Problème de Mathématiques

Référence pp1514 — Version du 31 décembre 2025

Une urne contient 4 boules numérotées. On effectue une succession de tirages avec remise. Ces tirages sont modélisés par une suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$: on suppose que ces variables sont indépendantes et que

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, j \in \{1,2,3,4\},\quad \mathbf{P}(T_n = j) = \frac{1}{4}.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note X_n, le nombre de numéros distincts apparus lors des n premiers tirages :

$$\forall\, \omega \in \Omega,\quad X_n(\omega) = \#\big\{T_k(\omega),\ 1 \leqslant k \leqslant n\big\}.$$

On pose enfin

$$M = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_n = 1) \\ \mathbf{P}(X_n = 2) \\ \mathbf{P}(X_n = 3) \\ \mathbf{P}(X_n = 4) \end{pmatrix}$$

pour tout $n \geqslant 1$.

1. Que dire de X_1 ? En déduire U_1.

2. On note $E = \{1,2,3,4\}$ et, pour $1 \leqslant k \leqslant 4$, on note E_k, l'ensemble des parties de E constituées de k éléments. En particulier, $E_1 = \big\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\big\}$ et $E_4 = \{E\}$.

2. a. Soit $B \in E_k$. Calculer $\mathbf{P}(T_j \in B)$ en fonction de k.

2. b. Soit $A \subset E$. Exprimer

$$V_n(A) = \big[\{T_1, \dots, T_n\} = A\big]$$

en fonction des événements $[T_1 \in B] \cap \dots \cap [T_n \in B]$ où B désigne une partie de E.

☞ *On pourra commencer par exprimer* $V_n(A)$ *en fonction de* $\big[\{T_1, \dots, T_n\} \subset A\big]$ *et de* $\big[\{T_1, \dots, T_n\} \subsetneq A\big]$.

2. c. En déduire que $V_n(A) \in \mathcal{A}$ pour tout $A \subset E$.

2. d. En exprimant $[X_n = k]$ à l'aide des $V_n(A)$, démontrer que X_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

3. Déduire de la formule des probabilités totales que

$$\forall\, n \geqslant 1,\quad U_{n+1} = MU_n.$$

En déduire l'expression de U_n en fonction de M et de U_1.

4. Démontrer *sans calcul* que la matrice M est diagonalisable.

5. On pose

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},\ V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ V_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. a. Démontrer que

$$U_n = \frac{1}{4^{n-1}} V_1 + \frac{3}{2^{n-1}} V_2 + \frac{3^n}{4^{n-1}} V_3 + V_4$$

pour tout $n \geqslant 1$.

5. b. Démontrer que la suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ converge : on dit que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ **converge en loi**.

5. c. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, la suite de terme général

$$\mathbf{P}\big(|X_n - 4| > \varepsilon\big)$$

tend vers 0. On dit que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ **converge en probabilité**.

5. d. Démontrer que la suite de terme général

$$\mathbf{E}\big(|X_n - 4|\big)$$

converge : la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ **converge en moyenne**.

Solution ❀ Tirages avec remise

1. Il est clair que $X_1(\omega) = 1$ pour tout $\omega \in \Omega$, donc

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. a. Comme $T_j : \Omega \to E$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et que $B \subset E$, alors $[T_j \in B]$ est un événement :

$$\forall\, B \subset E, \qquad [T_j \in B] \in \mathcal{A}$$

donc $\mathbf{P}(T_j \in B)$ est bien définie.

Comme $B \in E_k$, alors $\#(B) = k$. Les événements $[T_j = x]$, $1 \leqslant x \leqslant 4$, constituent un système complet, donc

$$\mathbf{P}(T_j \in B) = \sum_{x \in B} \mathbf{P}(T_j = x) = \frac{\#(B)}{4} = \frac{k}{4}.$$

2. b. Soit $A \subset E$. L'ensemble $\{T_1(\omega), \dots, T_n(\omega)\}$ des valeurs apparues lors des n premiers tirages est égal à A si, et seulement si, il est contenu dans A mais n'est pas une partie stricte de A. Autrement dit :

$$V_n(A) = \big[\{T_1, \dots, T_n\} \subset A\big] \cap \big[\{T_1, \dots, T_n\} \subsetneq A\big]^c.$$

L'ensemble des valeurs apparues lors des n premiers tirages est contenue dans A si, et seulement si, chacune des valeurs apparues appartient à A :

$$\big[\{T_1, \dots, T_n\} \subset A\big] = [T_1 \in A] \cap \dots \cap [T_n \in A].$$

L'ensemble des valeurs apparues lors des n premiers tirages est une partie stricte de A si, et seulement si, il existe une partie $B \subsetneq A$ qui contient chacune de ces valeurs :

$$\big[\{T_1, \dots, T_n\} \subsetneq A\big] = \bigcup_{B \subsetneq A} [T_1 \in B] \cap \dots \cap [T_n \in B].$$

2. c. La tribu $\mathcal{A}$ est stable par intersection, par union et par passage au complémentaire, donc $V_n(A) \in \mathcal{A}$ pour tout $A \subset E$.

2. d. Par définition, X_n est une application de Ω dans $\{1, 2, 3, 4\}$, donc X_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ si, et seulement si,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant 4, \quad [X_n = k] \in \mathcal{A}.$$

Le nombre $X_n(\omega)$ de valeurs apparues lors des n premiers tirages est égale à k si, et seulement si, l'ensemble des valeurs apparues est une partie à k éléments de E :

$$X_n(\omega) = k \iff \big\{T_1(\omega), \dots, T_n(\omega)\big\} \in E_k$$

autrement dit

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant 4, \quad [X_n = k] = \bigsqcup_{A \in E_k} V_n(A).$$

Comme $V_n(A) \in \mathcal{A}$, que E_k est fini et que $\mathcal{A}$ est stable par union, on en déduit que X_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

3. Soient $\omega \in \Omega$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Lors du $(n+1)$-ième tirage,

— ou bien apparaît une valeur déjà tirée :

$$T_{n+1}(\omega) \in \big\{T_1(\omega), \dots, T_n(\omega)\big\}$$

et dans ce cas, le nombre de valeurs tirées reste le même :

$$X_{n+1}(\omega) = X_n(\omega)$$

— ou bien apparaît une nouvelle valeur :

$$T_{n+1}(\omega) \notin \big\{T_1(\omega), \dots, T_n(\omega)\big\}$$

et dans ce cas, le nombre de valeurs tirées augmente :

$$X_{n+1}(\omega) = X_n(\omega) + 1.$$

❧ Les événements $[X_n = j] \cap [X_{n+1} = k]$ pour lesquels $k \neq j$ et $k \neq j+1$ sont donc *impossibles*.
❧ Comme X_n est une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, 2, 3, 4\}$, les événements $[X_n = j]$, $1 \leqslant j \leqslant 4$, forment un système complet, donc

$$[X_{n+1} = k] = \bigsqcup_{j=1}^{4} [X_{n+1} = k] \cap [X_n = j].$$

D'après la discussion précédente,

$$[X_{n+1} = 1] = [X_{n+1} = 1] \cap [X_n = 1]$$

et, pour $2 \leqslant k \leqslant 4$,

$$[X_{n+1} = k] = [X_{n+1} = k, X_n = k] \sqcup [X_{n+1} = k, X_n = k-1].$$

❧ Soit $1 \leqslant j \leqslant 4$. On a $X_{n+1}(\omega) = X_n(\omega) = j$ si, et seulement si, il existe une partie $A \in E_j$ telle que

$$\big\{T_1(\omega), \dots, T_n(\omega)\big\} = A \quad \text{et} \quad T_{n+1}(\omega) \in A.$$

Autrement dit,

$$[X_n = j] \cap [X_{n+1} = j] = \bigsqcup_{A \in E_j} V_n(A) \cap [T_{n+1} \in A].$$

❧ Soit $1 \leqslant j < 4$. On a $X_{n+1}(\omega) = X_n(\omega) + 1 = j+1$ si, et seulement si, il existe une partie $A \in E_j$ telle que

$$\big\{T_1(\omega), \dots, T_n(\omega)\big\} = A \quad \text{et} \quad T_{n+1}(\omega) \notin A.$$

Autrement dit,

$$[X_n = j] \cap [X_{n+1} = j+1] = \bigsqcup_{A \in E_j} V_n(A) \cap [T_{n+1} \in A]^c.$$

❧ L'événement $V_n(A)$ s'exprime à l'aide des variables aléatoires $T_1, \dots, T_n$ et les variables $T_1, \dots, T_n$ et T_{n+1} sont indépendantes, donc les événements $V_n(A)$ et $[T_{n+1} \in A]^c$ sont indépendants (lemme des coalitions). Par σ-additivité et **[2.a.]**,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_n = j, X_{n+1} = j) &= \sum_{A \in E_j} \mathbf{P}(V_n(A))\,\mathbf{P}(T_{n+1} \in A) = \frac{j}{4} \sum_{A \in E_j} \mathbf{P}(V_n(A)) \\
&= \frac{j}{4}\,\mathbf{P}(X_n = j) \\
\mathbf{P}(X_n = j, X_{n+1} = j+1) &= \sum_{A \in E_j} \mathbf{P}(V_n(A))\,\mathbf{P}(T_{n+1} \notin A) = \Big(1 - \frac{j}{4}\Big) \sum_{A \in E_j} \mathbf{P}(V_n(A)) \\
&= \frac{4-j}{4}\,\mathbf{P}(X_n = j).
\end{aligned}$$

❧ On en déduit finalement que (pour $k = 1$)

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{4}\,\mathbf{P}(X_n = 1)$$

et que (pour $2 \leqslant k \leqslant 4$)

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = k) = \frac{5-k}{4}\,\mathbf{P}(X_n = k-1) + \frac{k}{4}\,\mathbf{P}(X_n = k)$$

ce qui se traduit bien par l'égalité matricielle

$$U_{n+1} = MU_n.$$

❧ Une récurrence immédiate permet d'en déduire que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n = M^{n-1}U_1.$$

4. La matrice M est triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. En tant que matrice de $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$ qui admet 4 valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable.

5. a. On vérifie facilement que

$$MV_1 = \frac{1}{4}V_1, \quad MV_2 = \frac{1}{2}V_2, \quad MV_3 = \frac{3}{4}V_3, \quad MV_4 = V_4$$

et que

$$U_1 = V_1 + 3V_2 + 3V_3 + V_4.$$

Par conséquent, d'après **[3.]**,

$$\begin{aligned} U_n &= M^{n-1}V_1 + 3M^{n-1}V_2 + 3M^{n-1}V_3 + M^{n-1}V_4 \\ &= \frac{1}{4^{n-1}}V_1 + \frac{3}{2^{n-1}}V_2 + \frac{3.3^{n-1}}{4^{n-1}}V_3 + V_4. \end{aligned}$$

5. b. Si $|\lambda| < 1$, alors λ^{n-1} tend vers 0, donc la matrice colonne $\lambda^{n-1}V$ tend vers la matrice colonne nulle quelle que soit $V \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Par conséquent, la suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers V_4, ce qui signifie que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la loi de Dirac en 4.

5. c. Comme $X_n(\omega) \in \{1, 2, 3, 4\}$ pour tout $n \geqslant 1$ et tout $\omega \in \Omega$, alors $|X_n - 4| = 4 - X_n$ et donc, quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$\big[|X_n - 4| > \varepsilon\big] = [4 - X_n > 0] = [X_n \neq 4].$$

D'après la question précédente,

$$\mathbf{P}\big(|X_n - 4| > \varepsilon\big) = 1 - \mathbf{P}(X_n = 4) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

5. d. Pour les raisons exposées à la question précédente,

$$\mathbf{E}\big(|X_n - 4|\big) = \mathbf{E}(4 - X_n) = 4 - \mathbf{E}(X_n).$$

Or

$$\mathbf{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{4} k\,\mathbf{P}(X_n = k) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix} U_n$$

et comme U_n tend vers V_4, alors $\mathbf{E}(X_n)$ tend vers

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix} V_4 = 4.$$