Problème de Mathématiques

Référence pp2137 — Version du 31 décembre 2025

On s'intéresse ici à une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$: partant initialement de 0, si on se trouve sur l'entier $x \in \mathbb{Z}$ à l'instant $n \in \mathbb{N}$, on a une chance sur deux de se trouver sur l'entier $(x+1)$ et une chance sur deux de se trouver sur l'entier $(x-1)$ à l'instant $(n+1)$.
Pour décrire ce processus, on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ en supposant que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X_k = 1) = \mathbf{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On considère aussi la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$S_0 = 0 \quad \textit{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

On définit en outre une fonction

$$T\ :\ \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

en posant

$$T(\omega) = +\infty$$

si $S_n(\omega) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en posant

$$T(\omega) = \min\big\{n \in \mathbb{N}^*\ :\ S_n(\omega) = 0\big\}$$

dans le cas contraire. On admet *que T est une variable aléatoire.*
Enfin, on définit deux suites réelles $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \mathbf{P}(S_n = 0)$$

et

$$q_0 = 0 \quad \textit{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad q_n = \mathbf{P}(T = n).$$

Partie A. Calcul de p_n

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire Y_k définie par

$$Y_k = \frac{X_k + 1}{2}.$$

On admet que $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes (lemme des coalitions).

1. Que représente la variable aléatoire S_n ?
2. Calculer p_0, p_1 et p_2.
3. Justifier que $p_n = 0$ pour tout entier impair n.
4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.
5. Pour $n > 0$, donner la loi de

$$Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$$

et exprimer S_n en fonction de Z_n.
6. On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2m$. Déduire de la question précédente que

$$p_{2m} = \binom{2m}{m} \frac{1}{4^m}.$$

Partie B. Fonction génératrice des p_n

On note R_p, le rayon de convergence de la série entière $\sum p_n x^n$ et f, la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence.

7. Démontrer que $R_p \geqslant 1$.

8. Démontrer que

$$p_{2m} = \frac{(-1)^m}{m!} \prod_{k=1}^{m} \Big(\frac{-1}{2} - k + 1 \Big)$$

pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

9. Déterminer un réel α tel que

$$\forall\, x \in \left]-1, 1\right[, \quad f(x) = (1 - x^2)^{\alpha}.$$

Partie C. Loi de T

On note R_q, le rayon de convergence de la série entière $\sum q_n x^n$ et g, la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère également la fonction $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = q_n x^n.$$

10. Calculer q_1 et q_2.

11. Démontrer que la série $\sum g_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$. En déduire que $R_q \geqslant 1$.

Dans la suite, on admet la relation

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}.$$

12. En utilisant un produit de Cauchy et la relation admise ci-dessus, démontrer que

$$\forall\, x \in \left]-1, 1\right[, \quad f(x)g(x) = f(x) - 1.$$

13. En déduire que

$$\forall\, x \in \left]-1, 1\right[, \quad g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}.$$

Calculer le développement en série entière de g en précisant son rayon de convergence.

14. En déduire une expression de q_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

15. En utilisant **[11.]** et **[13.]**, calculer $\mathbf{P}(T = +\infty)$. Interpréter le résultat.

16. La variable aléatoire T est-elle une variable aléatoire d'espérance finie ?

Solution ❀ Retour à l'origine d'une marche aléatoire

Complément à caractère culturel

❧ S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_n(\omega) = 0$, alors l'ensemble

$$\{n \in \mathbb{N}^* \,:\, S_n(\omega) = 0\}$$

est une partie non vide de $\mathbb{N}$ et admet de ce fait un plus petit élément. L'application T est donc bien définie.

❧ Il reste à vérifier que T est bien une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Pour cela, il faut d'abord remarquer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad [S_n = 0] \in \mathcal{A}$$

puisque S_n est une variable aléatoire. On en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad [S_n = 0]^c \in \mathcal{A}$$

puisqu'une tribu est stable par passage au complémentaire.

D'une part,

$$[T = +\infty] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [S_n = 0]^c \in \mathcal{A}$$

en tant qu'intersection dénombrable d'événements.

D'autre part, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$[T = n] = [S_1 = 0]^c \cap \cdots \cap [S_{n-1} = 0]^c \cap [S_n = 0] \in \mathcal{A}$$

en tant qu'intersection d'un nombre fini d'événéments.

Partie A. Calcul de p_n

1. Chaque variable X_k représente le *déplacement* effectué entre l'instant $(k-1)$ et l'instant k, la variable S_n représente donc la *position* à l'instant n.

2. Comme $S_0(\omega) = 0$ pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$p_0 = \mathbf{P}(S_0 = 0) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

Comme $S_1(\omega) = X_1(\omega) \neq 0$ pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$p_1 = \mathbf{P}(S_1 = 0) = \mathbf{P}(\varnothing) = 0.$$

Enfin, en décomposant sur le système complet d'événements $([X_1 = 1], [X_1 = -1])$,

$$[S_2 = 0] = [X_1 = -X_2] = [X_1 = 1, X_2 = -1] \sqcup [X_1 = -1, X_2 = 1].$$

Comme les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(1/2)$,

$$p_2 = \mathbf{P}(X_1 = 1)\,\mathbf{P}(X_2 = -1) + \mathbf{P}(X_1 = -1)\,\mathbf{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{2}.$$

3. Comme $X_k(\omega) = \pm 1$, les deux ensembles

$$\{1 \leqslant k \leqslant n \,:\, X_k(\omega) = 1\} \quad \text{et} \quad \{1 \leqslant k \leqslant n \,:\, X_k(\omega) = -1\}$$

définissent une partition de $\{1, \dots, n\}$. La somme de leurs cardinaux est donc égale à n.

Si $S_n(\omega) = 0$, alors ces deux ensembles ont même cardinal m et par conséquent, $n = 2m$ est un entier pair.

Par contraposée, si n est impair, alors $[S_n = 0]$ est vide et par conséquent $p_n = 0$.

4. Comme X_k prend les valeurs ± 1, alors Y_k prend les valeurs $(\pm 1 + 1)/2$, c'est-à-dire 0 ou 1 avec

$$[Y_k = 1] = [X_k = 1] \quad \text{et} \quad [Y_k = 0] = [X_k = -1].$$

Donc Y_k suit bien une loi de Bernoulli. Le paramètre de cette loi est

$$\mathbf{P}(Y_k = 1) = \mathbf{P}(X_k = 1) = \frac{1}{2}.$$

5. Remarque à caractère culturel

Il existe une fonction (affine !) f telle que $Y_k = f(X_k)$ pour tout $k \geqslant 1$. Comme les variables aléatoires X_k sont mutuellement indépendantes et de même loi, les variables aléatoires Y_k sont mutuellement indépendantes (lemme des coalitions) et de même loi (c'est la même fonction f pour toutes les variables).

❧ En tant que somme de n variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(1/2)$, la variable Z_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, 1/2)$.

❧ Puisque $X_k = 2Y_k - 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (2Y_j - 1) = 2\Big(\sum_{k=1}^{n} Y_k\Big) - n = 2Z_n - n.$$

6. D'après la question précédente,

$$[S_{2m} = 0] = [2Z_n = n] = [Z_{2m} = m]$$

et comme Z_{2m} suit la loi binomiale $\mathscr{B}(2m, 1/2)$,

$$p_{2m} = \binom{2m}{m}\frac{1}{2^{2m}} = \frac{1}{4^m}\binom{2m}{m}.$$

> *On peut donner une interprétation combinatoire de cette expression : on choisit m indices parmi les $n = 2m$ indices pour situer les montées ; chacune des m montées est effectuée avec la probabilité $1/2$ et chacune des m descentes est effectuée avec la probabilité $1/2$.*

Partie B. Fonction génératrice des p_n

7. Comme p_n est une probabilité, on a évidemment

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, 0 < x < 1, \quad 0 \leqslant p_n x^n \leqslant x^n.$$

Pour $0 < x < 1$, la série géométrique $\sum x^n$ est convergente, donc la série $\sum p_n x^n$ est convergente (par comparaison).

Comme la série entière $\sum p_n x^n$ converge au moins sur $]0, 1[$, cela prouve que le rayon de convergence est au moins égal à 1.

> *Le rapport du jury indique que de nombreux candidats ont cru que la série $\sum p_n$ était convergente. Cela s'explique par une lecture inattentive du titre de la partie : la fonction f est bien une fonction génératrice, mais ce n'est pas la fonction génératrice d'une variable aléatoire ! En effet, les événements $[S_n = 0]$ ne constituent pas le système complet d'événements associés à une variable aléatoire...*

8. Pour tout $m \geqslant 1$,

$$(-1)^m \prod_{k=1}^{m}\Big(\frac{-1}{2} - k + 1\Big) = \prod_{k=1}^{m} \frac{1 + 2k - 2}{2} = \frac{1}{2^m}\prod_{k=1}^{m}(2k-1) = \frac{1}{2^m}\prod_{k=1}^{m}\frac{2k(2k-1)}{2k} = \frac{(2m)!}{2^m.(2^m m!)}$$

et on retrouve ainsi l'expression de p_{2m} calculée au **[7.]**

9. On sait que

$$\forall\, u \in]-1, 1[, \quad (1+u)^\alpha = \sum_{m=0}^{+\infty} c_m u^m$$

avec $c_0 = 1$ et

$$\forall\, m \geqslant 1, \quad c_m = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)}{m!}.$$

Pour $x \in]-1, 1[$, on a $-1 < -x^2 \leqslant 0$ et donc

$$(1-x^2)^\alpha = \sum_{m=0}^{+\infty} c_m(-x^2)^m = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m c_m x^{2m}.$$

Or, d'après **[7.]** et **[3.]**,

$$\forall\, x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} p_{2m} x^{2m}$$

et d'après la question précédente, $p_{2m} = (-1)^m c_m$ pour $\alpha = -1/2$.

On a donc

$$\forall\, x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Partie C. Loi de T

10. On a

$$q_1 = \mathbf{P}(T=1) = \mathbf{P}(S_1 = 0), \qquad q_2 = \mathbf{P}(T=2) = \mathbf{P}(S_1 \neq 0, S_2 = 0)$$

et d'après **[2.]**

$$q_1 = 0, \qquad q_2 = \frac{1}{2}.$$

11. Pour tout $x \in [-1,1]$, il est clair que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \left|g_n(x)\right| \leqslant q_n = \mathbf{P}(T=n).$$

On a trouvé un majorant indépendant de $x \in [-1,1]$.

Comme les événements $[T=n]$ sont deux à deux disjoints, la série $\sum \mathbf{P}(T=n)$ est convergente (σ-additivité de $\mathbf{P}$), donc la série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement sur le segment $[-1,1]$.

❧ En particulier, la série $\sum g_n(x)$ converge absolument pour tout $|x| \leqslant 1$, ce qui prouve que le rayon de convergence R_q est au moins égal à 1.

12. Le produit de Cauchy des séries entières $\sum p_n x^n$ et $\sum q_n x^n$ est la série entière $\sum w_n x^n$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}.$$

D'après **[7.]**, on a $R_p \geqslant 1$ et d'après **[11.]**, on a $R_q \geqslant 1$. Par conséquent, pour $|x| < 1$ (au moins !), la série $\sum w_n x^n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n\right) = f(x)g(x).$$

D'après l'énoncé,

$$\boxed{\forall\, n \geqslant 1,} \qquad w_n = p_n.$$

En outre, $w_0 = p_0 q_0 = 0$ (puisque $q_0 = 0$), donc

$$\forall\, x \in \left]-1,1\right[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n = f(x) - p_0 = f(x) - 1. \qquad \text{(par [2.])}$$

On en déduit que

$$\forall\, x \in \left]-1,1\right[, \quad f(x)g(x) = f(x) - 1.$$

13. On connaît l'expression de $f(x)$ depuis **[12.]** et on déduit de la question précédente que

$$\forall\, x \in \left]-1,1\right[, \quad g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}.$$

❧ Le développement en série entière de $(1+u)^{1/2}$ est connu, son rayon de convergence est égal à 1 et les coefficients sont donnés par la formule rappelée au **[9.]** Cette fois, $\alpha = 1/2$ et, pour tout $n \geqslant 1$,

$$c_n = \frac{1 \cdot (-1) \cdot (-3) \cdots (3-2n)}{2^n . n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!} \cdot [1 \cdot 3 \cdots (2n-3)] = \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)}{2^{2n-1} \cdot n!(n-1)!}$$

avec $c_0 = 1$ bien sûr.

Pour $|x| < 1$, on a $u = -x^2 \in \left]-1,1\right[$ et donc

$$\sqrt{1-x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n (-x^2)^n = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} \cdot n!(n-1)!} \cdot x^{2n}.$$

Par conséquent,

$$g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} \cdot \frac{x^{2n}}{2^{2n-1}}$$

pour tout $x \in \left]-1,1\right[$.

14. Comme le rayon de convergence est strictement positif (il est égal à 1), on peut invoquer l'unicité du développement en série entière. On déduit de l'expression précédente que

$$q_0 = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad q_{2n+1} = 0$$

et que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad q_{2n} = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} \cdot n!(n-1)!}.$$

15. Par **[11.]**, la fonction g est continue sur $[-1, 1]$. En particulier,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q_n = g(1) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} 1 - \sqrt{1-x^2} = 1.$$

Or

$$\Omega = [T = +\infty] \sqcup \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} [T = n]$$

et par σ-additivité de $\mathbf{P}$,

$$1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(T = +\infty) + \sum_{n=1}^{+\infty} q_n.$$

On en déduit que $\mathbf{P}(T = +\infty) = 0$, ce qui signifie que, pour presque tout $\omega \in \Omega$, il existe au moins un entier $n \geqslant 1$ tel que $S_n(\omega) = 0$.

16. Comme g est la fonction génératrice de T, on sait que T est une variable aléatoire d'espérance finie si, et seulement si, g est dérivable au point 1.

Pour $0 < x < 1$, on déduit de **[13.]** que

$$\frac{g(1) - g(x)}{1-x} = \frac{1 - (1 - \sqrt{1-x^2})}{1-x} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Cela prouve que g n'est pas dérivable au point 1 (le taux d'accroissement tend vers $+\infty$) et donc que T n'est pas une variable aléatoire d'espérance finie.