Problème de Mathématiques

Référence pp1508 — Version du 31 décembre 2025

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et de même loi :

$$\mathbf{P}(X_0 = -1) = \mathbf{P}(X_0 = 1) = \frac{1}{2}$$

et, pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

1. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'événements telle que la série $\sum \mathbf{P}(A_n)$ soit convergente.

1. a. Démontrer que

$$B = \bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{k\geqslant n} A_k \in \mathcal{A}.$$

1. b. Démontrer que

$$\mathbf{P}(B) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\Big(\bigcup_{k\geqslant n} A_k\Big).$$

1. c. En déduire que $\mathbf{P}(B) = 0$.

2. Démontrer que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} t \leqslant \exp(t^2/2).$$

☞ *On pourra par exemple étudier les variations de*

$$\psi(t) = \frac{t^2}{2} - \ell n(\operatorname{ch} t).$$

3. a. Calculer $\varphi(t) = \mathbf{E}(e^{tX_n})$.

3. b. En déduire la valeur de $\mathbf{E}(e^{tS_n})$.

3. c. Comparer

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(e^{tS_n/\sqrt{n}}) \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx.$$

☞ *On rappelle que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = 1.$$

4. Soit $a > 0$.

4. a. Que vaut $\mathbf{P}(S_n \geqslant a)$ lorsque $n < a$?

4. b. Démontrer que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathbf{P}(S_n \geqslant a) \leqslant e^{-ta}\,\mathbf{E}(e^{tS_n}).$$

4. c. Déduire de **[2.]** que

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant a) \leqslant \inf_{t>0} e^{-ta}\,\mathbf{E}(e^{tS_n}) \leqslant e^{-a^2/2n}.$$

5. Démontrer que les variables aléatoires S_n et $-S_n$ ont même loi et en déduire que

$$\mathbf{P}(|S_n| \geqslant a) \leqslant 2e^{-a^2/2n}.$$

6. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_{n,\varepsilon} = \left[\frac{|S_n|}{n} \geqslant \varepsilon\right] \in \mathcal{A}.$$

6. a. Démontrer que la série $\sum \mathbf{P}(A_{n,\varepsilon})$ est convergente.

6. b. En déduire qu'il existe un événement $\Omega_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbf{P}(\Omega_\varepsilon) = 1$ et que

$$\forall\, \omega \in \Omega_\varepsilon,\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall\, k \geqslant n_\varepsilon, \quad \frac{|S_k(\omega)|}{k} < \varepsilon.$$

7. Démontrer que

$$O = \bigcap_{m \in \mathbb{N}^*} \Omega_{1/m}$$

est un événement presque sûr et que

$$\forall\, \omega \in O, \quad \frac{S_k(\omega)}{k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0.$$

On traduit cette propriété en disant que S_k/k **converge presque sûrement vers** 0.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$U_n = \big[|S_n| \geqslant \sqrt{2\alpha n \ln n}\big]$$

où $\alpha > 1$ est fixé.

8. a. Démontrer que $U_n \in \mathcal{A}$ et que $\sum \mathbf{P}(U_n)$ converge.

8. b. En déduire que, presque sûrement, il existe un nombre *fini* d'entiers $k \geqslant 1$ tel que $|S_k| \geqslant \sqrt{2\alpha k \ln k}$. Comparer avec **[7.]**

Solution ❀ Étude asymptotique d'une marche aléatoire

La famille $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est une **marche aléatoire** au sens où on étudie le comportement des suites

$$\big(S_n(\omega)\big)_{n\geqslant 1}$$

plutôt que la loi de chacune des variables aléatoires S_n.
1. a. Par hypothèse, $A_k \in \mathcal{A}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Or $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable et par intersection dénombrable, donc $B \in \mathcal{A}$.
1. b. Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\bigcup_{k\geqslant n+1} A_k \subset A_n \cup \bigcup_{k\geqslant n+1} A_k = \bigcup_{k\geqslant n} A_k$$

donc B est l'intersection d'une suite décroissante d'événements. Par continuité décroissante de $\mathbf{P}$, on en déduit que

$$\mathbf{P}(B) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\Big(\bigcup_{k\geqslant n} A_k\Big).$$

1. c. Par σ-additivité de $\mathbf{P}$,

$$0 \leqslant \mathbf{P}\Big(\bigcup_{k\geqslant n} A_k\Big) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k).$$

Le majorant est le reste d'ordre $(n-1)$ de la série convergente $\sum \mathbf{P}(A_k)$, donc il tend vers 0. On déduit de la question précédente que $\mathbf{P}(B) = 0$.
2. Il est clair que la fonction ψ est paire et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On vérifie que

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\quad \psi'(t) = t - 1 + \frac{2}{e^{2t}+1}$$
$$\psi''(t) = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} \geqslant 0$$

ce qui prouve que ψ est convexe sur $\mathbb{R}$. Comme $\psi'(0) = 0$, alors ψ atteint son minimum absolu en $t = 0$ et comme $\psi(0) = 0$, alors ψ est positive sur $\mathbb{R}$. On obtient l'inégalité voulue en composant par exp (qui est croissante).

> ***Meilleure méthode** — On sait que*
>
> $$\forall\, t \in \mathbb{R},\quad \operatorname{ch} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \quad \textit{et} \quad e^{t^2/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!}.$$
>
> *Comme* $t^{2n} \geqslant 0$ *pour tout* $(n, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ *et que*
>
> $$2^n n! = \prod_{k=1}^{n} (2k) \leqslant \prod_{q=1}^{2n} q = (2n)!,$$
>
> *l'inégalité est démontrée.*

3. a. Comme X_n est une variable aléatoire qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs, alors e^{tX_n} est une variable aléatoire qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs et en particulier une variable aléatoire d'espérance finie.

Comme les variables aléatoires sont toutes de même loi, l'espérance de e^{tX_n} est indépendante de n et d'après le théorème de transfert,

$$\varphi(t) = e^t\, \mathbf{P}(X_n = 1) + e^{-t}\, \mathbf{P}(X_n = -1) = \operatorname{ch} t.$$

3. b. Comme S_n est la somme de n variables aléatoires bornées et indépendantes, alors

$$e^{tS_n} = e^{tX_1} \cdots e^{tX_n}$$

est le produit de n variables aléatoires d'espérance finie et indépendantes. Donc

$$\mathbf{E}(e^{tS_n}) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{E}(e^{tX_k}) = [\varphi(t)]^n = \operatorname{ch}^n t.$$

3. c. Le réel t étant fixé,

$$\mathbf{E}(e^{tS_n/\sqrt{n}}) = \operatorname{ch}^n \frac{t}{\sqrt{n}} = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + o(t^2)\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{t^2/2}.$$

❧ On sait que $[x \mapsto e^{-x^2/2}]$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Le changement de variable affine $[x \mapsto x - t]$ montre que $[x \mapsto e^{-(x-t)^2/2}]$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et comme

$$e^{xt}e^{-x^2/2} = e^{-(x-t)^2/2}\underbrace{e^{t^2/2}}_{\text{Cte}},$$

la fonction $[x \mapsto e^{xt}e^{-x^2/2}]$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = e^{t^2/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-(x-t)^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dt = e^{t^2/2}.$$

> *Ce n'est pas une coïncidence ! Avec les hypothèses de l'énoncé, les variables aléatoires centrées et réduites $S_n/\sqrt{n}$ convergent en loi vers la loi normale centrée réduite et, par définition, si une variable aléatoire N suit la loi normale centrée réduite, alors*
>
> $$\mathbf{E}(e^{tN}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx.$$
>
> *Il reste à démontrer pourquoi la convergence en loi implique (ici) la convergence de $\mathbf{E}(e^{tS_n/\sqrt{n}})$ vers $\mathbf{E}(e^{tN})$...*

4. a. Par inégalité triangulaire,

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad |S_n(\omega)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |X_k(\omega)|.$$

Or $\mathbf{P}(|X_k| \leqslant 1) = 1$, donc $\mathbf{P}(|S_n| \leqslant n) = 1$ et $\mathbf{P}(S_n \geqslant a) = 0$ pour tout $n < a$.

4. b. La variable aléatoire e^{tS_n} est positive et d'espérance finie. D'après l'inégalité de Markov,

$$\mathbf{P}(e^{tS_n} \geqslant e^{ta}) \leqslant e^{-ta}\,\mathbf{E}(e^{tS_n}).$$

Or $t > 0$, donc $[x \mapsto e^{tx}]$ est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, donc

$$[e^{tS_n} \geqslant e^{ta}] = [S_n \geqslant a]$$

et finalement

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathbf{P}(S_n \geqslant a) \leqslant e^{-ta}\,\mathbf{E}(e^{tS_n}).$$

4. c. La quantité $\mathbf{P}(S_n \geqslant a)$ est indépendante de t : on peut donc passer à l'inf dans l'inégalité précédente. D'après **[2.]**,

$$e^{-ta}\,\mathbf{E}(e^{tS_n}) \leqslant \exp\left(\frac{nt^2}{2} - ta\right)$$

et le trinôme en t atteint son minimum pour $t = {}^a/_n > 0$, donc

$$\inf_{t>0} e^{-ta}\,\mathbf{E}(e^{tS_n}) \leqslant \min_{t>0} \exp\left(\frac{nt^2}{2} - ta\right) = e^{-a^2/2n}.$$

5. On considère la fonction $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ définie par

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n.$$

Comme les variables aléatoires X_1, ..., X_n sont indépendantes, alors les variables aléatoires $-X_1$, ..., $-X_n$ sont indépendantes et de même loi que X_0 :

$$\mathbf{P}(-X_k = -1) = \mathbf{P}(X_k = 1) = \mathbf{P}(X_0 = 1) = \frac{1}{2},$$
$$\mathbf{P}(-X_k = 1) = \mathbf{P}(X_k = -1) = \mathbf{P}(X_0 = -1) = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, les deux vecteurs aléatoires $(X_1, \dots, X_n)$ et $(-X_1, \dots, -X_n)$ ont même loi jointe. Donc leurs sommes

$$S_n = f(X_1, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad -S_n = f(-X_1, \dots, -X_n)$$

ont même loi.

❧ Comme $a > 0$,

$$[|S_n| \geqslant a] = [S_n \geqslant a] \sqcup [S_n \leqslant -a] = [S_n \geqslant a] \sqcup [-S_n \geqslant a]$$

et comme $-S_n \overset{d}{=} S_n$, alors

$$\mathbf{P}(|S_n| \geqslant a) = \mathbf{P}(S_n \geqslant a) + \mathbf{P}(S_n \geqslant a) = 2\,\mathbf{P}(S_n \geqslant a).$$

On déduit de la question précédente que

$$\mathbf{P}(|S_n| \geqslant a) \leqslant 2e^{-a^2/2n}.$$

6. a. On applique la majoration du **[5.]** avec $a = n\varepsilon$:

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \mathbf{P}(A_{n,\varepsilon}) \leqslant e^{-n\varepsilon^2/2} = (e^{-\varepsilon^2/2})^n.$$

Or $\varepsilon > 0$, donc $0 < e^{-\varepsilon^2/2} < 1$, donc la série $\sum \mathbf{P}(A_{n,\varepsilon})$ est convergente.

6. b. D'après le lemme de Borel-Cantelli **[[1.]]**, l'événement

$$\bigcap_{n \geqslant 1} \bigcup_{k \geqslant n} A_{k,\varepsilon}$$

est négligeable, donc l'évément contraire

$$\Omega_\varepsilon = \bigcup_{n \geqslant 1} \bigcap_{k \geqslant n} A^c_{k,\varepsilon}$$

est presque sûr et, par définition de Ω_ε,

$$\forall\, \omega \in \Omega_\varepsilon, \quad \exists\, n \geqslant 1,\ \forall\, k \geqslant n, \quad \frac{|S_k(\omega)|}{k} < \varepsilon.$$

7. Puisque une union dénombrable d'événements négligeables est encore un événement négligeable, une intersection dénombrable d'événements presque sûrs est encore un événement presque sûr, donc $O \in \mathcal{A}$ est presque sûr.

De plus, par définition de O, si $\omega \in O$, alors

$$\forall\, m \geqslant 1,\ \exists\, n \geqslant 1,\ \forall\, k \geqslant n, \quad \left|\frac{S_k(\omega)}{k} - 0\right| < \frac{1}{m},$$

ce qui prouve bien que $S_k(\omega)/k$ tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$.

8. a. L'ensemble U_n est un événement car S_n est une variable aléatoire.

❧ On applique la majoration du **[5.]** à $a = \sqrt{2\alpha n \ln n}$:

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \mathbf{P}(|S_n| \geqslant a) \leqslant 2e^{-\alpha \ln n} = \frac{2}{n^\alpha}.$$

Comme $\alpha > 1$, la série $\sum \mathbf{P}(|S_n| \geqslant a)$ est convergente.

8. b. D'après le lemme de Borel-Cantelli **[[1.]]**, l'événement

$$U = \bigcup_{n \geqslant 1} \bigcap_{k \geqslant n} U^c_n$$

est presque sûr et, par définition de U, si $\omega \in U$, alors

$$\exists\, n \geqslant 1,\ \forall\, k \geqslant n, \quad |S_k(\omega)| < \sqrt{2\alpha k \ln k}.$$

Cela signifie que $|S_k(\omega)| < \sqrt{2\alpha k \ln k}$ à partir d'un certain rang et donc que l'inégalité contraire :

$$|S_k| \geqslant \sqrt{2\alpha k \ln k}$$

n'est vraie que pour un nombre fini d'indices k.

❧ Comme

$$\frac{\sqrt{2\alpha k \ln k}}{k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0,$$

cette propriété est plus précise que le résultat établi au **[7.]**