Problème de Mathématiques

Référence pp1509 — Version du 31 décembre 2025

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes, de même loi et presque sûrement positives :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X_n \geqslant 0) = 1.$$

On définit alors la **marche aléatoire** $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $S_0 = 0$ et

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

1. Soit $\omega \in \Omega$, fixé. Que dire du comportement de la suite de terme général $S_n(\omega)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

Partie A. Étude d'un cas particulier

2. On suppose dans cette seule question que

$$\mathbf{P}(X_0 \in \mathbb{N}) = 1.$$

2. a. Démontrer que l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que la suite de terme général $S_n(\omega) \in \mathbb{N}$ converge est l'événement

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{k\geqslant n} [X_k = 0].$$

2. b. Démontrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend presque sûrement vers $+\infty$ au sens où il existe $\Omega_0 \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$ et que

$$\forall\, \omega \in \Omega_0, \quad S_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Partie B. Cas général

3. On pose $\theta = \mathbf{E}(e^{-X_0})$.

3. a. Justifier l'existence de θ et que $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

3. b. On suppose que $\mathbf{P}(X_0 = 0) < 1$. Démontrer qu'il existe deux réels $0 < \varepsilon \leqslant 1$ et $\alpha > 0$ tels que

$$\mathbf{P}(X_0 \geqslant \alpha) \geqslant \varepsilon,$$

puis que $\mathbf{E}(e^{-X_0}) < 1$.

3. c. Démontrer que $\theta = 1$ si, et seulement si, la variable aléatoire X_0 est presque sûrement nulle : $\mathbf{P}(X_0 = 0) = 1$.

3. d. On suppose que X_0 suit la loi géométrique de paramètre $0 < p < 1$. Expliciter la valeur de θ en fonction de p et vérifier que $\theta \leqslant {}^1\!/_e$.

4. Déduire de l'inégalité de Markov que

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, t > 0, \quad \mathbf{P}(S_n \leqslant t) \leqslant e^t \theta^n.$$

5. Nous pouvons maintenant étendre le résultat du **[2.]** en supposant que $\mathbf{P}(X_0 = 0) < 1$.

5. a. Démontrer que

$$A = \bigcup_{t\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} [S_k \leqslant t]$$

est un événement négligeable.

5. b. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend presque sûrement vers $+\infty$ (au sens défini au **[2.b.]**).

Partie C. Processus de comptage associé

On suppose que $\mathbf{P}(X_0 \geqslant 0) = 1$ et que $\mathbf{P}(X_0 = 0) < 1$.

Soit $\Omega_0 \in \mathcal{A}$, un événement presque sûr tel que $(S_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers $+\infty$ pour tout $\omega \in \Omega_0$. Pour tout réel $t > 0$, on pose

$$\forall\, \omega \in \Omega_0, \quad \nu_t(\omega) = \min\{n \geqslant 1 \;:\; S_n(\omega) > t\}$$

et $\nu_t(\omega) = 0$ pour $\omega \in \Omega_0^c$.

6. Démontrer que l'application $\nu_t \;:\; \Omega \to \mathbb{N}$ est bien définie.

7. Vérifier que $[\nu_t = 0] = \Omega_0^c$, $[\nu_t = 1] = [t < S_1]$ et plus généralement que

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad [\nu_t = n] \in \mathcal{A}$$

de telle sorte que ν_t est bien une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ pour tout $t > 0$.

8. On s'intéresse maintenant à l'espérance de ν_t. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t > 0$, on pose $F_n(t) = \mathbf{P}(S_n \leqslant t)$.

8. a. Démontrer que la série $\sum F_n(t)$ converge.

8. b. Démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \mathbf{P}(\nu_t = n) = F_{n-1}(t) - F_n(t).$$

8. c. Vérifier que

$$\lim_{N\to+\infty} NF_N(t) = 0.$$

8. d. En déduire que ν_t est une variable aléatoire d'espérance finie et que

$$\mathbf{E}(\nu_t) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n(t).$$

9. On considère ici la famille $(\nu_t)_{>0}$ comme un **processus aléatoire à temps continu** : on étudie les **trajectoires** de ce processus en fixant $\omega \in \Omega_0$. On a dans ce cas l'habitude d'omettre ω : on écrira ν_t et S_n au lieu de $\nu_t(\omega)$ et $S_n(\omega)$.

9. a. La fonction $[t \mapsto \nu_t(\omega)]$ est croissante.

☞ *On remarquera que* $S_{\nu_t} > t$.

9. b. La fonction $[t \mapsto \nu_t(\omega)]$ est continue à droite (on parle de **processus càdlàg**).

☞ *On remarquera qu'il existe un réel* $\varepsilon > 0$ *tel que* $S_{\nu_t} > t + \varepsilon$ *et que, par conséquent,* $\nu_{t+\varepsilon} \leqslant \nu_t$.

Solution ❀ Étude asymptotique d'une marche aléatoire

1. La suite $(S_n(\omega))$ est la suite des sommes partielles d'une série de terme général positif : c'est une suite croissante ; elle est convergente si, et seulement si, elle est majorée.

Partie A. Étude d'un cas particulier

2. a. Comme les variables aléatoires X_k sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, la suite $(S_n(\omega))$ est une suite croissante d'entiers : elle est convergente si, et seulement si, elle est stationnaire ; autrement dit, elle converge si, et seulement si, la suite $(X_k(\omega))$ est nulle à partir d'un certain rang (qui dépend de ω).

La convergence de la suite $(S_n(\omega))$ se traduit donc formellement par

$$\exists\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, k \geqslant n, \quad X_k(\omega) = 0$$

et donc de manière ensembliste par

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{k\geqslant n} [X_k = 0].$$

2. b. L'ensemble

$$\Omega_0 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{k\geqslant n} [X_k \neq 0]$$

appartient à $\mathcal{A}$, puisque $[X_k = 0] \in \mathcal{A}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ (les X_k sont des variables aléatoires) et que $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire, par union dénombrable et par intersection dénombrable.

❧ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les ensembles

$$\bigcap_{k=n}^{n+m} [X_k = 0]$$

forment une suite décroissante d'événements et, comme les variables aléatoires X_k sont indépendantes,

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{k=n}^{n+m} [X_k = 0]\Big) = \prod_{k=n}^{n+m} \mathbf{P}(X_k = 0) = [\mathbf{P}(X_0 = 0)]^{m+1}$$

Par continuité décroissante de $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{k\geqslant n} [X_k = 0]\Big) = \lim_{m\to+\infty} [\mathbf{P}(X_0 = 0)]^{m+1} = 0$$

puisque $0 \leqslant \mathbf{P}(X_0 = 0) < 1$.

En tant qu'union dénombrable d'événements négligeables,

$$\Omega_0^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{k\geqslant n} [X_k = 0]$$

est un événement négligeable, donc $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$ et la discussion de la question précédente a montré que $(S_n(\omega))$ tend vers $+\infty$ pour tout $\omega \in \Omega_0$.

Partie B. Cas général

3. a. Comme X_0 est une variable aléatoire discrète positive, alors e^{-X_0} est une variable aléatoire discrète bornée, donc d'espérance finie et comme $\mathbf{P}(0 < e^{-X_0} \leqslant 1) = 1$, alors $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ par positivité de l'espérance.

3. b. La probabilité de l'événement $[X_0 > 0]$ est strictement positive :

$$\mathbf{P}(X_0 > 0) = 1 - \mathbf{P}(X_0 = 0) > 0.$$

Or $[X_0 > 0]$ est l'union d'une suite croissante d'événements :

$$[X_0 > 0] = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{Q}_+^*} [X_0 > \alpha]$$

donc, par continuité croissante de $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{P}(X_0 > 0) = \lim_{\alpha\to 0} \mathbf{P}(X_0 > \alpha) > 0.$$

Il existe donc $0 < \varepsilon \leqslant 1$ et $\alpha > 0$ tels que

$$\mathbf{P}(X_0 > \alpha) > \varepsilon.$$

❧ Il est clair que, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$X_0(\omega) \geqslant 0 \cdot \mathbb{1}_{[X_0 \leqslant \alpha]}(\omega) + \alpha \mathbb{1}_{[X_0 > \alpha]}(\omega)$$

et donc que

$$e^{-X_0(\omega)} \leqslant \mathbb{1}_{[X_0 \leqslant \alpha]}(\omega) + e^{-\alpha}\mathbb{1}_{[X_0 > \alpha]}(\omega).$$

Par positivité de l'espérance,

$$\begin{aligned} \theta = \mathbf{E}(e^{-X_0}) &\leqslant [1 - \mathbf{P}(X_0 > \alpha)] + e^{-\alpha}\,\mathbf{P}(X_0 > \alpha) \\ &\leqslant 1 + \underbrace{(e^{-\alpha} - 1)}_{<0}\mathbf{P}(X_0 > \alpha) \\ &\leqslant 1 + (e^{-\alpha} - 1)\varepsilon < 1. \end{aligned}$$

3. c. Si $\mathbf{P}(X_0 = 0) = 1$, alors $\mathbf{P}(e^{-X_0} = 1) = 1$, donc $\theta = 1$.

❧ Réciproquement, si $\mathbf{P}(X_0 = 0) < 1$, alors $\theta < 1$ d'après la question précédente. L'équivalence est démontrée.

3. d. Si X_0 suit la loi géométrique de paramètre p, alors

$$\theta = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-k}pq^{k-1} = \frac{p}{e-q}.$$

❧ Comme $\mathbf{P}(X_0 \geqslant 1) = 1$, alors $\mathbf{P}(e^{-X_0} \leqslant e^{-1}) = 1$ et, par positivité de l'espérance, $\mathbf{E}(e^{-X_0}) \leqslant e^{-1}$.

4. Comme la fonction $[u \mapsto e^{-u}]$ réalise une bijection décroissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$[S_n \leqslant t] = [e^{-S_n} \geqslant e^{-t}].$$

En tant que fonction d'une variable aléatoire discrète, e^{-S_n} est une variable aléatoire discrète, qu'on peut écrire comme le produit de n variables aléatoires indépendantes, de même loi que e^{-X_0} et donc d'espérance finie :

$$e^{-S_n} = e^{-X_1} \cdots e^{-X_n}.$$

Par conséquent,

$$\mathbf{E}(e^{-S_n}) = \mathbf{E}(e^{-X_1}) \cdots \mathbf{E}(e^{-X_n}) = [\mathbf{E}(e^{-X_0})]^n = \theta^n.$$

Comme e^{-S_n} est une variable aléatoire positive d'espérance finie, alors

$$\mathbf{P}(e^{-S_n} \geqslant e^{-t}) \leqslant e^t\,\mathbf{E}(e^{-S_n}) = e^t\theta^n$$

d'après l'inégalité de Markov.

5. a. Comme S_k est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$, alors $[S_k \leqslant t] \in \mathcal{A}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme $\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable et par union dénombrable, alors $A \in \mathcal{A}$.

❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il est clair que

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} [S_k \leqslant t] \subset [S_n \leqslant t].$$

Par croissance de $\mathbf{P}$ et par **[4.]**, on en déduit que

$$0 \leqslant \mathbf{P}\Big(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} [S_k \leqslant t]\Big) \leqslant \mathbf{P}(S_n \leqslant t) \leqslant e^t\theta^n.$$

Or $0 \leqslant \theta < 1$, donc

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} [S_k \leqslant t]\Big) = 0$$

en faisant tendre n vers $+\infty$.

En tant qu'union dénombrable d'événements négligeables, A est négligeable.

5. b. Posons $\Omega_0 = A^c \in \mathcal{A}$. Comme A est négligeable, alors $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$ et comme

$$\Omega_0 = \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [S_k > t],$$

alors

$$\omega \in \Omega_0 \iff \forall\, t \in \mathbb{N},\ \exists\, k \in \mathbb{N}, \quad S_k(\omega) > t.$$

Cette équivalence signifie que, pour tout $\omega \in \Omega_0$, la suite de terme général $S_k(\omega)$ n'est pas majorée. Comme il s'agit d'une suite croissante **[[1.]]**, elle tend donc vers $+\infty$.

Partie C. Processus de comptage associé

6. Pour tout $\omega \in \Omega_0$, l'ensemble
$$\{n \geqslant 1 \;:\; S_n(\omega) > t\}$$
est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (puisque la suite de terme général $S_n(\omega)$ tend vers $+\infty$), donc il admet un plus petit élément $\nu_t(\omega) \in \mathbb{N}^*$: ν_t est donc bien définie sur Ω_0.

Comme on a aussi défini ν_t sur Ω_0, cette application est bien définie sur Ω et prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

7. On a remarqué à la question précédente que
$$[\nu_t = 0] = \Omega_0^c \in \mathcal{A}$$
(puisque $\Omega_0 \in \mathcal{A}$ et que $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire).

❧ Par définition du minimum, $\nu_t(\omega) = 1$ si, et seulement si, $S_1(\omega) > t$ et comme S_1 est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$, alors
$$[\nu_t = 1] = [S_1 > t] \in \mathcal{A}.$$

❧ Prenons enfin $n \geqslant 2$. Si $\nu_t(\omega) = n$, alors $S_n(\omega) > t$ et $S_{n-1}(\omega) \leqslant t$ (puisque $(n-1) < n$). Réciproquement, si $S_n(\omega) > t$ et $S_{n-1}(\omega) \leqslant t$, alors
$$\begin{aligned} \forall\, 1 \leqslant k < n, &\quad S_k(\omega) \leqslant S_{n-1}(\omega) \leqslant t \\ \forall\, k \geqslant n, &\quad t < S_n(\omega) \leqslant S_{k'}(\omega) \end{aligned}$$
puisque la suite $(S_k(\omega))$ est croissante. Ainsi,
$$[\nu_t = n] = [S_{n-1} \leqslant t] \cap [S_n \leqslant t]^c \in \mathcal{A}$$
car S_n et S_{n-1} sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

8. a. Par **[4.]**,
$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant F_n(t) \leqslant e^t \theta^n$$
et comme $0 \leqslant \theta < 1$, la série $\sum F_n(t)$ est convergente.

8. b. Comme $S_{n-1}(\omega) \leqslant S_n(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$, alors
$$[S_n \leqslant t] \subset [S_{n-1} \leqslant t]$$
et on déduit de **[7.]** que
$$[S_{n-1} \leqslant t] = [S_n \leqslant t] \sqcup [\nu_t = n]$$
donc $\mathbf{P}(\nu_t = n) = F_{n-1}(t) - F_n(t)$ pour tout $n \geqslant 2$ et même pour $n = 1$ (puisque S_0 est identiquement nulle).

8. c. Toujours d'après **[4.]**,
$$NF_N(t) = \mathcal{O}(N\theta^N)$$
avec $0 \leqslant \theta < 1$, donc $NF_N(t)$ tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$.

8. d. D'après **[8.b.]**, pour tout $N \geqslant 1$,
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} n\,\mathbf{P}(\nu_t = n) &= \sum_{n=1}^{N} n\big(F_{n-1}(t) - F_n(t)\big) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} (n+1)F_n(t) - \sum_{n=1}^{N} nF_n(t) \\ &= F_0(t) + \sum_{n=1}^{N-1} F_n(t) - NF_N(t). \end{aligned}$$

On déduit de **[8.a.]** et de **[8.c.]** que la série de terme général *positif* $\sum n\,\mathbf{P}(\nu_t = n)$ est (absolument) convergente, donc ν_t est une variable aléatoire d'espérance finie, et que
$$\mathbf{E}(\nu_t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathbf{P}(\nu_t = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n(t).$$

9. a. Soient $0 < t_1 < t_2$. Comme le minimum d'une partie A appartient à A, alors $S_{\nu_{t_2}} > t_2 > t_1$. Ainsi, ν_{t_2} appartient à l'ensemble des entiers n tels que $S_n > t_1$, ensemble dont le minimum est ν_{t_1}. Donc $\nu_{t_1} \leqslant \nu_{t_2}$: cela prouve que $[t \mapsto \nu_t]$ est une fonction croissante.

9. b. Soit $t > 0$, fixé. Comme on l'a remarqué plus haut, $S_{\nu_t} > t$, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$t < t + \varepsilon < S_{\nu_t}.$$

Cela implique que l'entier ν_t appartient à l'ensemble des entiers n tels que $S_n > t + \varepsilon$, ensemble dont le minimum est $\nu_{t+\varepsilon}$. Donc

$$\nu_{t+\varepsilon} \leqslant \nu_t.$$

Or la fonction $[t \mapsto \nu_t]$ est croissante, donc

$$\forall\, 0 < h \leqslant \varepsilon, \quad \nu_{t+\varepsilon} \leqslant \nu_t \leqslant \nu_{t+h} \leqslant \nu_{t+\varepsilon},$$

ce qui prouve que $[t \mapsto \nu_t]$ est constante sur $[t, t+\varepsilon[$. En particulier, la fonction $[t \mapsto \nu_t]$ est continue à droite (càd) en chaque point et comme elle est croissante, elle admet une limite à gauche (làg) en chaque point.