Problème de Mathématiques

Référence pp1618 — Version du 31 décembre 2025

Partie A. Préliminaires

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \binom{2n}{n}.$$

1. a. Vérifier que $u_n \leqslant 4^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. b. Déduire de la formule de Stirling un réel $C > 0$ tel que

$$u_n \sim C\frac{4^n}{\sqrt{n}}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

2. On *admet* que

$$\forall\, 0 \leqslant x < 1/4, \quad \frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n.$$

On pose en outre

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}.$$

Calculer la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$$

pour $0 \leqslant x < 1/4$. En déduire la valeur de v_n en fonction de n.

Partie B. Une marche aléatoire

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et de même loi, avec

$$\mathbf{P}(X_i = 1) = \mathbf{P}(X_i = -1) = 1/2.$$

On pose alors $S_0 = 0$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **marche aléatoire** : elle modélise la succession des positions occupées par un mobile qui se déplace au hasard sur $\mathbb{Z}$.

3. Calculer l'espérance et la variance de S_1.

4. Caractériser la loi de S_2 et calculer son espérance.

5. Démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \mathbf{P}(S_{2n} = 0) = \frac{u_n}{4^n}.$$

☞ *On pourra relier la loi de S_{2n} à une loi binomiale bien choisie.*

6. Pour tout entier $i \geqslant 1$, on définit la variable aléatoire

$$Z_i = \mathbb{1}_{[S_{2i}=0]}$$

et, pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i.$$

6. a. Que représente la variable Y_n pour la marche aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

6. b. Démontrer que

$$\mathbf{E}(Y_n) \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

lorsque n tend vers $+\infty$. En comparant la somme à une intégrale, donner un équivalent simple de $\mathbf{E}(Y_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie C. Une autre marche aléatoire

On fixe un entier naturel $N \geqslant 1$. On considère une variable aléatoire A définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ qui suit la loi uniforme sur l'ensemble E_N des parties de $E = \{1, \ldots, 2N\}$ dont le cardinal est égal à N :

— Pour tout $\omega \in \Omega$, il existe des entiers

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_N \leqslant 2N$$

tels que $A(\omega) = \{i_1, i_2, \ldots, i_N\} \in E_N$.

— Pour toute partie $\{i_1, i_2, \ldots, i_N\} \in E_N$,

$$\mathbf{P}\big(A = \{i_1, \ldots, i_N\}\big) = \frac{1}{\#(E_N)}.$$

7. Quel est le cardinal de E_N ?

Pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant 2N$ et tout $\omega \in \Omega$, on pose alors

$$X'_i(\omega) = \left| \begin{array}{rl} 1 & \text{si } i \in A(\omega), \\ -1 & \text{si } i \notin A(\omega). \end{array} \right.$$

On pose ensuite $S'_0 = 0$ et

$$\forall\, 1 \leqslant n \leqslant 2N, \quad S'_n = \sum_{k=1}^{n} X'_k.$$

Ainsi, si $N = 3$ et $A(\omega) = \{1, 2, 5\}$, alors

$$X'_1(\omega) = X'_2(\omega) = 1,\ X'_3(\omega) = X'_4(\omega) = -1,$$
$$X'_5(\omega) = 1, X'_6(\omega) = -1$$

et par conséquent

$$S'_1(\omega) = 1,\ S'_2(\omega) = 2,\ S'_3(\omega) = 1,\ S'_4(\omega) = 0,$$
$$S'_5(\omega) = 1,\ S'_6(\omega) = 0.$$

8. Démontrer que les fonctions $X'_i : \Omega \to \mathbb{Z}$ sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

9. Démontrer que les fonctions $S'_n : \Omega \to \mathbb{Z}$ sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

10. Démontrer que les variables X'_i suivent toutes la loi uniforme sur $\{-1; 1\}$:

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant 2N, \quad \mathbf{P}(X'_i = 1) = \mathbf{P}(X'_i = -1) = 1/2.$$

11. Que dire de la variable aléatoire S'_{2N} ? Quelle est sa variance ?

12. Les variables aléatoires X'_i sont-elles indépendantes ?

13. On pose alors

$$Y'_N = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{[S'_{2i}=0]}.$$

13. a. Démontrer que la fonction $Y'_N : \Omega \to \mathbb{N}$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

13. b. Démontrer que

$$\mathbf{E}(Y'_N) = \frac{v_N}{u_N} - 1$$

et en déduire un équivalent de $\mathbf{E}(Y'_N)$ lorsque N tend vers l'infini.

Partie D. Modélisation

14. Proposer un modèle d'urne pour chacune des deux marches aléatoires : on considérera une urne contenant des boules de deux couleurs différentes (par exemple, céladon et rose thé) et on associera les variables aléatoires X_i et X'_i à des protocoles de tirage précis. On interprétera les variables aléatoires Y_N et Y'_N en fonction de ces modèles.

Solution ❀ Marches aléatoires

Partie A. Préliminaires

1. a. D'après la formule du binôme,

$$4^n = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 1^k 1^{2n-k} \geqslant \binom{2n}{n}$$

puisque tous les termes sont positifs.

1. b. La formule de Stirling nous dit que

$$(u_n)! \sim \sqrt{2\pi u_n} e^{-u_n} u_n^{u_n}$$

pour toute suite d'entiers $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$. On en déduit que

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

2. La propriété admise par l'énoncé prouve que le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$ est supérieur à $1/4$. (Cela pourrait également être déduit de l'équivalent établi en **[1.b.]**)

En particulier, pour tout $0 \leqslant x < 1/4$, la série $\sum u_n x^n$ est *absolument* convergente. La série $\sum v_n x^n$, produit de Cauchy de $\sum u_n x^n$ par elle-même, est donc elle aussi absolument convergente et de plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n\right)^2 = \frac{1}{1-4x}.$$

❧ On en déduit (série *géométrique*) que

$$\forall\, 0 \leqslant x < 1/4, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n = \frac{1}{1-4x} = \sum_{n=0}^{+\infty} 4^n x^n$$

et donc que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 4^n$$

(unicité du développement en série entière).

Partie B. Une marche aléatoire

3. La variable aléatoire $S_1 = X_1$ est bornée, donc elle admet des moments de tout ordre : en particulier, elle est d'espérance finie et admet une variance.

Par définition de l'espérance,

$$\mathbf{E}(S_1) = (-1)\,\mathbf{P}(S_1 = -1) + (+1)\,\mathbf{P}(S = 1) = 0.$$

La variable S_1 est donc *centrée*.

De plus, la variable S_1^2 est constante, égale à 1, donc $\mathbf{E}(S_1^2) = 1$. D'après la formule de Koenig-Huyghens,

$$\mathbf{V}(S_1) = \mathbf{E}(S_1^2) - [\mathbf{E}(S_1)]^2 = 1.$$

La variable S_1 est donc *réduite*.

4. On connaît les lois de X_1 et X_2 et on sait que ces variables aléatoires sont indépendantes. On connaît donc la loi du couple (X_1, X_2) et on peut en déduire la loi de la somme $X_1 + X_2$.

x_1	x_2	$\mathbf{P}[(X_1,X_2) = (x_1,x_2)]$	S_2
-1	-1	$1/4$	-2
-1	1	$1/4$	0
1	-1	$1/4$	0
1	1	$1/4$	2

Par conséquent, la loi de S_2 est portée par $\{-2; 0; 2\}$ et

$$\mathbf{P}(S_2 = -2) = \mathbf{P}(S_2 = 2) = \frac{1}{4},\ \mathbf{P}(S_2 = 0) = \frac{1}{2}.$$

5. On déduit de la loi de X_i que la variable aléatoire

$$B_i = \frac{X_i + 1}{2}$$

suit la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Comme les variables $X_1, \ldots, X_{2n}$ sont indépendantes par hypothèse, alors les variables $B_1 = f(X_1), \ldots, B_{2n} = f(X_{2n})$ sont indépendantes elles aussi et, en tant que somme de $2n$ variables de Bernoulli indépendantes, la variable

$$\Sigma_{2n} = \frac{S_{2n} + 2n}{2} = \sum_{i=1}^{2n} B_i$$

suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2n, 1/2)$:

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant 2n, \quad \mathbf{P}(\Sigma_{2n} = k) = \binom{2n}{k}(1/2)^k(1/2)^{2n-k} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{k}.$$

Comme $[S_{2n} = 0] = [\Sigma_n = n]$, on en déduit que

$$\mathbf{P}(S_{2n} = 0) = \frac{1}{4^n} u_n. \tag{1}$$

6. a. La marche aléatoire part de 0 puisque $S_0 = 0$. La variable Z_i prend la valeur 1 lorsque $S_{2i} = 0$, c'est-à-dire lorsque le mobile passe à nouveau par 0. La variable Y_n est donc le nombre de passages en 0 entre les instants 1 et n, c'est-à-dire le *nombre de retours à l'origine* qui ont lieu avant l'instant n.

6. b. La variable Y_n est une somme de n variables aléatoires de Bernoulli. Elle est donc presque sûrement bornée et donc d'espérance finie.

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(Z_i) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(S_{2k} = 0).$$

D'après (1),

$$\mathbf{E}(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{4^k}$$

et d'après **[1.b.]**,

$$\frac{u_k}{4^k} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}}.$$

La série de terme général *positif* $1/\sqrt{\pi k}$ est *divergente* (Riemann), donc les sommes partielles $\mathbf{E}(Y_n)$ tendent vers $+\infty$ et plus précisément

$$\mathbf{E}(Y_n) \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$$

lorsque n tend vers $+\infty$ (théorème de sommation des équivalents).

❧ La fonction

$$f = \left[t \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right]$$

est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. On en déduit *(figure correctement légendée obligatoire sur la copie)* que

$$\int_1^n f(t)\,dt + f(n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + \int_1^n f(t)\,dt$$

c'est-à-dire

$$2\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} + 2\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{\pi}}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc que

$$\mathbf{E}(Y_n) \sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie C. Une autre marche aléatoire

7. Il y a $\binom{2N}{N}$ parties de E constituées de N éléments (par définition du coefficient binomial).

8. Comme $A : \Omega \to E_N$ est une variable aléatoire discrète sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, alors

$$\forall\, B \subset E_N, \quad [A \in B] \in \mathcal{A}. \tag{2}$$

Pour $1 \leqslant i \leqslant 2N$, notons E_N^i, l'ensemble des parties de E constituées de N éléments et qui contiennent i :

$$B \in E_N^i \iff \begin{cases} B \in E_N \\ i \in B \end{cases}.$$

Par définition,

$$[X_i' = 1] = [A \in E_N^i] \quad \text{et} \quad [X_i' = -1] = [A \in E_N^i]^c \tag{3}$$

donc $[X_i' = 1] \in \mathcal{A}$ et $[X_i' = -1] \in \mathcal{A}$ par (2).

D'autre part, $[X_i' = k] = \varnothing \in \mathcal{A}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ distinct de ± 1.

Finalement,

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad [X_i' = k] \in \mathcal{A},$$

donc $X_i' : \Omega \to \mathbb{Z}$ est bien un variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

9. En tant que somme d'un nombre fini de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A})$, S_n' est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

10. On a déjà justifié que la loi de X_i était portée par l'ensemble $\{\pm 1\}$ et que, par conséquent,

$$\mathbf{P}(X_i' = -1) = 1 - \mathbf{P}(X_i' = 1).$$

❧ Comme la loi de A est la loi uniforme sur E_N, on déduit de (3) que

$$\mathbf{P}(X_i' = 1) = \frac{\#(E_N^i)}{\#(E_N)}.$$

L'application $[B \mapsto B \cup \{i\}]$ réalise une bijection de l'ensemble des parties de cardinal $(N-1)$ prises dans l'ensemble

$$\{1, \dots, i-1, i+1, \dots, 2N\}$$

sur l'ensemble E_N^i, donc

$$\#(E_N^i) = \binom{2N-1}{N-1}$$

et par conséquent,

$$\mathbf{P}(X_i' = 1) = \frac{(2N-1)!/[(N-1)!N!]}{(2N)!/[N!N!]} = \frac{N}{2N} = \frac{1}{2},$$

ce qui prouve que X_i' suit la loi uniforme sur $\{\pm 1\}$.

11. Par hypothèse, $\#[A(\omega)] = N$.

Il y a donc N indices $1 \leqslant i \leqslant 2N$ qui appartiennent à $A(\omega)$ et N autres indices $1 \leqslant i \leqslant 2N$ qui n'appartiennent pas à $A(\omega)$.

Il y a donc N indices $1 \leqslant i \leqslant 2N$ tels que $X_i'(\omega) = 1$ et N indices $1 \leqslant i \leqslant 2N$ tels que $X_i'(\omega) = -1$. Par conséquent,

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad S_{2N}'(\omega) = N - N = 0.$$

La variable aléatoire S_{2N}' est donc identiquement nulle (loi de Dirac) et, comme pour toute variable aléatoire presque sûrement constante, sa variance est nulle.

12. Les variables aléatoires X_i' sont toutes de même loi et leur variance commune est égale à 1 (calculée au **[3.]**). Si ces variables aléatoires étaient indépendantes, on aurait alors

$$\mathbf{V}(S_{2N}') = \mathbf{V}\Big(\sum_{i=1}^{2N} X_i'\Big) = \sum_{i=1}^{2N} \mathbf{V}(X_i') = 2N.$$

On a démontré à la question précédente que $\mathbf{V}(S_{2N}') = 0$, ce qui prouve que les variables X_1', ..., X_{2N}' ne sont pas indépendantes.

13. a. Comme S_{2i}' est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$, alors $[S_{2i}' = 0]$ est un événement : $[S_{2i}' = 0] \in \mathcal{A}$. Par conséquent, son indicatrice $\mathbb{1}_{[S_{2i}'=0]}$ est une variable aléatoire de Bernoulli sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et Y_N', en tant que somme d'un nombre fini de variables aléatoires, est encore une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

13. b. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(Y'_N) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}(\mathbb{1}_{[S'_{2i}=0]}) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}(S'_{2i} = 0).$$

La variable S'_{2i} s'annule lorsque i variables parmi $X_1, \ldots, X_{2i}$ prennent la valeur 1 (et les autres prennent la valeur -1). Autrement dit,

$$[S'_{2i} = 0] = \bigsqcup_{1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_i \leqslant 2i} \big[A \cap \{1, \ldots, 2i\} = \{k_1, \ldots, k_i\}\big].$$

Comme la loi de A est uniforme, il reste à compter le nombre de cas favorables. La condition

$$A(\omega) \cap \{1, \ldots, 2i\} = \{k_1, \ldots, k_i\}$$

signifie que les entiers $k \leqslant 2i$ qui appartiennent à $A(\omega)$ sont connus : il reste donc à choisir les $(N - i)$ entiers $2i < k \leqslant 2N$ qui appartiennent à $A(\omega)$. Par définition du coefficient binomial, il y a $\binom{2N-2i}{N-i}$ possibilités et par σ-additivité de $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{P}(S'_{2i} = 0) = \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_i \leqslant 2i} \frac{\binom{2N-2i}{N-i}}{u_N}.$$

Il y a (toujours par définition du coefficient binomial) $\binom{2i}{i}$ termes dans cette somme, donc

$$\mathbf{P}(S'_{2i} = 0) = \frac{\binom{2i}{i}\binom{2N-2i}{N-i}}{u_N}$$

et par définition de v_N,

$$\mathbf{E}(Y'_N) = \frac{v_N}{u_N} - 1.$$

(Le terme en $i = 0$ manque à l'appel !)

❧ On déduit alors de **[1.b.]** et **[2.]** que

$$\mathbf{E}(Y'_N) \sim \sqrt{\pi N}$$

lorsque N tend vers $+\infty$.

Partie D. Modélisation

14. On considère une urne contenant N boules céladon et N boules rose thé.

Dans le premier cas, on tire les boules *avec* remise et compte $+1$ pour chaque boule rose et -1 pour chaque boule verte. Il est raisonnable dans ces conditions de supposer que chaque couleur est tirée avec une probabilité $1/2$ et que les tirages sont indépendants.

Dans le second cas, on tire N boules *sans* remise parmi les $2N$ boules présentes dans l'urne. Il est raisonnable de supposer que chaque ensemble de N tirages a la même probabilité d'être réalisé (loi uniforme sur l'ensemble E_N des tirages possibles). Les variables X'_i qui indiquent la couleur chaque boule tirée ne sont plus indépendantes **[[12.]]** car la composition de l'urne varie avec chaque boule tirée. Ce qui est plus surprenant est que chaque couleur a la même probabilité d'apparaître à chaque tirage, quelle que soit l'évolution de la composition de l'urne **[[10.]]**.

Les variables Y_N et Y'_N comptent le nombre de fois où, au cours de la succession de N tirages, on a retiré autant de boules roses que de boules vertes.