Problème de Mathématiques

Référence pp1610 — Version du 31 décembre 2025

---

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ y-4 & 2x \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

2. On pose $E_1 = \{u \in \mathbb{R}_+ \;:\; u^2 \notin \mathbb{N}\}$ et $E_2 = \mathbb{R}_+ \setminus E_1$. Démontrer que l'ensemble E_2 est dénombrable.

3. Soit $f \;:\; \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, l'application définie par

$$\forall\, u \in E_1, \quad f(u) = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, u \in E_2, \quad f(u) = \frac{\lambda}{2^{u^2}}.$$

Déterminer le réel λ pour lequel il existe une variable aléatoire discrète X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telle que

$$\forall\, u \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{P}(X = u) = f(u).$$

4. Déterminer la loi et l'espérance de X^2.

5. Déterminer la fonction génératrice de X^2 et retrouver ainsi l'espérance de X^2.

6. Soit Y, une variable aléatoire définie sur Ω, indépendante de X, telle que

$$\forall\, u \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{P}(Y = u) = \left|\begin{array}{ll} 0 & \text{si } u \notin \mathbb{N}, \\ \dfrac{1}{2^{u+1}} & \text{sinon.} \end{array}\right.$$

Déterminer la fonction génératrice de la variable aléatoire

$$Z = X^2 + Y.$$

En déduire la loi de Z.

7. Calculer la probabilité pour que la matrice aléatoire

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Y-4 & 2X \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable.

Solution ❀ Une matrice aléatoire

1. Le polynôme caractéristique de A est égal à

$$X^2 - (\operatorname{tr} A)X + (\det A) = X^2 - 2xX + (4-y).$$

Son discriminant réduit est égal à $x^2 + y - 4$.

❧ Si le discriminant est strictement négatif, la matrice A n'a pas de valeur propre réelle, donc n'est pas diagonalisable dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

❧ Si le discriminant est nul, alors la matrice A admet une valeur propre unique et comme ce n'est pas une homothétie, alors elle n'est pas diagonalisable dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

❧ Si le discriminant est strictement positif, alors la matrice A admet deux valeurs propres réelles distinctes et comme elle appartient à $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, elle est donc diagonalisable.

Par conséquent, la matrice A est diagonalisable si, et seulement si,

$$x^2 + y > 4.$$

2. L'ensemble E_2 est par définition l'image de $\mathbb{N}$, partie dénombrable de $\mathbb{R}_+$, par l'application injective $\left[x \mapsto \sqrt{x}\right]$, donc E_2 est bien une partie dénombrable de $\mathbb{R}_+$.

$$E_2 = \left\{\sqrt{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

3. On sait qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et une variable aléatoire discrète X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telle que

$$\forall\, u \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{P}(X = u) = f(u)$$

si, et seulement si, la famille $\big(f(u)\big)_{u \in \mathbb{R}_+}$ est une famille sommable de réels positifs dont la somme est égale à 1.

D'après **[2.]**, il s'agit donc de trouver les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la série $\sum \lambda/2^n$ est une série de terme général positif dont la somme est égale à 1.

Comme $0 < 1/2 < 1$, on reconnaît une série géométrique convergente dont le terme général est positif si, et seulement si, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et dont la somme est égale à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda}{2^n} = \frac{\lambda}{1 - 1/2} = 2\lambda.$$

Donc le seul réel λ convenable est égal à $1/2$.

4. Comme l'ensemble des valeurs prises par X est E_2, alors l'ensemble des valeurs prises par X^2 est égal à $\mathbb{N}$ et comme $E_2 \subset \mathbb{R}_+$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad [X^2 = n] = [X = \sqrt{n}]$$

donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X^2 = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

(C'est presque une loi géométrique !)

❧ La variable X^2 est d'espérance finie si, et seulement si, la série $\sum 2^{-(n+1)} n$ est convergente. On sait que le rayon de convergence de la série entière $\sum x^n$ est égal à 1 et comme il est strictement positif, on peut dériver terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence, donc

$$\forall\, x \in \left]-1, 1\right[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

En particulier, pour $x = 1/2$, la série $\sum 2^{-(n+1)} n$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(1/2)^{n+1} = (1/2)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n(1/2)^{n-1} = \frac{1/4}{1/4} = 1$$

(le terme en $n = 0$ est nul), donc $\mathbf{E}(X^2) = 1$.

5. Comme X^2 est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, sa fonction génératrice F est par définition la somme de la série entière $\sum \mathbf{P}(X^2 = n)x^n$, série entière dont le rayon de convergence est au moins égal à 1. Donc

$$\forall\, x \in [-1, 1], \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (x/2)^n$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - x/2} = \frac{1}{2 - x}.$$

On remarque en passant que le rayon de convergence de la série génératrice de X^2 est égal à 2, ce qui prouve que la fonction génératrice est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $]-2, 2[$ et, en particulier, dérivable en $x = 1$. Cela prouve à nouveau que X^2 est une variable aléatoire d'espérance finie et que

$$\mathbf{E}(X^2) = F'(1) = \frac{1}{(2-1)^2} = 1.$$

6. En tant que somme de deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, la fonction Z est encore une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc sa fonction génératrice G est bien définie sur $[-1, 1]$ au moins.

La variable aléatoire Y suit la même loi que X^2, donc X^2 et Y ont même fonction génératrice. Comme X^2 et Y sont indépendantes, alors les variables aléatoires t^{X^2} et t^Y sont indépendantes et comme ces variables sont d'espérance finie pour $|t| < 2$, alors $t^Z = (t^{X^2})(t^Y)$ est aussi une variable aléatoire d'espérance finie pour $t \in]-2, 2[$ et

$$\forall\, t \in]-2, 2[, \quad G(t) = \mathbf{E}(t^Z) = \mathbf{E}(t^{X^2})\,\mathbf{E}(t^Y) = [F(t)]^2$$
$$= \frac{1}{(2-t)^2} = F'(t).$$

Comme le rayon de convergence de la série génératrice de X^2 est strictement positif, on peut dériver terme à terme. Sachant que

$$\forall\, t \in]-2, 2[, \quad F(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{2^{n+1}}$$

on en déduit que

$$\forall\, t \in]-2, 2[, \quad G(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n t^{n-1}}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} \cdot t^n$$

et par unicité du développement en série entière (le rayon de convergence étant strictement positif), on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(Z = n) = \frac{n+1}{2^{n+2}}.$$

7. D'après **[1.]**, la matrice A est diagonalisable si, et seulement si, la variable aléatoire $Z = X^2 + Y$ est strictement supérieure à 4. On cherche donc

$$\mathbf{P}(Z > 4) = 1 - \mathbf{P}(Z \leqslant 4) = 1 - \sum_{k=0}^{4} \mathbf{P}(Z = k).$$

D'après la question précédente,

$$\mathbf{P}(Z = 0) = \frac{1}{4} = \frac{16}{64} \qquad \mathbf{P}(Z = 1) = \frac{2}{8} = \frac{16}{64}$$
$$\mathbf{P}(Z = 2) = \frac{3}{16} = \frac{12}{64} \qquad \mathbf{P}(Z = 3) = \frac{4}{32} = \frac{8}{64}$$
$$\mathbf{P}(Z = 4) = \frac{5}{64}$$

donc la probabilité pour que la matrice A soit diagonalisable est égale à

$$1 - \frac{16 + 16 + 12 + 8 + 5}{64} = \frac{7}{64}.$$