Problème de Mathématiques

Référence pp1619 — Version du 31 décembre 2025

Contexte

Un horticulteur doit greffer un nombre $R \geqslant 1$ de rosiers.

Une semaine après chaque greffe, on peut savoir si la greffe a pris. Si la greffe n'a pas pris, on recommence l'opération jusqu'à ce qu'elle prenne effectivement.

Notations

Pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant R$, on note X_k, le nombre de tentatives nécessaires pour que la greffe du rosier k prenne. On note X, le nombre de tentatives pour que toutes les greffes prennent.

On note S, le nombre de semaines nécessaires pour que toutes les greffes prennent.

On pose $Y_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Y_n, le nombre de rosiers dont la greffe a pris au cours des n premières semaines et on pose $Z_n = Y_{n+1} - Y_n$.

Rappel théorique

Pour toute loi de probabilité $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{N}$ et pour tout ensemble dénombrable I, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et une famille $(U_i)_{i\in I}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$, qui sont indépendantes et telles que

$$\forall\, i \in I,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X_i = n) = p_n.$$

Travail à effectuer

Proposer un modèle probabiliste simple (c'est-à-dire une famille de variables aléatoires $(U_i)_{i\in I}$ dont la loi sera décrite avec précision) pour lequel X, S, les X_k, les Y_n et les Z_n sont des variables aléatoires.

Pour chacune de ces variables aléatoires, on énoncera le théorème qui permet de déduire sa loi du modèle ou on indiquera précisément (mais sans entrer dans le détail des calculs) une méthode permettant de calculer sa loi.

Solution ❀ Modèle de greffe de rosiers

L'ensemble $I = \{1, \dots, R\} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable (produit cartésien d'un ensemble fini par un ensemble dénombrable). D'après le théorème de Kolmogorov, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et une famille $(U_i)_{i \in I}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$, indépendantes et qui suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre $0 < p < 1$:

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant R,\ \forall\, n \geqslant 1, \quad \begin{cases} \mathbf{P}(U_{k,n} = 1) = p \\ \mathbf{P}(U_{k,n} = 0) = q \end{cases}$$

avec $q = 1 - p$ comme de coutume.

L'événement $[U_{k,n} = 1]$ signifie que la n-ième tentative de greffe du k-ième rosier a pris.

❧ On pose, *par convention,*

$$[X_k = 0] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [U_{k,n} = 0] \in \mathcal{A}$$

pour envisager le cas d'une greffe qui ne prendrait jamais. On peut vérifier que cet événement est négligeable (par continuité décroissante).

On envisage maintenant le cas d'une greffe qui prend du premier coup :

$$[X_k = 1] = [U_{k,1} = 1] \in \mathcal{A}$$

et plus généralement d'une greffe qui finit par prendre : pour tout $n \geqslant 2$,

$$[X_k = n] = [U_{k,1} = \cdots = U_{k,n-1} = 0, U_{k,n} = 1] \in \mathcal{A}.$$

On en déduit que les X_k sont bien des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A})$ qui suivent toutes la loi géométrique de paramètre p et, par coalition, ces variables sont indépendantes.

❧ Par définition,

$$X = X_1 + \cdots + X_R.$$

Cette fonction X est une variable aléatoire discrète en tant que somme d'un nombre fini de variables aléatoires discrètes. Comme ces variables sont indépendantes et de même loi, on peut calculer facilement la fonction génératrice de X :

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \mathbf{E}(t^X) = \left[\mathbf{E}(e^{tX_1})\right]^R$$

et en déduire la loi de X.

❧ Dire que toutes les greffes ont prises en moins de n semaines signifie que le nombre de greffes nécessaires pour chaque rosier est inférieur à n, soit

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad [S \leqslant n] = [X_1 \leqslant n, \dots, X_R \leqslant n] \in \mathcal{A}.$$

On en déduit que

$$[S = 1] = [X_1 = 1, \dots, X_R = 1] \in \mathcal{A}$$

et que, pour tout $n \geqslant 2$,

$$[S = n] = [S \leqslant n] \cap [S \leqslant n-1]^c \in \mathcal{A}.$$

Pour que la fonction $S : \Omega \to \mathbb{N}$ soit bien définie, il reste à envisager le cas où aucune greffe ne prend jamais, soit

$$[S = 0] = [X_1 = \cdots = X_R = 0] \in \mathcal{A},$$

événement négligeable (puisque chaque X_k est presque sûrement supérieure à 1).

Cela prouve que la fonction

$$S = \max\{X_1, \dots, X_R\}$$

est bien une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et qu'on peut calculer sa loi (puisqu'on sait que les X_k sont indépendantes et que leurs lois sont connues).

❧ Comme les X_k sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi, les événements

$$\big([1 \leqslant X_k \leqslant n]\big)_{1 \leqslant k \leqslant R}$$

sont indépendants et de même probabilité, de même que les événements

$$\big([X_k = n]\big)_{1 \leqslant k \leqslant R}.$$

On en déduit que les fonctions définies par

$$Y_n = \sum_{k=1}^{R} \mathbb{1}_{[1 \leqslant X_k \leqslant n]} \quad \text{et par} \quad Z_n = \sum_{k=1}^{R} \mathbb{1}_{[X_k = n]}$$

sont des variables aléatoires qui suivent des lois binomiales (en tant que somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et de même paramètre).

En particulier, puisque

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant R,\ \forall\, n \geqslant 1, \quad \mathbf{P}(1 \leqslant X_k \leqslant n) = 1 - q^n$$

la variable Y_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(R, 1 - q^n)$ et on en déduit que

$$\mathbf{P}(Y_n = k) = \binom{R}{k}(1 - q^n)^k q^{n(R-k)},$$

ce qui montre que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(Y_n = k) = \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si } 0 \leqslant k < R, \\ 1 & \text{si } k = R. \end{array} \right.$$