Problème de Mathématiques

Référence pp1613 — Version du 31 décembre 2025

À l'entrée d'une salle de spectacles, chacun doit déposer ses affaires dans l'un des trois vestiaires disponibles. On note N, le nombre de spectateurs.

1. Proposer un modèle probabiliste décrivant, pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant 3$, le nombre N_k de spectateurs choisissant de déposer leurs affaires dans le vestiaire V_k.

On pourra commencer par introduire une famille $(C_i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$ de variables aléatoires décrivant le vestiaire choisi par chaque spectateur : pour tout $1 \leqslant i \leqslant N$, l'événement $[C_i = k]$ signifie que le i-ème spectateur dépose ses affaires dans le vestiaire V_k.

2. Selon ce modèle, les variables aléatoires N_1, N_2 et N_3 suivent-elles la même loi ? Sont-elles indépendantes ?

3. La capacité de chacun des trois vestiaires est notée N_0 : chaque vestiaire peut recevoir les affaires de N_0 spectateurs. On suppose que $3N_0 > N$.

3. a. Exprimer en fonctions de variables aléatoires N_1 et N_2 le fait qu'aucun des trois vestiaires ne soit saturé.

3. b. Par quelle(s) inégalité(s) traduire que la probabilité qu'au moins un des trois vestiaires soit saturé soit inférieure à 1 % ?

Solution ❀ Un problème de vestiaire

1. On suppose que chaque spectateur choisit *au hasard* l'un des trois vestiaires et comme ce choix est effectué avant de savoir s'il reste encore de la place dans les vestiaires, on peut supposer que les choix des différents spectateurs sont indépendants.

On modélise donc la situation par une famille de variables aléatoires indépendantes $(C_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$, qui suivent toutes la loi uniforme sur $E = \{1, 2, 3\}$.

Pour tout $k \in E$, les variables aléatoires

$$\mathbb{1}_{[C_i=k]} \qquad (1 \leqslant i \leqslant N)$$

suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre $1/3$ et sont indépendantes puisque les variables aléatoires C_i sont indépendantes.

Le nombre de spectateurs qui choisissent le vestiaire V_k est donc représenté par la variable aléatoire

$$N_k = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{[C_i=k]}.$$

2. Les variables N_k suivent toutes la loi binomiale $\mathcal{B}(N, 1/3)$ en tant que sommes de N variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre $1/3$.

Comme $N_1(\omega) + N_2(\omega) + N_3(\omega) = N$ pour tout $\omega \in \Omega$, il est clair que les événements $[N_1 = 0]$, $[N_2 = 0]$ et $[N_3 = 0]$ sont incompatibles :

$$[N_1 = 0] \cap [N_2 = 0] \cap [N_3 = 0] = \varnothing.$$

Cependant, pour tout $1 \leqslant k \leqslant 3$,

$$\mathbf{P}(N_k = 0) = (2/3)^N > 0$$

donc les variables aléatoires N_1, N_2, N_3 ne sont pas indépendantes :

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{3} [N_k = 0]\Big) \neq \prod_{k=1}^{3} \mathbf{P}(N_k = 0).$$

> *On a aussi*
>
> $$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant 3, \quad \mathbf{P}(N_k = N) = (1/3)^N$$
>
> *donc* $\mathbf{P}(N_1 = N, N_2 = N) = 0 \neq \mathbf{P}(N_1 = N)\,\mathbf{P}(N_2 = N)$, *ce qui prouve que les variables* N_1 *et* N_2 *ne sont pas non plus indépendantes. (En tant que sous-famille d'une famille de variables non indépendantes, elle pourrait être indépendante : ce n'est pas le cas !)*

3. L'hypothèse $3N_0 > N$ signifie que la capacité totale des trois vestiaires $3N_0$ dépasse le nombre total de spectateurs N !

3. a. Le vestiaire V_k n'est pas saturé tant que le nombre N_k de spectateurs qui choisissent ce vestiaire est majoré par la capacité du vestiaire : $[N_k \leqslant N_0]$.

De plus, on sait que $N_1 + N_2 + N_3 = N$, donc

$$[N_3 \leqslant N_0] = [N_1 + N_2 \geqslant N - N_0].$$

Donc le fait qu'aucun des vestiaires ne soit saturé se traduit par l'événement :

$$A = [N_1 \leqslant N_0] \cap [N_2 \leqslant N_0] \cap [N_1 + N_2 \geqslant N - N_0].$$

3. b. On souhaite que la probabilité qu'aucun vestiaire ne soit saturé soit supérieure à 99% :

$$\mathbf{P}\big([N_1 \leqslant N_0] \cap [N_2 \leqslant N_0] \cap [N_1 + N_2 \geqslant N - N_0]\big) \geqslant 0,99.$$

Cette probabilité est égale à

$$\sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant N_0 \\ i+j\geqslant N-N_0}} \mathbf{P}(N_1 = i, N_2 = j).$$

Comme $N_1 + N_2 + N_3 = N$, on doit remarquer que

$$[N_1 = i, N_2 = j] = [N_1 = i, N_2 = j, N_3 = r]$$

où on a posé $r = N - (i+j)$. Notons donc $\mathfrak{P}_i(N)$, l'ensemble des parties de $\{1, \dots, N\}$ constituées de i éléments. Par définition du coefficient binomial, le cardinal de $\mathfrak{P}_i(N)$ est égal à $\binom{N}{i}$.

Un élément $\omega \in \Omega$ appartient à l'événement

$$[N_1 = i, N_2 = j, N_3 = r]$$

si, et seulement si, il existe trois parties

$$\begin{cases} k = (k_1, \dots, k_i) & \in \mathfrak{P}_i(N), \\ \ell = (\ell_1, \dots, \ell_j) & \in \mathfrak{P}_j(N), \\ m = (m_1, \dots, m_r) & \in \mathfrak{P}_r(N) \end{cases}$$

deux à deux disjointes de $\{1, \dots, N\}$ telles que

$$\begin{cases} \omega \in A_k = [C_{k_1} = \cdots = C_{k_i} = 1] \in \mathcal{A}, \\ \omega \in A_\ell = [C_{\ell_1} = \cdots = C_{\ell_j} = 2] \in \mathcal{A}, \\ \omega \in A_m = [C_{m_1} = \cdots = C_{m_r} = 3] \in \mathcal{A}. \end{cases}$$

Il est clair que les événements $A_k \cap A_\ell \cap A_m$ sont deux à deux disjoints lorsque le triplet (k, ℓ, m) varie. Donc

$$\mathbf{P}(N_1 = i, N_2 = j) = \sum_{\substack{k \in \mathfrak{P}_i(N) \\ \ell \in \mathfrak{P}_j(N) \\ m \in \mathfrak{P}_r(N)}} \mathbf{P}(A_k \cap A_\ell \cap A_m).$$

(Si k, ℓ et m ne sont pas deux à deux disjointes, l'événement $A_k \cap A_\ell \cap A_m$ est impossible — l'une des C_i prend deux valeurs différentes en même temps — et sa probabilité est donc nulle.)

Comme les variables C_i sont indépendantes et de loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$,

$$\mathbf{P}(A_k \cap A_\ell \cap A_m) = (1/3)^N$$

quelles que soient les parties k, ℓ et m.

Comptons le nombre de triplets (k, ℓ, m) convenables : il y a $\binom{N}{i}$ choix pour k et $\binom{N}{j}$ choix pour ℓ (on n'a alors plus le choix pour m : on prend tous les indices qui restent). Par conséquent,

$$\mathbf{P}(N_1 = i, N_2 = j) = \binom{N}{i}\binom{N}{j}(1/3)^N$$

pour tout couple (i, j) tel que $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$ et $i + j \leqslant N$.

> *L'application numérique est difficile. Un logiciel de calcul formel peut effectuer les calculs exacts, mais il faut manipuler des entiers de plusieurs centaines de décimales…*