Problème de Mathématiques

Référence pp1515 — Version du 31 décembre 2025

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs entières, indépendantes et telles que

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant 9,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X_n = k) = \frac{1}{10}.$$

Ces variables aléatoires permettent de définir un nombre

$$S(\omega) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{X_k(\omega)}{10^k}$$

pris au hasard entre 0 et 1.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit $Y_k : \Omega \to \{0, 1\}$ en posant

$$Y_k(\omega) = \left| \begin{array}{l} 1 \text{ si } X_k(\omega) = 1, \\ 0 \text{ si } X_k(\omega) \neq 1. \end{array} \right.$$

On pose alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k \quad \text{et} \quad S_n^* = \frac{S_n}{n}.$$

1. Démontrer que $0 \leqslant S(\omega) \leqslant 1$ pour tout $\omega \in \Omega$. à quelle condition a-t-on $S(\omega) = 0$? $S(\omega) = 1$? En déduire que

$$\mathbf{P}(0 < S < 1) = 1.$$

2. Montrer que S_n^* est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

3. a. Calculer l'espérance et la variance des Y_k.

3. b. Calculer la variance de S_n^*.

3. c. Déduire de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que la probabilité

$$\mathbf{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{10}\Big| \geqslant \varepsilon\Big)$$

tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie A. Fréquence de la décimale 1

4. Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$, une suite d'événements. On pose

$$A = \bigcap_{N\geqslant 1} \bigcup_{k=N}^{+\infty} A_k \quad \text{et} \quad \forall\, N \geqslant 1, \quad B_N = \bigcup_{k=N}^{+\infty} A_k.$$

4. a. Démontrer que $A \in \mathcal{A}$. Comment interpréter cet événement ?

4. b. Démontrer que $B_{N+1} \subset B_N$ pour tout $N \geqslant 1$.

4. c. En déduire que $\mathbf{P}(B_N)$ tend vers $\mathbf{P}(A)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

4. d. On suppose que la série $\sum \mathbf{P}(A_k)$ est convergente. Démontrer que $\mathbf{P}(A) = 0$.

5. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$Z_k = Y_k - \frac{1}{10}.$$

5. a. Démontrer que les variables aléatoires Z_k, $k \in \mathbb{N}^*$, sont indépendantes, centrées et que $|Z_k(\omega)| \leqslant 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $\omega \in \Omega$.

5. b. Démontrer que $\mathbf{V}(Z_k) \leqslant 1$ et en déduire par récurrence que

$$\mathbf{E}\Big[\Big(\sum_{k=1}^{n} Z_k\Big)^4\Big] \leqslant n + 3n(n-1).$$

5. c. En déduire que

$$\mathbf{E}\Big[\Big(\frac{S_n}{n}-\frac{1}{10}\Big)^4\Big] \leqslant \frac{3}{n^2}.$$

6. Pour tout $k \geqslant 1$, on pose

$$A_k = \Big[\Big(\frac{S_k}{k}-\frac{1}{10}\Big)^4 > \frac{1}{\sqrt{k}}\Big]$$

et on note A, l'ensemble des $\omega \in \Omega$ qui appartiennent à A_k pour une infinité d'indices k.

6. a. Vérifier que $A_k \in \mathcal{A}$ et démontrer que

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad \mathbf{P}(A_k) \leqslant \frac{3}{k\sqrt{k}}.$$

6. b. Démontrer que $\mathbf{P}(A) = 0$.

6. c. En déduire qu'il existe un événement $\Omega_0 \in \mathcal{A}$ de probabilité 1 tel que

$$\forall\, \omega \in \Omega_0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, k \geqslant N, \quad \Big|\frac{S_k(\omega)}{k}-\frac{1}{10}\Big| \leqslant \frac{1}{\sqrt[8]{k}}.$$

6. d. Conclure.

Partie B. Retour sur le modèle

7. a. Soit $0 < x < 1$, un nombre *décimal* (c'est-à-dire qui n'a qu'un nombre fini de décimales non nulles). Démontrer que $[S \leqslant x] \in \mathcal{A}$ et calculer la probabilité de cet événement.

7. b. On a dit plus haut que le nombre $S(\omega)$ était pris *au hasard* entre 0 et 1. Comment interpréter cette affirmation ?

Solution ❀ Nombres normaux

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $\omega \in \Omega$, on a $0 \leqslant X_k(\omega) \leqslant 9$, donc

$$\frac{X_k(\omega)}{10^k} = \mathcal{O}[(1/10)^k],$$

ce qui prouve la convergence de la série et l'existence de $S(\omega)$. En sommant les encadrements, on obtient

$$0 \leqslant S(\omega) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10}\frac{1}{1 - 1/10} = 1.$$

❧ En tant que somme de réels *positifs*, le réel $S(\omega)$ est nul si, et seulement si, tous les $X_k(\omega)$ sont nuls :

$$[S = 0] = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} [X_k = 0] \in \mathcal{A}$$

puisque les X_k sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et que $\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$[S = 0] \subset \bigcap_{k=1}^{n} [X_k = 0]$$

et comme les variables X_k sont indépendantes,

$$0 \leqslant \mathbf{P}(S = 0) \leqslant \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X_k = 0) = 10^{-n},$$

donc $\mathbf{P}(S = 0) = 0$.

❧ De même,

$$1 - S(\omega) = \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{9 - X_k(\omega)}{10^k}}_{\geqslant 0}$$

est nul si, et seulement si, $X_k(\omega) = 9$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc

$$[S = 1] = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} [X_k = 9] \in \mathcal{A}$$

et $\mathbf{P}(S = 1) = 0$.

❧ Finalement,

$$[0 < S < 1] = ([S = 0] \cup [S = 1])^c \in \mathcal{A}$$

(puisque $\mathcal{A}$ est stable par union et par passage au complémentaire) et

$$\mathbf{P}(0 < S < 1) = 1 - \mathbf{P}([S = 0] \cup [S = 1]) = 1$$

puisque l'union de deux événements négligeables est négligeable.

2. Puisque Y_k est une fonction de la variable aléatoire discrète X_k, alors Y_k est une variable aléatoire (discrète), donc S_n^* est une variable aléatoire en tant que combinaison linéaire de variables aléatoires.

3. a. La variable aléatoire Y_k suit la loi de Bernoulli de paramètre

$$\mathbf{P}(X_k = 1) = \frac{1}{10},$$

donc $\mathbf{E}(Y_k) = 1/10$ et $\mathbf{V}(Y_k) = 9/100$.

3. b. Comme les variables aléatoires discrètes $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors les variables $Y_1 = f(X_1), \dots, Y_n = f(X_n)$ sont indépendantes (peu importe la fonction f) et par conséquent

$$\mathbf{V}(S_n^*) = \frac{1}{n^2}\mathbf{V}(Y_1 + \dots + Y_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(Y_k) = \frac{9}{100n}.$$

3. c. Comme S_n^* est une combinaison linéaire de variables d'espérance finie,

$$\mathbf{E}(S_n^*) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(Y_k) = \frac{1}{10}$$

donc
$$\left[\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{10}\right| \geqslant \varepsilon\right] = \left[\left|S_n^* - \mathbf{E}(S_n^*)\right| \geqslant \varepsilon\right]$$
et d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,
$$\mathbf{P}\big(\left|S_n^* - \mathbf{E}(S_n^*)\right| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\mathbf{V}(S_n^*)}{\varepsilon^2} = \frac{9}{100\varepsilon^2 n},$$
cqfd.

Partie A. Fréquence de la décimale 1

4. a. Comme la tribu $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable, alors $B_N \in \mathcal{A}$ pour tout $N \geqslant 1$ et comme $\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable, alors $A \in \mathcal{A}$.

❧ Les opérations booléennes qui définissent A peuvent être traduites par
$$\omega \in A \iff \forall\, N \geqslant 1,\ \exists\, k \geqslant N, \quad \omega \in A_k$$
ce qui signifie que $\omega \in A$ si, et seulement si, il existe une infinité d'indices $k \geqslant 1$ tels que $\omega \in A_k$.

4. b. Par définition,
$$B_N = A_N \cup \Big(\bigcup_{k=N+1}^{+\infty} A_k\Big) = A_N \cup B_{N+1}$$
donc $B_{N+1} \subset B_N$.

4. c. Par continuité monotone, $\mathbf{P}(A)$ est la limite de la suite (décroissante) de terme général $\mathbf{P}(B_N)$.

4. d. Par σ-additivité,
$$\forall\, N \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \mathbf{P}(B_N) \leqslant \sum_{k=N}^{+\infty} \mathbf{P}(B_k)$$
et le majorant tend vers 0 en tant que reste d'une série convergente. Par conséquent,
$$\mathbf{P}(A) = \lim_{N\to+\infty} \mathbf{P}(B_N) = 0.$$

5. a. Les Y_k, $k \in \mathbb{N}^*$, sont des variables aléatoires discrètes indépendantes et il existe une fonction f telle que $Z_k = f(Y_k)$, donc les Z_k, $k \in \mathbb{N}^*$, sont indépendantes.

On a vu au **[3.a.]** que Y_k est une variable d'espérance finie et que $\mathbf{E}(Y_k) = 1/10$, donc $Z_k = Y_k - \mathbf{E}(Y_k)$ est une variable centrée.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $\omega \in \Omega$, on a $0 \leqslant Y_k(\omega) \leqslant 1$, donc $-1/10 \leqslant Z_k(\omega) \leqslant 9/10$, donc $|Z_k(\omega)| \leqslant 1$.

5. b. Comme $Z_k = Y_k - \mathbf{E}(Y_k)$, alors
$$\mathbf{V}(Z_k) = \mathbf{V}(Y_k) = \frac{9}{100} \leqslant 1$$
par **[3.a.]**

❧ D'après la question précédente, $Z_1^4(\omega) \leqslant 1$, donc $\mathbf{E}(Z_1^4) \leqslant 1$: l'inégalité est démontrée pour $n = 1$.

❧ Supposons qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que
$$\mathbf{E}\Big[\Big(\sum_{k=1}^{n} Z_k\Big)^4\Big] \leqslant n + 3n(n-1).$$
Comme les Z_k sont indépendantes, alors les variables
$$W_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k \quad \text{et} \quad Z_{n+1}$$
sont indépendantes (lemme des coalitions). On déduit alors de la formule du binôme et de la linéarité de l'espérance que
$$\begin{aligned}\mathbf{E}[(W_n + Z_{n+1})^4] &= \mathbf{E}(W_n^4) + 4\,\mathbf{E}(W_n^3)\,\mathbf{E}(Z_{n+1}) + 6\,\mathbf{E}(W_n^2)\,\mathbf{E}(Z_{n+1}^2) + 4\,\mathbf{E}(W_n)\,\mathbf{E}(Z_{n+1}^3) + \mathbf{E}(Z_{n+1}^4)\\ &= \mathbf{E}(W_n^4) + 6\,\mathbf{V}(W_n)\,\mathbf{V}(Z_{n+1}) + \mathbf{E}(Z_{n+1}^4)\end{aligned}$$
puisque Z_{n+1} et W_n sont centrées par **[5.a.]** Par indépendance des Z_k,
$$\mathbf{V}(W_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(Z_k) \leqslant n$$

et comme $\mathbf{E}(Z_{n+1}^4) \leqslant 1$, alors on déduit de l'hypothèse de récurrence que

$$\mathbf{E}\Big[\Big(\sum_{k=1}^{n+1} Z_k\Big)^4\Big] \leqslant n + 3n(n-1) + 6n + 1 = (n+1) + 3(n+1)n.$$

La majoration est démontrée pour tout $n \geqslant 1$.

5. c. Il est clair que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k = S_n^* - \frac{1}{10}.$$

D'après la question précédente,

$$\mathbf{E}\Big[\Big(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{10}\Big)^4\Big] \leqslant \frac{n + 3n(n-1)}{n^4} \leqslant \frac{3}{n^2}.$$

6. a. Si Y est une variable aléatoire à valeurs réelles sur $(\Omega, \mathcal{A})$, alors

$$\big[Y \in]1/\sqrt{k}, +\infty[\big] \in \mathcal{A}.$$

Or, en tant que fonction de la variable aléatoire discrète S_k, l'application

$$\Big(\frac{S_k}{k} - \frac{1}{10}\Big)^4$$

est une variable aléatoire (*positive*) sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et par conséquent $A_k \in \mathcal{A}$.

❧ Par l'inégalité de Markov, si Y est une variable aléatoire positive d'espérance finie, alors

$$\mathbf{P}\Big(Y > \frac{1}{\sqrt{k}}\Big) \leqslant \sqrt{k}\,\mathbf{E}(Y).$$

On déduit alors de **[5.c.]** que

$$\mathbf{P}(A_k) \leqslant \sqrt{k}\,\mathbf{E}\Big[\Big(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{10}\Big)^4\Big] \leqslant \frac{3\sqrt{k}}{k^2}.$$

6. b. Comme au **[4.a.]**, on a

$$A = \bigcap_{N \geqslant 1} \bigcup_{k \geqslant N} A_k.$$

Or la série $\sum \mathbf{P}(A_k)$ converge par comparaison (**[6.a.]**), donc $\mathbf{P}(A) = 0$ par **[4.d.]**

6. c. Prenons $\Omega_0 = A^c$: c'est bien un événement presque sûr et, par définition de A, pour tout $\omega \in \Omega_0$, il existe un rang $N(\omega) \geqslant 1$ tel que

$$\forall\, k \geqslant N(\omega), \quad \omega \notin A_k,$$

c'est-à-dire

$$\Big(\frac{S_k(\omega)}{k} - \frac{1}{10}\Big)^4 \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}$$

et donc

$$\Big|\frac{S_k(\omega)}{k} - \frac{1}{10}\Big| \leqslant \frac{1}{\sqrt[8]{k}}.$$

6. d. Cet encadrement démontre que $S_k(\omega)/k$ converge vers $1/10$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Autrement dit : la proportion de décimales égales à 1 dans l'écriture de X en base 10 est presque sûrement égale à $1/10$.

Partie B. Retour sur le modèle

7. a. Comme x est décimal, il existe des entiers $x_1, \dots, x_d$ tels que

$$x = \sum_{k=1}^{d} \frac{x_k}{10^k}$$

avec $1 \leqslant x_d \leqslant 9$ (c'est-à-dire $x_d \neq 0$). Le nombre $S(\omega)$ est inférieur à x si, et seulement si,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{X_k(\omega)}{10^k} \leqslant \sum_{k=1}^{d} \frac{x_k}{10^k}$$

c'est-à-dire (on suit l'ordre lexicographique sur les décimales) :

— ou bien $X_1(\omega) < x_1$;
— ou bien $X_1(\omega) = x_1$ et $X_2(\omega) < x_2$;
— ...
— ou bien $X_1(\omega) = x_1, X_2(\omega) = x_2, \dots, X_{d-1}(\omega) = x_{d-1}$ et $X_d(\omega) < x_d$;
— ou bien $X_1(\omega) = x_1, X_2(\omega) = x_2, \dots, X_d(\omega) = x_d$ et $X_k(\omega) = 0$ pour tout $k > d$.

On en déduit que

$$\begin{aligned}[S \leqslant x] &= [X_1 < x_1] \cup [X_1 = x_1, X_2 < x_2] \cup \dots \cup [X_1 = x_1, \dots, X_{d-1} = x_{d-1}, X_d < x_d] \\ &\quad \cup \Big[[X_1 = x_1, \dots, X_d = x_d] \cap \bigcap_{k=d+1}^{+\infty} [X_k = 0] \Big] \\ &\in \mathcal{A}\end{aligned}$$

puisque $\mathcal{A}$ est stable par union et par intersection dénombrable et que les X_k sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

> *Le fait que* $[S \leqslant x] \in \mathcal{A}$ *pour tout nombre décimal* x *suffit pour démontrer que* S *est une variable aléatoire réelle* (non *discrète).*

❧ Les événements qui apparaissent dans la décomposition de $[S \leqslant x]$ ne sont pas deux à deux incompatibles : la notion de *développement décimal propre* intervient ici.

En s'inspirant de **[1.]**, si $x_2 \geqslant 1$:

$$[X_1 < x_1] \cap [X_1 = x_1, X_2 < x_2] = [X_1 = x_1 - 1] \cap \bigcap_{k \geqslant 2} [X_k = 9]$$

et plus généralement, si $x_{m+1} \geqslant 1$, alors l'intersection de

$$[X_1 = x_1, \dots, X_m = x_m, X_{m+1} < x_{m+1}]$$

et de

$$[X_1 = x_1, \dots, X_m = x_m, X_{m+1} = x_{m+1}, X_{m+2} < x_{m+2}]$$

est l'ensemble des ω tels que $S(\omega)$ soit égal à

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{x_k}{10^k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{x_k}{10^k} + \frac{x_{m+1} - 1}{10^{m+1}} + \underbrace{\sum_{k=m+2}^{+\infty} \frac{9}{10^k}}_{=10^{-(m+1)}}.$$

D'après **[1.]**, la probabilité de ces événements est nulle. Par conséquent, on peut faire comme si on avait une décomposition de $[S \leqslant x]$ en union d'événements deux à deux incompatibles. Par indépendance des variables X_k,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S \leqslant x) &= \mathbf{P}(X_1 < x_1) + \mathbf{P}(X_1 = x_1)\,\mathbf{P}(X_2 < x_2) + \dots + \mathbf{P}(X_1 = x_2) \cdots \mathbf{P}(X_d < x_d) + 0 \\ &= \frac{x_1}{10} + \frac{1}{10}\frac{x_2}{10} + \dots + \frac{1}{10^{d-1}}\frac{x_d}{10} = x.\end{aligned}$$

7. b. Rappelons l'enjeu de la question : savoir que des nombres sont pris *au hasard* ne signifie aucunement que les valeurs de ces nombres sont réparties n'importe comment !

Notons $\mathbb{D}$, l'ensemble des nombres décimaux compris entre 0 et 1. Pour tout $x \in [0, 1]$, par densité de $\mathbb{D}$ dans $[0, 1]$,

$$[S < x] = \bigcup_{\substack{d < x \\ d \in \mathbb{D}}} [S \leqslant d] \quad \text{et} \quad [S \leqslant x] = \bigcap_{\substack{d \geqslant x \\ d \in \mathbb{D}}} [S \leqslant d].$$

Par continuité monotone croissante de $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{P}(S < x) = \lim_{d \to x^-} \mathbf{P}(S \leqslant d) = x$$

et par continuité monotone décroissante,

$$\mathbf{P}(S \leqslant x) = \lim_{d \to x^+} \mathbf{P}(S \leqslant d) = x.$$

Comme $[S < a] \sqcup [a \leqslant S \leqslant b] = [S \leqslant b]$, alors

$$\mathbf{P}(a \leqslant S \leqslant b) = \mathbf{P}(S \leqslant b) - \mathbf{P}(S < a) = b - a$$

ce qui signifie que les valeurs de S sont *uniformément* réparties sur $[0, 1]$.