)=p\in\,]0,1[$ et

$$\mathbf{P}(X=1,Y_1=1)=\frac{1}{2}\times p.$$

D'après la question précédente,

$$\mathbf{P}(X=1)\,\mathbf{P}(Y_1=1)=p\times\frac{2p+1}{6}.$$

Si X et Y_1 étaient indépendantes, alors on aurait

$$\frac{p}{2}=\frac{p}{2}\times\frac{2p+1}{3}$$

et donc $p=0$ (exclu a priori) ou $2p+1=3$, c'est-à-dire $p=1$ (exclu a priori).

Les variables aléatoires X et Y_1 ne sont donc pas indépendantes.

4. Comme $([X=1],[X=0])$ est un système complet d'événements (bis),

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y_1=1,Y_2=1)&=\mathbf{P}(X=1,Y_1=1,Y_2=1)+\mathbf{P}(X=0,Y_1=1,Y_2=1)\\&=\mathbf{P}(Y_1=1,Y_2=1\mid X=1)\,\mathbf{P}(X=1)+\mathbf{P}(Y_1=1,Y_2=1\mid X=0)\,\mathbf{P}(X=0)\\&=\mathbf{P}_{[X=1]}(Y_1=1)\,\mathbf{P}_{[X=1]}(Y_2=1)\,\mathbf{P}(X=1)+\mathbf{P}_{[X=0]}(Y_1=1)\,\mathbf{P}_{[X=0]}(Y_2=1)\,\mathbf{P}(X=0)\\&\hspace{20em}\text{d'après (1)}\\&=\frac{p}{4}+\frac{1-p}{36}=\frac{1+8p}{36}.\end{aligned}$$

D'après **[2.]**,

$$\mathbf{P}(Y_1=1)\,\mathbf{P}(Y_2=1)=\frac{(2p+1)^2}{36}.$$

Ainsi, si Y_1 et Y_2 étaient indépendantes, il faudrait que $(2p+1)^2=8p+1$, c'est-à-dire $4p(p-1)=0$, ce qui est impossible puisque $0<p<1$ par hypothèse.

Les variables aléatoires Y_1 et Y_2 ne sont donc pas indépendantes.

> *L'indépendance des variables aléatoires est une notion relative : par hypothèse, les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes pour les mesures de probabilité $\mathbf{P}_{[X=1]}$ et $\mathbf{P}_{[X=0]}$ mais, comme on vient de le vérifier, elles ne sont pas indépendantes pour la mesure $\mathbf{P}$.*
> *Il est aisé d'être prudent dans un cadre théorique (comme c'est le cas ici), c'est beaucoup moins simple dans un cadre trop concret (comme c'est le cas au **[6.]**, où l'hypothèse d'indépendance des variables aléatoires Y_1 et Y_2 n'est pas évidente à traduire).*

5. Par définition du paramètre d'une loi de Bernoulli, $\mathbf{P}(X=1)=p$.

D'après la définition des probabilités conditionnelles, d'après **[2.]** et **[3.]**,

$$\mathbf{P}_{[Y_1=1]}(X=1)=\frac{\mathbf{P}(X=1,Y_1=1)}{\mathbf{P}(Y_1=1)}=\frac{p/2}{(2p+1)/6}=\frac{3p}{2p+1}.$$

De même, d'après **[4.]**,

$$\mathbf{P}_{[Y_1=1,Y_2=1]}(X=1) = \frac{\mathbf{P}(X=1,Y_1=1,Y_2=1)}{\mathbf{P}(Y_1=1,Y_2=1)} = \frac{p/4}{(1+8p)/36} = \frac{9p}{8p+1}.$$

6. On modélise le choix du dé par la variable aléatoire X en convenant que $X=1$ si on choisit un dé truqué. Il est alors raisonnable de poser $p = 1/4$.

Une fois que le dé est choisi, on le lance deux fois. Il est raisonnable de penser que ces deux lancers peuvent être modélisés par des variables aléatoires Y_1 et Y_2, indépendantes et de même loi : loi $\mathscr{B}(1/2)$ pour un dé truqué, loi $\mathscr{B}(1/6)$ pour un dé non truqué.

On précise que l'hypothèse d'indépendance est postérieure au choix du dé (cf remarque au **[4.]**).

D'après **[5.]**,

— la probabilité de choisir un dé truqué est égale à $p = 1/4$;

— en lançant le dé une première fois et en obtenant 6, on reçoit une information supplémentaire, grâce à laquelle la probabilité d'avoir tiré un dé truqué monte à $1/2$;

— en lançant le dé une seconde fois et en obtenant à nouveau 6, on reçoit une nouvelle information qui d'une certaine façon confirme l'information précédente et nous dit que la probabilité d'avoir tiré un dé truqué s'élève maintenant à $3/4$.

❧ Dans cette optique, calculer la probabilité conditionnelle de B sachant A revient à calculer la probabilité de l'événement B *en prenant en compte l'information supplémentaire* apportée par la réalisation de l'événement A.

Si A et B sont indépendants, alors $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)$ et la réalisation de A n'apporte aucune information supplémentaire au sujet de B.

Dans le cas qui nous intéresse, en choisissant le dé, on imagine avoir une chance sur quatre d'avoir un dé truqué. En le lançant et en obtenant 6 deux fois de suite, nous sommes incités à penser que le dé est plus probablement truqué (trois chances sur quatre d'après nos calculs).

Comme disait ma grand'mère, c'est aux fruits qu'on reconnaît l'arbre.

(Exercice tiré de l'énoncé 105 de la banque CCINP.)