Problème de Mathématiques

Référence pp2119 — Version du 31 décembre 2025

Soit X, une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que cette variable aléatoire est bornée : il existe donc un réel M tel que

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad \big|X(\omega)\big| \leqslant M.$$

1. La variable aléatoire X est-elle d'espérance finie ? Admet-elle un moment d'ordre deux ?

2. Dans un premier temps, un entier $n \geqslant 2$ est fixé et on suppose qu'il existe n variables aléatoires discrètes, indépendantes et de même loi, définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, telles que la somme $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ ait même loi que X.

2. a. Démontrer que

$$\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} \Big[X_i > \frac{M}{n}\Big]$$

est un événement, puis qu'il est négligeable.

2. b. En déduire que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad \mathbf{P}\left(X_i > \frac{M}{n}\right) = 0.$$

2. c. Démontrer que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad \mathbf{P}\left(|X_i| \leqslant \frac{M}{n}\right) = 1.$$

2. d. Démontrer que $\mathbf{E}(X_1^2) \leqslant \frac{M^2}{n^2}$ puis que $\mathbf{V}(X) \leqslant \frac{M^2}{n}$.

3. On suppose maintenant que la variable aléatoire X est **indéfiniment divisible** au sens où, pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe des variables aléatoires discrètes $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, de même loi et telles que la somme

$$X_{n,1} + \cdots + X_{n,n}$$

ait même loi que X.

3. a. Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à X.

3. b. En déduire que

$$\mathbf{P}\big(X = \mathbf{E}(X)\big) = 1$$

en considérant les événements $A_n = [|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant 1/n]$.

Que signifie cette propriété ?

Solution ❀ Variables bornées indéfiniment divisibles

1. Une variable aléatoire bornée admet des moments de tout ordre, en particulier d'ordre deux, mais aussi d'ordre un : c'est donc une variable aléatoire d'espérance finie et sa variance est bien définie.
2. a. Comme X_i est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs réelles, alors

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \quad [X_i > \alpha] \in \mathcal{A}.$$

Comme $\mathcal{A}$ est une tribu, elle est stable par intersection finie ou dénombrable, donc

$$B \overset{\text{déf.}}{=} \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} \Big[X_i > \frac{M}{n}\Big] \in \mathcal{A}.$$

❧ Soit $\omega \in B$. On a donc

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad X_i(\omega) > \frac{M}{n}$$

et donc, en sommant ces inégalités,

$$S_n(\omega) = X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega) > M.$$

On a ainsi démontré que

$$B \subset [S_n > M]$$

et donc que

$$0 \leqslant \mathbf{P}(B) \leqslant \mathbf{P}(S_n > M)$$

par croissance de $\mathbf{P}$.
Or S_n et X ont même loi, donc

$$\mathbf{P}(S_n > M) = \mathbf{P}(X > M) = 0$$

puisque

$$[X > M] \subset [|X| \leqslant M]^c = \Omega^c = \varnothing.$$

L'événement B est donc négligeable.

> *On ne peut pas démontrer que* B *est impossible, seulement que* B *est négligeable : on sait en effet que* S_n *et* X *ont même loi, mais rien ne nous assure que les fonctions* S_n *et* X *soient égales. Il se pourrait donc que* S_n *prît des valeurs strictement supérieures à* M *(mais avec une probabilité nulle, bien entendu).*

2. b. Comme les variables aléatoires X_i sont indépendantes et de même loi,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \mathbf{P}\Big(\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} \Big[X_i > \frac{M}{n}\Big]\Big) = \Big[\mathbf{P}\Big(X_k > \frac{M}{n}\Big)\Big]^n$$

et donc, puisque cette probabilité est nulle,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \mathbf{P}\Big(X_k > \frac{M}{n}\Big) = 0.$$

❧ Par passage au complémentaire, on en déduit que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad \mathbf{P}\left(X_i \leqslant \frac{M}{n}\right) = 1.$$

2. c. On raisonne de même sur l'événement

$$C = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} \Big[X_i < \frac{-M}{n}\Big]$$

et on en déduit pareillement que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad \mathbf{P}\left(X_i \geqslant \frac{-M}{n}\right) = 1.$$

Une intersection finie (voire dénombrable) d'événements presque sûrs est encore un événement presque sûr, donc l'événement

$$\Big[X_i \leqslant \frac{M}{n}\Big] \cap \Big[X_i \geqslant \frac{-M}{n}\Big] = \Big[|X_i| \leqslant \frac{M}{n}\Big]$$

est presque sûr (pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$).

2. d. Comme l'application $[x \mapsto x^2]$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$,

$$\Big[|X_1| \leqslant \frac{M}{n}\Big] = \Big[X_1^2 \leqslant \frac{M^2}{n^2}\Big]$$

et d'après la question précédente,

$$\mathbf{P}\Big(X_1^2 \leqslant \frac{M^2}{n^2}\Big) = 1.$$

Les inégalités presque sûres sont conservées par l'espérance, donc

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \mathbf{E}(X_1^2) \leqslant \frac{M^2}{n^2}.$$

❧ Comme X et S_n ont même loi, alors $\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(S_n)$. Comme S_n est la somme de variables aléatoires indépendantes et de même loi,

$$\mathbf{V}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(X_i) = n\,\mathbf{V}(X_1)$$

et d'après Koenig-Huyghens,

$$\mathbf{V}(X_1) = \mathbf{E}(X_1^2) - [\mathbf{E}(X_1)]^2 \leqslant \mathbf{E}(X_1^2).$$

Finalement

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(S_n) = n\,\mathbf{V}(X_1) \leqslant \frac{M^2}{n}.$$

3. a. Comme X admet un moment d'ordre deux,

$$\forall\, \alpha > 0, \quad \mathbf{P}\big(\big|X - \mathbf{E}(X)\big| > \alpha\big) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X)}{\alpha^2}.$$

3. b. Les hypothèses de la question **[2.]** sont ici vérifiées pour tout entier $n \geqslant 2$.

D'après **[2.d.]**,

$$\forall\, n \geqslant 2, \qquad \mathbf{V}(X) \leqslant \frac{M^2}{n}$$

et d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev rappelée à la question précédente,

$$\forall\, \alpha > 0,\ \forall\, n \geqslant 2, \quad \mathbf{P}\big(\big|X - \mathbf{E}(X)\big| > \alpha\big) \leqslant \frac{M^2}{n\alpha^2}.$$

Cette inégalité large étant vérifiée pour tout $n \geqslant 2$, on peut faire tendre n vers $+\infty$ pour obtenir :

$$\forall\, \alpha > 0, \quad \mathbf{P}\big(\big|X - \mathbf{E}(X)\big| > \alpha\big) = 0$$

ce qui prouve que tous les événements A_n sont négligeables.

❧ Une union dénombrable d'événements négligeables est encore un événement négligeable, donc l'événement

$$B = \Big(\bigcup_{n \geqslant 2} A_n\Big)^c = \bigcap_{n \geqslant 2} A_n^c$$

est presque sûr (en tant que complémentaire d'un événement négligeable). Or

$$\begin{aligned}
\omega \in B &\iff \forall\, n \geqslant 2, \quad \omega \notin A_n \\
&\iff \forall\, n \geqslant 2, \quad \big|X(\omega) - \mathbf{E}(X)\big| < \frac{1}{n} \\
&\iff \big|X(\omega) - \mathbf{E}(X)\big| = 0 \\
&\iff X(\omega) = \mathbf{E}(X).
\end{aligned}$$

On a donc bien démontré que la variable aléatoire X était presque sûrement constante :

$$\mathbf{P}\big(X = \mathbf{E}(X)\big) = 1.$$