

1. \Rightarrow Un **espace euclidien** est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

2. Dans la suite de ce chapitre, sauf indication contraire, $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ désigne toujours un espace euclidien.

3. Si l'endomorphisme $u \in L(E)$ et les vecteurs x et y de E sont représentés dans une base orthonormée de E par la matrice A et par les colonnes X et Y , alors

$$X^\top \cdot A \cdot Y = \langle x | u(y) \rangle \quad X^\top \cdot X = \|x\|^2.$$

4. Quelle que soit la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, quelles que soient les colonnes $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$,

$$X^\top \cdot A \cdot Y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i a_{i,j} y_j.$$

Si la matrice A est diagonale, alors

$$X^\top \cdot A \cdot X = \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2.$$

5. Rappels sur la réduction des endomorphismes

Soit $u \in L(E)$.

5.1 Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels stables par u , alors $F + G$ et $F \cap G$ sont stables par u .

5.2 Si le sous-espace F est stable par l'endomorphisme u , alors son orthogonal F^\perp est stable par l'adjoint u^* .

5.3 Si u est inversible, alors u^{-1} est un polynôme en u et u est un polynôme en u^{-1} :

$$u^{-1} \in \mathbb{K}[u], \quad u \in \mathbb{K}[u^{-1}].$$

5.4 Si P est un polynôme annulateur de u , irréductible et unitaire, alors P est le polynôme minimal de u .

5.5 Si le produit PQ est un polynôme annulateur de u et si $P(u)$ est injectif, alors

$$\forall x \in E, \quad (PQ)(u)(x) = 0_E = P(u)(Q(u)(x))$$

et Q est un polynôme annulateur de u .

5.6 Si P est un diviseur non constant du polynôme minimal de u , alors le sous-espace $\text{Ker } P(u)$ contient un vecteur $x_0 \neq 0_E$.

5.7 L'endomorphisme u n'a pas de vecteur propre dans le sous-espace vectoriel

$$F = \left(\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \text{Ker}(u - \lambda I_E) \right)^\perp.$$

Par suite, si F est stable par u , alors le spectre de l'endomorphisme u_F induit par restriction de u à F est vide.

Entraînement

6. Si F et G sont deux sous-espaces orthogonaux de E , alors

$$E = F \oplus G \oplus (F^\perp \cap G^\perp).$$

On peut exprimer les trois projections relatives à cette décomposition en somme directe en fonction d'une base orthonormée de F et d'une base orthonormée de G .

7. Soit $(y_k)_{1 \leq k \leq r}$, une famille de vecteurs de E . Les formes linéaires $\varphi_k = [x \mapsto (y_k | x)]$ sont liées dans l'espace dual $E^* = L(E, \mathbb{R})$ si, et seulement si, la famille $(y_k)_{1 \leq k \leq r}$ est liée et $\text{rg}(\varphi_k)_{1 \leq k \leq r} = \text{rg}(y_k)_{1 \leq k \leq r}$.

8. Soit $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_d)$, une base de $E = \mathbb{R}_d[X]$ qui est orthonormée pour le produit scalaire φ . On considère une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de E telles que $\|P_n\|$ tende vers 0.

$$1. \quad \forall 0 \leq k \leq d, \quad (\varepsilon_k | P_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

2.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^d (\varepsilon_k | P_n) \varepsilon_k(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

9. Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$, un espace préhilbertien réel.

9.1 Quel que soit le sous-espace F , le sous-espace F^\perp est fermé.

9.2 Si $E = F \oplus F^\perp$, alors F est fermé.

I

Réduction des isométries

I.1 Rappels

10. Un endomorphisme u de E est une **isométrie** (ou un **automorphisme orthogonal**) lorsque

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|.$$

10.1 \rightarrow Un endomorphisme u de E est une isométrie si, et seulement si, il conserve le produit scalaire :

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad (u(x) | u(y)) = (x | y).$$

10.2 Une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est **orthogonale** si, et seulement si,

$$M^\top \cdot M = I_n$$

c'est-à-dire si

$$M \cdot M^\top = I_n.$$

10.3 \rightarrow Soit $u \in L(E)$, représenté par la matrice M dans une base orthonormée de E . L'endomorphisme u est une isométrie si, et seulement si, la matrice M est orthogonale.

10.4 \rightarrow Caractérisations des matrices orthogonales

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. La matrice M est orthogonale.
2. La matrice M est inversible et $M^{-1} = M^\top$.
3. La matrice M représente une isométrie dans une base orthonormée de E .
4. La matrice M est la matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée.
5. Les colonnes de la matrice M forment une base de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est orthonormée pour le produit scalaire canonique.
6. Les lignes de la matrice M forment une base de $\mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ qui est orthonormée pour le produit scalaire canonique.

10.5 Le déterminant d'une matrice orthogonale (resp. d'une isométrie) est égal à ± 1 . Les **rotations** sont les isométries dont le déterminant est égal à 1.

11. \rightarrow Stabilité de l'orthogonal [7.106.3]

Si u est une isométrie de E et si V est un sous-espace stable par u , alors l'orthogonal V^\perp est stable par u .

12. Spectre d'une isométrie

12.1 \rightarrow Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de $u \in O(E)$, alors $\lambda = \pm 1$.

12.2 Considérée comme une matrice réelle, une matrice orthogonale ne peut admettre comme valeurs propres que 1 et -1 .

12.3 Les valeurs propres d'une matrice orthogonale considérée comme une matrice complexe sont des nombres complexes de module 1.

13. Soit $u \in O(E)$.

On considère les sous-espaces vectoriels

$$V_+ = \text{Ker}(u - I_E) \quad \text{et} \quad V_- = \text{Ker}(u + I_E).$$

13.1 Les sous-espaces vectoriels V_+ et V_- sont orthogonaux.

13.2 Les sous-espaces

$$V_+ \oplus V_- \quad \text{et} \quad F = (V_+ \oplus V_-)^\perp$$

sont stables par u .

13.3 Si x est un vecteur non nul de F , alors le sous-espace $\text{Vect}(x, u(x))$ est un plan.

13.4 Si $\dim E = 3$, alors $\dim F \leq 2$.

1.2 Isométries en dimension $n \geq 3$

14. Suite de [13] – Le sous-espace $F = (V_+ \oplus V_-)^\perp$ est stable par u . On suppose qu'il existe un entier k tel que $2k \leq \dim F$ et des plans P_1, \dots, P_k contenus dans F , deux à deux orthogonaux et stables par u .

14.1 Si G est un sous-espace vectoriel de F , alors

$$F = G \oplus (V_+ \oplus V_- \oplus G)^\perp.$$

14.2 Si $\dim F > 2k$, alors le sous-espace vectoriel

$$F_{k+1} = [(V_+ \oplus V_-) \oplus (P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_k)]^\perp$$

est stable par u [7.106.3] et contenu dans F , donc $\dim F \geq 2k + 2$.

14.3 Dans ce cas, l'endomorphisme u_{k+1} induit par restriction de u à F_{k+1} est une isométrie qui n'a pas de valeurs propres réelles et son polynôme minimal admet un diviseur μ_{k+1} irréductible de degré 2.

14.4 Si x_{k+1} est un vecteur non nul de $\text{Ker}(\mu_{k+1}(u_{k+1}))$, alors

$$P_{k+1} = \text{Vect}(x_{k+1}, u(x_{k+1}))$$

est un plan stable par u , contenu dans F et orthogonal aux plans P_1, \dots, P_k .

15. \rightarrow Soit $u \in O(E)$. Il existe des plans vectoriels P_1, \dots, P_d , stables par u et deux à deux orthogonaux tels que

$$E = \text{Ker}(u - I_E) \oplus \text{Ker}(u + I_E) \oplus \left(\bigoplus_{1 \leq k \leq d} P_k \right).$$

16. \rightarrow Traduction matricielle

En notant $p = \dim V_+$ et $q = \dim V_-$, il existe une base orthonormée \mathcal{B} de E et des réels $0 < \omega_1, \dots, \omega_d < \pi$ tels que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Diag}(I_p, -I_q, R(\omega_1), \dots, R(\omega_d)).$$

L'entier q est pair si, et seulement si, u est une rotation.

Classifications des isométries vectorielles de l'espace

17. Selon la dimension du sous-espace fixe

Si $\dim E = 3$, on peut classer les isométries de l'espace en fonction de la dimension du sous-espace fixe $V_+ = \text{Ker}(u - I_E)$.

17.1 Si $\dim V_+ = 3$, alors $u = I_E$.

17.2 Si $\dim V_+ = 2$, alors u est une réflexion représentée dans une base orthonormée convenable par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

17.3 Si $\dim V_+ = 1$, alors u est une rotation et il existe un angle $0 < \theta \leq \pi$ tel que la matrice de u soit

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix}$$

dans une base orthonormée convenable.

17.4 Si $\dim V_+ = 0$, alors il existe $0 < \theta \leq \pi$ tel que, dans une base orthonormée convenable, la matrice de u soit

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$$

Cette isométrie est la composée d'une rotation et d'une réflexion qui commutent.

18. Isométries diagonalisables

En dimension 3, les isométries diagonalisables sont les suivantes.

- L'identité I_E .
- Les réflexions.
- Les rotations d'angle $\theta = \pi$, c'est-à-dire les *demi-tours d'axe* V_+ , appelés aussi *symétries axiales*.
- La *symétrie centrale* $-I_E$.

19. Selon le déterminant

Si $\dim E = 3$, on distingue :

- Les rotations ($\det u = 1$);
- Les réflexions et les composées d'une rotation et d'une réflexion ($\det u = -1$).

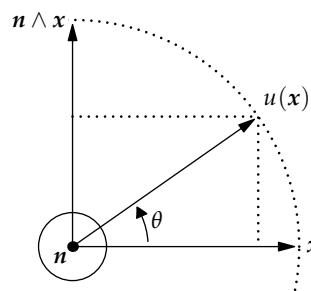
1.3 Méthodes pratiques

Matrice d'une rotation en dimension 3

20. Soient θ , un réel ; n , un vecteur unitaire d'un espace euclidien orienté E de dimension 3 et $u \in \text{SO}(E)$, la rotation d'angle θ autour de la droite vectorielle dirigée et orientée par n .

20.1 On a : $u(n) = n$ et

$$\forall x \in (\mathbb{R} \cdot n)^\perp, \quad u(x) = \cos \theta \cdot x + \sin \theta \cdot (n \wedge x)$$



20.2 Plus généralement,

$$\forall x \in E, \quad u(x) = (n | x) \cdot n + \cos \theta \cdot (x - (n | x) \cdot n) + \sin \theta \cdot (n \wedge x)$$

ce qui permet d'écrire la matrice de u dans une base orthonormée directe quelconque.

Analyse d'une rotation en dimension 3

21. Soit u , une isométrie de \mathbb{R}^3 représentée dans une base orthonormée directe par une matrice orthogonale $A \in O_3(\mathbb{R})$:

$$A^T \cdot A = I_3.$$

21.1 On vérifie qu'il s'agit d'une matrice de rotation en calculant une matrice colonne $N \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$AN = N \quad \text{et} \quad N^\top \cdot N = 1.$$

Cette colonne représente un vecteur unitaire \mathbf{n} qui dirige l'axe de la rotation u .

Il reste à déterminer le réel θ (unique modulo 2π) tel que u soit la rotation d'angle θ autour de la droite orientée par \mathbf{n} .

21.2 On choisit une matrice colonne $V \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui représente un vecteur unitaire \mathbf{v} orthogonal à \mathbf{n} :

$$N^\top \cdot V = 0, \quad V^\top \cdot V = 1.$$

21.3 Avec $\mathbf{w} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{v}$, la famille $\mathcal{B}_0 = (\mathbf{n}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ est une base orthonormée directe. La matrice de u relative à cette base est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $\text{tr}(A) = 1 + 2 \cos \theta$ et

$$\det(N, V, AV) = \det_{\mathcal{B}_0}(\mathbf{n}, \mathbf{v}, u(\mathbf{v})) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cos \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta \end{vmatrix} = \sin \theta.$$

21.4 Une autre méthode d'étude est présentée au [120].

Entraînement

22. Questions pour réfléchir

1. Une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det M = \pm 1$ est-elle une matrice orthogonale ?
- 2.a La matrice I_n est une matrice de rotation.
- 2.b La matrice $-I_n$ est-elle une matrice de rotation ?
3. Si $\det M = 1$, la matrice M est-elle une matrice de rotation ?
4. Si $\dim E = 3$, quelles symétries orthogonales sont aussi des rotations ?
5. Une réflexion peut-elle être une rotation ?
6. Matrice d'une symétrie orthogonale relative à une base orthonormée quelconque ; à une base orthonormée adaptée aux sous-espaces propres.
7. Si une isométrie $u \in O(E)$ est diagonalisable, alors u est une symétrie.
8. Expliciter une matrice orthogonale P telle que

$$\text{Diag}(1, 1, -1) = P^\top \cdot \text{Diag}(-1, 1, 1) \cdot P.$$

Est-il possible de choisir P de telle sorte que $\det P = 1$?

9. Suite de [17] –
- 9.a Les matrices $R_x(\theta)$ et $R_x(-\theta)$ sont-elles semblables ?
- 9.b Étudier l'existence d'une matrice $P \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$R_x(-\theta) = P^\top \cdot R_x(\theta) \cdot P.$$

Interpréter géométriquement.

10. Suite de [20] – Si $u \neq I_E$, alors il n'y a que deux couples

$$(\mathbf{n}, \theta) \in E \times [-\pi, \pi]$$

possibles et ils sont opposés. Interpréter géométriquement.

11. Suite de [21] – Si $A \in O_3(\mathbb{R})$ et si l'équation $AN = N$ n'a que le vecteur $N = 0$ pour solution, que dire de la matrice A ?

23. Soit u , un endomorphisme de E tel que

$$u \circ u^* \circ u = u.$$

Le sous-espace $F = (\text{Ker } u)^\perp$ est stable par u et l'endomorphisme induit par restriction de u à F est une isométrie.

24. Matrices de rotation

L'espace \mathbb{R}^3 est muni de sa structure euclidienne orientée canonique. Les matrices suivantes représentent, dans la base canonique, la rotation d'angle θ autour de la droite vectorielle orientée par le vecteur \mathbf{n} . → [20], [21]

24.1 Pour $\theta = \pi/3$ et $\mathbf{n} = (1, -1, 1)$:

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

24.2 Pour $\theta = \pi/3$ et $\mathbf{n} = (1, 1, 0)$:

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

24.3 Pour $e^{i\theta} = \frac{3+4i}{5}$ et $\mathbf{n} = (0, -1, 2)$:

$$\frac{1}{25} \begin{pmatrix} 15 & -8\sqrt{5} & -4\sqrt{5} \\ 8\sqrt{5} & 17 & -4 \\ 4\sqrt{5} & -4 & 23 \end{pmatrix}$$

24.4 Pour $e^{i\theta} = \frac{4+3i}{5}$ et $\mathbf{n} = (\sqrt{2}, 0, 1)$:

$$\frac{1}{15} \begin{pmatrix} 14 & -3\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 3\sqrt{3} & 12 & -3\sqrt{6} \\ \sqrt{2} & 3\sqrt{6} & 13 \end{pmatrix}$$

24.5 Pour $\theta = \pi/6$ et $\mathbf{n} = (1, 0, -1)$:

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{3} & \sqrt{2} & -2 + \sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ -2 + \sqrt{3} & \sqrt{2} & 2 + \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

24.6 Pour $\theta = 2\pi/3$ et $\mathbf{n} = (1, 0, 2)$:

$$\frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{15} & 6 \\ 2\sqrt{15} & -5 & -\sqrt{15} \\ 6 & \sqrt{15} & 7 \end{pmatrix}$$

24.7 Pour $\theta = \pi/2$ et $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$:

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} & 1 & 1 - \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

24.8 Pour $e^{i\theta} = \frac{1+2i}{\sqrt{5}}$ et $\mathbf{n} = (0, 1, 1)$:

$$\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & -2\sqrt{10} & 2\sqrt{10} \\ 2\sqrt{10} & 5 + \sqrt{5} & 5 - \sqrt{5} \\ -2\sqrt{10} & 5 - \sqrt{5} & 5 + \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

24.9 Pour $\theta = 3\pi/4$ et $\mathbf{n} = (-2, 0, 1)$:

$$\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 8 - \sqrt{2} & -\sqrt{10} & -4 - 2\sqrt{2} \\ \sqrt{10} & -5\sqrt{2} & 2\sqrt{10} \\ -4 - 2\sqrt{2} & -2\sqrt{10} & 2 - 4\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

25. Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$. La matrice

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} 1 + \theta \cos 2\theta & -\theta \sin 2\theta \\ -\theta \sin 2\theta & 1 - \theta \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

26. Soient $u \in O(E)$ et $v = u - I_E$.

26.1 Comme $\text{Ker } v = (\text{Im } v)^\perp$, pour tout vecteur $x \in E$, il existe deux vecteurs $y \in \text{Ker } v$ et $z \in E$ tels que

$$x = y + v(z) \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \|y\|^2 + \|v(z)\|^2.$$

Le couple (y, z) est-il unique? Que valent $u(y)$ et $\|u(z)\|$?

26.2 La suite de terme général

$$x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u^k(x)$$

converge vers le projeté orthogonal de x sur $\text{Ker } v$.

27. Soient A et B , deux matrices de $\mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ telles que

$$A^\top \cdot A = B^\top \cdot B.$$

On note f (resp. g), l'application linéaire de \mathbb{R}^q dans \mathbb{R}^p canoniquement associée à la matrice A (resp. à la matrice B). Les espaces \mathbb{R}^q et \mathbb{R}^p sont munis de leurs structures euclidiennes canoniques respectives.

27.1 Quels que soient les vecteurs x et y de \mathbb{R}^q ,

$$\langle f(x) | f(y) \rangle = \langle g(x) | g(y) \rangle.$$

27.2 Les sous-espaces vectoriels $\text{Ker } f$ et $\text{Ker } g$ sont égaux.

27.3 Si $(f(x_k))_{1 \leq k \leq r}$ est une base orthonormée de $\text{Im } f$, alors $(x_k)_{1 \leq k \leq r}$ est une famille libre de \mathbb{R}^q et $(g(x_k))_{1 \leq k \leq r}$ est une base orthonormée de $\text{Im } g$.

27.4 Il existe une matrice orthogonale $U \in O_p(\mathbb{R})$ telle que $A = UB$.

II

Théorème spectral

28. Rappels

On considère un espace euclidien E dont le produit scalaire est noté $(\cdot | \cdot)$.

28.1 L'adjoint d'un endomorphisme u de E est l'unique endomorphisme u^* de E tel que

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad (x | u(y)) = (u^*(x) | y).$$

28.2 Un endomorphisme u de E est dit **auto-adjoint** (ou **symétrique**) lorsqu'il est égal à son adjoint u^* , c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad (u(x) | y) = (x | u(y)).$$

28.3 En général, un projecteur p possède deux sous-espaces propres : son noyau

$$\text{Ker } p = \text{Ker}(p - 0 \cdot I_E) = \text{Im}(I_E - p)$$

et son image

$$\text{Im } p = \text{Ker}(I_E - p) = \text{Ker}(p - 1 \cdot I_E).$$

Ces sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans E :

$$E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$$

et la décomposition de chaque vecteur est connue :

$$\forall x \in E, \quad x = [x - p(x)] + p(x).$$

28.4 Par définition, un projecteur $p \in L(E)$ est une **projection orthogonale** si, et seulement si, les deux sous-espaces vectoriels

$$\text{Ker } p \quad \text{et} \quad \text{Im } p = \text{Ker}(p - I_E)$$

sont orthogonaux. On connaît alors une décomposition de E en somme directe orthogonale :

$$E = \text{Ker } p \oplus^\perp \text{Ker}(p - I_E).$$

Propriétés des endomorphismes auto-adjoints

29. \rightarrow Un projecteur $p \in L(E)$ est une projection orthogonale si, et seulement si, l'endomorphisme p est auto-adjoint.

30. \rightarrow S'il existe une base orthonormée de vecteurs propres pour u , alors u est un endomorphisme auto-adjoint.

31. Sous-espaces stables

31.1 \rightarrow L'endomorphisme induit par restriction de $u \in \mathcal{S}(E)$ à un sous-espace F stable par u est un endomorphisme auto-adjoint de F .

31.2 Si $u(x)$ et y sont orthogonaux, alors x et $u(y)$ sont orthogonaux.

31.3 \rightarrow Si u est un endomorphisme auto-adjoint de E , alors

$$E = \text{Ker } u \oplus^\perp \text{Im } u.$$

31.4 \rightarrow Les sous-espaces propres d'un endomorphisme auto-adjoint sont deux à deux orthogonaux.

31.5 \rightarrow Si F est un sous-espace stable par $u \in \mathcal{S}(E)$, alors F^\perp est stable par u .

32. Polynôme minimal

32.1 On considère une matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ comme une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et un vecteur propre $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ de M associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\overline{\lambda} \cdot \overline{X}^\top \cdot X = \overline{(MX)}^\top \cdot X = \overline{X}^\top \cdot MX = \lambda \overline{X}^\top \cdot X$$

32.2 \rightarrow Le polynôme minimal d'un endomorphisme auto-adjoint est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. \rightarrow [61]

Versions géométriques du théorème spectral

33. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.

33.1 Si V est un sous-espace stable par u de dimension supérieure à 1, alors il contient un vecteur propre de u .

33.2 Si V_1, \dots, V_r sont les sous-espaces propres de u , alors le sous-espace

$$F = \left[V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_r \right]^\perp$$

est stable par u mais ne contient aucun vecteur propre de u .

33.3 \rightarrow Tout endomorphisme auto-adjoint u d'un espace euclidien E est diagonalisable et

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)}^\perp \text{Ker}(u - \lambda I_E).$$

33.4 Décomposition spectrale

Pour tout endomorphisme auto-adjoint u ,

$$u = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \lambda \cdot p_\lambda$$

où p_λ est la projection orthogonale sur $\text{Ker}(u - \lambda I_E)$, sous-espace propre de u associé à λ . \rightarrow [38.3]

Versions vectorielles du théorème spectral

34. Rappels

Si un endomorphisme u de E est auto-adjoint, alors la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique, quelle que soit la base orthonormée \mathcal{B} de E .

Réciproquement, s'il existe au moins une base orthonormée \mathcal{B} de E telle que la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ soit symétrique, alors l'endomorphisme u est auto-adjoint.

35. \rightarrow Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de u .

36. Soient $u \in \mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{B} = (\varepsilon_k)_{1 \leq k \leq n}$, une base orthonormée de vecteurs propres de u . On suppose que les valeurs propres de u sont rangées par ordre croissant :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

36.1 Pour tout $x \in E$,

$$x = \sum_{k=1}^n (\varepsilon_k | x) \cdot \varepsilon_k \quad \text{et} \quad u(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k (\varepsilon_k | x) \cdot \varepsilon_k.$$

36.2 Comme

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n (\varepsilon_k | x)^2,$$

alors

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq (x | u(x)) \leq \lambda_n \|x\|^2.$$

37. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.

37.1 \rightarrow Pour tout $x \in E$, il existe une famille orthogonale $(x_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(u)}$ de vecteurs de E telle que

$$x = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} x_\lambda$$

et que

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(u), \quad x_\lambda \in \text{Ker}(u - \lambda \cdot I_E).$$

37.2 En particulier,

$$\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \|x_\lambda\|^2 \quad \text{et} \quad u(x) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \lambda \cdot x_\lambda.$$

37.3 On en déduit que

$$(x | u(x)) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \lambda \|x_\lambda\|^2$$

et que

$$\|u(x)\|^2 = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \lambda^2 \|x_\lambda\|^2 \leq \left(\max_{\lambda \in \text{Sp}(u)} |\lambda| \right)^2 \|x\|^2.$$

Versions matricielles du théorème spectral

38.1 \rightarrow Pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{S}(E)$, il existe une base orthonormée \mathcal{B}_0 de E telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(u)$ soit diagonale.

38.2 \rightarrow Pour toute matrice symétrique réelle A , il existe une matrice orthogonale $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^\top \cdot A \cdot P$ soit diagonale.

38.3 Soient $u \in \mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{B}_0 = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de u . Pour toute base orthonormée \mathcal{B} ,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \sum_{k=1}^n \lambda_k X_k \cdot X_k^\top$$

où λ_k est la valeur propre de u associée à ε_k et $X_k = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varepsilon_k)$.

38.4 Soient $u \in \mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_n)$, une base orthogonale de E constituée de vecteurs propres de u . Pour toute base orthonormée \mathcal{B} ,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{Y_k \cdot Y_k^\top}{Y_k^\top \cdot Y_k}$$

où λ_k est la valeur propre de u associée à e_k et $Y_k = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(e_k)$.

Entraînement

39. Questions pour réfléchir

1. Si M est une matrice symétrique et s'il existe une matrice orthogonale P telle que

$$P^\top \cdot M \cdot P = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

alors $B = 0$ et les matrices A_1 et A_2 sont symétriques. (Par un calcul direct ou en appliquant [31.5] et [31.1].)

2. Suite de [31.5] – On suppose que $\dim E = 2$ et que x est un vecteur propre unitaire de $u \in \mathcal{S}(E)$. Si y est un vecteur unitaire orthogonal à x , alors (x, y) est une base orthonormée de vecteurs propres de u .

3. Soient $u \in \mathcal{S}(E)$, un endomorphisme auto-adjoint et \mathcal{B} , une base de vecteurs propres de u . Cette base est-elle nécessairement orthonormée? Est-elle nécessairement orthogonale?

4. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est auto-adjoint si, et seulement si,

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)}^\perp \text{Ker}(u - \lambda I_E).$$

5. Suite de [37.2] –

$$\min_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{(u(x) | x)}{\|x\|^2} = \lambda_1 \quad \max_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{(u(x) | x)}{\|x\|^2} = \lambda_r$$

6. Un endomorphisme u de E est auto-adjoint si, et seulement si, il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de u .

7. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à la matrice diagonale Δ , combien existe-t-il de matrices $P \in O_n(\mathbb{R})$ telles que

$$P^\top \cdot A \cdot P = \Delta \quad ?$$

8. La matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

n'est pas diagonalisable. Comparer avec [38.2].

9. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique si, et seulement si, il existe des matrices P_1, P_2, \dots, P_r dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M \in \text{Vect}(P_k, 1 \leq k \leq r)$ avec

$$\begin{cases} \forall 1 \leq k \leq r, & P_k^2 = P_k = P_k^\top \\ \forall 1 \leq j < k \leq n, & P_j P_k = P_k P_j = 0 \end{cases}$$

40. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $A.A^\top.A = I_n$. La matrice A est inversible et comme son inverse est symétrique, elle est elle-même symétrique et $A = I_n$.

41. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A^\top = I_n$. Comme $A = I_n - (A^\top)^2$, alors

$$(A - I_n)(A^2 + A - I_n) = 0_n$$

et comme 1 n'est pas valeur propre de A , alors la matrice A est symétrique.

42. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf

$$\forall 1 \leq i < n, \quad a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = 1.$$

La matrice A est diagonalisable et possède n valeurs propres deux à deux distinctes.

43. Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $\rightarrow[66]$

$$\begin{aligned} \text{Ker } A^\top.A &= \text{Ker } A, & \text{Im } A^\top.A &= (\text{Ker } A)^\perp, \\ \text{Ker } A.A^\top &= (\text{Im } A)^\perp, & \text{Im } A.A^\top &= \text{Im } A \end{aligned}$$

et en particulier

$$\text{rg}(A^\top.A) = \text{rg}(A.A^\top) = \text{rg}(A).$$

44. Soit E , un espace euclidien. Tout endomorphisme auto-adjoint $v \in \mathcal{S}(E)$ est continu : il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\forall x \in E, \quad \|v(x)\| \leq K \|x\|.$$

45. Soient $U \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, une colonne non nulle, et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. La matrice

$$A = I_n + \alpha U.U^\top$$

est diagonalisable. Préciser ses éléments propres.

46. **Codiagonalisation d'endomorphismes auto-adjoints**
Soient f et g , deux endomorphismes auto-adjoints.

1. S'il existe une base de E constituée de vecteurs propres à la fois pour f et pour g , alors $f \circ g = g \circ f$.

2. On suppose que $f \circ g = g \circ f$. Pour tout $\lambda \in \text{Sp}(f)$, on note g_λ , l'endomorphisme induit par restriction de g au sous-espace

$$E_\lambda^f = \text{Ker}(f - \lambda I_E).$$

Tout vecteur propre de g_λ est aussi un vecteur propre de f . Il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres à la fois pour f et pour g .

47. **Endomorphismes contractants [37.2]**

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.

47.1

$$\min_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \min_{\lambda \in \text{Sp}(u)} |\lambda|, \quad \max_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \max_{\lambda \in \text{Sp}(u)} |\lambda|$$

47.2 Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\forall x \in E, \quad \|P(u)(x)\| \leq \max_{\lambda \in \text{Sp}(u)} |P(\lambda)| \|x\|.$$

47.3 Un endomorphisme auto-adjoint u est **contractant** :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leq \|x\|$$

si, et seulement si, $\text{Sp}(u) \subset [-1, 1]$. Il est **strictement contractant** :

$$\forall x \neq 0, \quad \|u(x)\| < \|x\|$$

si, et seulement si, $\text{Sp}(u) \subset]-1, 1[$.

48. Les espaces \mathbb{R}^n et $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ sont munis de leurs structures euclidiennes canoniques respectives. On considère la matrice $K_n \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $K_n(i, j) = 1$ si $|i - j| = 1$ et $K_n(i, j) = 0$ sinon.

48.1 Il existe une base orthonormée $(U_k)_{1 \leq k \leq n}$ de \mathbb{R}^n et des réels $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$ tels que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad K_n U_k = \lambda_k U_k.$$

48.2 L'endomorphisme T de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad T(M) = K_n M + M K_n + M$$

est diagonalisable.

48.3 La famille $(V_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} = (U_i.U_j^\top)_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base orthonormée de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de T .

49. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, une matrice telle que

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad a_{i,j} > 0 \quad \text{et} \quad \forall 1 \leq i \leq n, \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1.$$

On admet que $\dim \text{Ker}(A - I_n) = 1$ et on note

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \|X\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

1. Déterminer $\text{Ker}(A - I_n)$.
2. Comme

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \|AX\| \leq \|X\|,$$

toutes les valeurs propres de A appartiennent au segment $[-1, 1]$.

3. La matrice $B = I_n + A$ est inversible [5.11].

4. La suite de matrices $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice R semblable à $E_{1,1} = \text{Diag}(1, 0, \dots, 0)$.

50. L'espace $E = \mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On note f , l'endomorphisme de E canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 5 & -5 \\ 5 & 3 & -3 \\ -5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

50.1 Le sous-espace $F = (\text{Ker } f)^\perp$ est stable par f et, avec

$$u_1 = (1, 0, 0) \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (0, 1, -1),$$

cet espace admet $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ comme base orthonormée.

50.2 On note g , l'endomorphisme de F induit par restriction de f . La matrice de g relative à la base \mathcal{B} est égale à

$$\begin{pmatrix} 11 & 5\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} & 6 \end{pmatrix}.$$

50.3 La matrice A est semblable à $\text{Diag}(0, 1, 16)$.

51. Soient u et v , deux vecteurs linéairement indépendants de \mathbb{R}^n . Ils sont représentés par les matrices colonnes U et V dans la base canonique et on note f , l'endomorphisme de \mathbb{R}^n représenté par la matrice

$$A = I_n + U.V^\top + V.U^\top$$

dans la base canonique.

51.1 Le réel λ est une valeur propre de f si, et seulement si, il existe un vecteur x non nul tel que

$$(\lambda - 1) \cdot x = (x | u) \cdot v + (x | v) \cdot u.$$

51.2 Si $n \geq 3$, alors le spectre de f est constitué des réels

$$1, \quad 1 + (u | v) - \|u\| \|v\|, \quad 1 + (u | v) + \|u\| \|v\|$$

et la matrice A est diagonalisable.

52. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice de coefficients

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad a_{ij} = i + j.$$

On note U et V , les matrices colonnes qui représentent les vecteurs

$$u = (1, 1, \dots, 1) \quad \text{et} \quad v = (1, 2, \dots, n)$$

dans la base canonique de \mathbb{R}^n .

52.1 Comme $A = V \cdot U^\top + U \cdot V^\top$, la matrice A est diagonalisable, l'image de A est engendrée par U et V et le noyau de A est l'orthogonal de $\text{Im } A$.

52.2 Si X est un vecteur propre de A associé à une valeur propre non nulle, alors il existe deux réels a et b tels que

$$X = aU + bV.$$

52.3 Les valeurs propres non nulles de A sont

$$(u | v) \pm \|u\| \|v\|$$

et les sous-espaces propres correspondant sont les droites dirigées par les vecteurs $\|v\| U \pm \|u\| V$.

53. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Pour tout entier impair $p \in \mathbb{N}$, il existe un, et un seul, endomorphisme $v \in \mathcal{S}(E)$ tel que $v^p = u$.

54. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice nilpotente d'indice p . Si les matrices A et A^\top commutent, alors la matrice symétrique $A^\top \cdot A$ est nilpotente et la matrice A est nulle [43].

55. L'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$ étant muni du produit scalaire défini par

$$\forall P, Q \in E, \quad \langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt,$$

on considère l'application f définie par

$$\forall P \in E, \quad f(P) = \frac{1}{2}(X^2 - 1)P'' + XP' - P.$$

55.1 L'application f est un endomorphisme auto-adjoint de E et sa matrice relative à la base canonique de E est triangulaire supérieure. Pour tout entier $0 \leq k \leq n$, il existe un vecteur propre P_k de f associé à la valeur propre

$$\lambda_k = \frac{k^2 + k - 2}{2}$$

et $\deg P_k = k$.

55.2 On note $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$, la base orthonormée de E déduite de la base canonique par l'algorithme de Gram-Schmidt. Alors, pour tout entier $0 \leq k \leq n$,

$$f(T_k) = \sum_{i=0}^k \langle f(T_k) | T_i \rangle \cdot T_i = \langle T_k | f(T_k) \rangle \cdot T_k$$

et les polynômes P_k et T_k sont proportionnels.

56. Pour tout endomorphisme u d'un espace euclidien E , l'application $u^* \circ u$ est un endomorphisme auto-adjoint et il existe une base orthonormée $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ de E telle que

$$\forall i \neq j, \quad (u(e_i) | u(e_j)) = 0.$$

57. Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et W , l'ensemble des vecteurs propres unitaires de A (l'espace $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ étant muni de sa norme euclidienne canonique). On pose

$$\forall X \in W, \quad F_A(X) = \min_{u \in \mathbb{R}} \text{tr}[(A - u \cdot X \cdot X^\top)^2].$$

La fonction F_A atteint un minimum $m(A)$ sur W et

$$m(A) = \text{tr}(A^2) - \rho(A^2)$$

où $\rho(A^2)$ est le *rayon spectral* de A^2 , défini par

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \rho(M) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(M)\}.$$

58. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

58.1 Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la matrice $A(t)$ est diagonalisable et ses valeurs propres vérifient

$$a(t) < 0 < b(t) < 2 < c(t).$$

58.2 Lorsque t tend vers $+\infty$,

$$-1/t < a(t) < 0 < 2 - 2/t < b(t) < 2$$

donc $c(t) = t + o(1)$.

59. L'espace \mathbb{R}^n est muni du produit scalaire canonique. On considère une matrice symétrique $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et l'application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad f(X) = X^\top \cdot S \cdot X.$$

Les valeurs propres de S sont rangées par ordre croissant et comptées avec multiplicité :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

59.1 Pour tout vecteur unitaire $X \in \mathbb{R}^n$,

$$\lambda_1 \leq f(X) \leq \lambda_n.$$

59.2 Quels que soient X et Y dans \mathbb{R}^n ,

$$2X^\top \cdot S \cdot Y = f\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right) - f\left(\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right).$$

59.3 En notant \mathcal{R} , l'ensemble des couples (X, Y) de vecteurs unitaires et orthogonaux de \mathbb{R}^n ,

$$\max_{(X,Y) \in \mathcal{R}} |X^\top \cdot S \cdot Y| = \frac{\lambda_n - \lambda_1}{2}.$$

60.

1. Toutes les matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont diagonalisables.
2. Parmi les matrices triangulaires supérieures strictes, seule la matrice nulle est diagonalisable.
3. Si V est un sous-espace de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les matrices sont diagonalisables, alors

$$\dim V \leq \frac{n(n+1)}{2}.$$

61. **Polynôme minimal de $u \in \mathcal{S}(E)$**

Le polynôme minimal d'un endomorphisme auto-adjoint est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. On peut démontrer ce fait sans recourir à la notion de spectre complexe. →[32]

61.1 Soit $f \in \mathcal{S}(V)$ où $\dim V = 2$.

1. Le polynôme caractéristique C_f de $f \in \mathcal{S}(V)$ est de la forme $(X - a)(X - b) - c^2$ et est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

2. Le polynôme C_f admet une racine double si, et seulement si, f est une homothétie.

61.2 Soit P , un diviseur irréductible de degré 2 du polynôme minimal de $u \in \mathcal{S}(E)$.

3. L'endomorphisme $P(u)$ n'est pas injectif et, quel que soit le vecteur $x_0 \in \text{Ker } P(u)$, ce n'est pas un vecteur propre de u .

4. Si x_0 est un vecteur non nul de $\text{Ker } P(u)$, alors le sous-espace vectoriel

$$V = \text{Vect}(x_0, u(x_0))$$

est un plan stable par u .

5. Le polynôme minimal de l'endomorphisme u_V induit par restriction de u à V est le polynôme P .

6. Conclure.

III

Endomorphismes auto-adjoints positifs

62.1 Une matrice symétrique $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est **positive** lorsque

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top \cdot A \cdot X \geq 0.$$

L'ensemble des matrices symétriques positives est noté $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

62.2 Une matrice symétrique $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite **définie positive** lorsque

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^\top \cdot A \cdot X > 0.$$

L'ensemble de ces matrices est noté $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

63.1 Un endomorphisme auto-adjoint $u \in \mathcal{S}(E)$ est **positif** lorsque

$$\forall x \in E, \quad (x | u(x)) \geq 0.$$

L'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs de l'espace E est noté $\mathcal{S}^+(E)$.

63.2 Un endomorphisme auto-adjoint $u \in \mathcal{L}(E)$ est **défini positif** lorsque

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \quad (x | u(x)) > 0.$$

L'ensemble des endomorphismes auto-adjoints définis positifs de E est noté $\mathcal{S}^{++}(E)$.

64. Les définitions matricielles [62] et vectorielles [63] sont analogues et on peut préciser cette analogie. → [7.76]

64.1 Soient $u \in \mathcal{S}(E)$ et \mathcal{B} , une base orthonormée quelconque de E . Si u est positif (resp. défini positif), alors sa matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique et positive (resp. définie positive).

64.2 Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. S'il existe une base orthonormée de E telle que la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ soit symétrique et positive (resp. définie positive), alors u est un endomorphisme auto-adjoint positif (resp. défini positif).

65. Exemples et contre-exemples

65.1 $I_E \in \mathcal{S}^{++}(E)$

65.2 Un projecteur orthogonal est un endomorphisme auto-adjoint [29] positif, mais n'est pas défini positif en général.

65.3 Une symétrie orthogonale est un endomorphisme auto-adjoint qui n'est pas positif en général.

66. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices $B = A^\top \cdot A$ et $C = A \cdot A^\top$ sont des matrices symétriques positives : → [71]

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \begin{cases} X^\top \cdot B \cdot X = \|AX\|^2 \\ X^\top \cdot C \cdot X = \|A^\top \cdot X\|^2 \end{cases}$$

Les matrices $A^\top \cdot A$ et $A \cdot A^\top$ sont définies positives si, et seulement si, la matrice A est inversible.

67. Caractérisations spectrales

On note $\Sigma^1 = \{\|x\| = 1\}$, la sphère unité de E et on considère un endomorphisme $u \in \mathcal{S}(E)$, dont les valeurs propres sont rangées par ordre croissant :

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_r.$$

67.1 Suite de [37.2] –

$$\lambda_1 = \min_{x \in \Sigma^1} (x | u(x)), \quad \lambda_r = \max_{x \in \Sigma^1} (x | u(x))$$

67.2 Variante [36]

Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$P^\top \cdot A \cdot P = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

En notant $P^\top \cdot X = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$, on obtient

$$X^\top \cdot A \cdot X = \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k^2 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \min_{X^\top \cdot X=1} X^\top \cdot A \cdot X = \min_{1 \leq k \leq n} \alpha_k, \\ \max_{X^\top \cdot X=1} X^\top \cdot A \cdot X = \max_{1 \leq k \leq n} \alpha_k. \end{cases}$$

67.3 → Un endomorphisme auto-adjoint $u \in \mathcal{S}(E)$ est :

1. positif si, et seulement si, ses valeurs propres sont positives ;
2. défini positif si, et seulement si, ses valeurs propres sont strictement positives.

67.4 → Un endomorphisme auto-adjoint est défini positif si, et seulement si, il est positif et inversible.

67.5 → Un endomorphisme auto-adjoint est défini positif si, et seulement si, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \quad (x | u(x)) \geq \alpha \|x\|^2.$$

Caractérisation des produits scalaires

68. On considère un espace euclidien E : sur cet espace est défini un produit scalaire de référence : $(\cdot | \cdot)$ et une norme, notée $\|\cdot\|$, est associée à ce produit scalaire.

Nous allons nous intéresser aux autres produits scalaires définis sur E .

69. Représentation matricielle d'un produit scalaire

Soit φ , un produit scalaire quelconque sur E et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, une base de E .

69.1 La matrice de Gram relative à la base \mathcal{B} est la matrice Γ définie par [7.8]

$$\Gamma = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

69.2 Quels que soient les vecteurs x et y de E , respectivement représentés par les colonnes X et Y dans la base \mathcal{B} ,

$$\varphi(x, y) = X^\top \cdot \Gamma \cdot Y.$$

69.3 La matrice de Gram Γ d'un produit scalaire est symétrique et définie positive.

$$\forall x \neq 0_E, \quad X^\top \cdot \Gamma \cdot X = \varphi(x, x) > 0.$$

69.4 Soit $Q \in GL_n(\mathbb{R})$, la matrice de passage de la base \mathcal{B} à une base \mathcal{B}' . La matrice $\Gamma' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$ s'exprime en fonction de la matrice $\Gamma = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ par la relation suivante :

$$\Gamma' = Q^\top \cdot \Gamma \cdot Q.$$

En particulier, si \mathcal{B}' est une base orthonormée pour φ , alors

$$Q^\top \cdot \Gamma \cdot Q = I_n, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \Gamma = P^\top \cdot P$$

où $P = Q^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B})$.

70. Produit scalaire associé à une matrice $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, une matrice symétrique définie positive.

70.1 L'application

$$\psi_A = [(X, Y) \mapsto X^\top \cdot A \cdot Y]$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

70.2 Pour toute base \mathcal{B} de E , il existe un produit scalaire φ sur E dont la matrice de Gram relative à \mathcal{B} soit la matrice A .

71. Factorisation d'une matrice $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

71.1 Il existe une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A = Q^\top \cdot \Delta^2 \cdot Q$$

et une matrice P telle que

$$A = P^\top \cdot P.$$

La matrice P est inversible si, et seulement si, la matrice A est définie positive. → [66]

71.2 Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors l'algorithme de Gram-Schmidt appliqué au produit scalaire ψ_A [70.1] prouve l'existence d'une matrice triangulaire inversible P telle que $A = P^\top \cdot P$.

71.3 Une application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire si, et seulement si, il existe un automorphisme u de E tel que

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad \varphi(x, y) = (u(x) | u(y)).$$

Entraînement**72. Questions pour réfléchir**

1. Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors $A^2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. Si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors les coefficients diagonaux de A sont tous positifs.
3. Un endomorphisme auto-adjoint u est positif si, et seulement si, pour tout $x \in E$, l'angle formé par le couple $(x, u(x))$ est un angle aigu.
4. L'ensemble $\mathcal{S}^+(E)$ est-il un espace vectoriel?
5. L'ensemble $\mathcal{S}^+(E)$ est une partie convexe de $\mathcal{L}(E)$ et un **cône positif** :

$$\forall (\lambda, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}^+(E), \quad \lambda \cdot u \in \mathcal{S}^+(E).$$

6. Un endomorphisme auto-adjoint défini positif est positif et inversible.
7. On suppose connue une décomposition de E en somme directe orthogonale :

$$E = \bigoplus_{1 \leq k \leq r} F_k.$$

On note p_1, \dots, p_r , les projections associées à cette décomposition de E .

- 7.a Les $p_k, 1 \leq k \leq r$, sont des projecteurs orthogonaux tels que

$$\forall 1 \leq k < \ell \leq r, \quad p_k \circ p_\ell = p_\ell \circ p_k = 0.$$

- 7.b Tout endomorphisme $u \in \text{Vect}(p_k, 1 \leq k \leq r)$ est auto-adjoint. Condition pour que u soit positif? défini positif?

73. Soient A et B , deux matrices appartenant à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

1. La matrice $A + B$ est symétrique et positive.
2. Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $A + B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

74. Si la matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^\top & D \end{pmatrix}$$

est définie positive, alors $\det B > 0$.

75. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La propriété

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top \cdot A \cdot X \geq 0$$

est vraie si, et seulement si, les valeurs propres de la matrice $B = A^\top + A$ sont toutes positives.

76. Matrice de Hilbert

La matrice de Gram relative à la base canonique de $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par

$$\forall P, Q \in E, \quad (P | Q) = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$$

est la matrice

$$H = \left(\frac{1}{i+j+1} \right)_{0 \leq i, j \leq n}.$$

Cette matrice H est diagonalisable.

Pour $U \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, le scalaire $U^\top \cdot H \cdot U$ peut s'exprimer comme l'intégrale d'une fonction positive, donc les valeurs propres de H sont strictement positives.

77. Base orthogonale commune [69.4]

Soit φ , un produit scalaire sur E . Notons $\varphi_0 = (\cdot | \cdot)$, le produit scalaire de référence.

- 77.1 Si \mathcal{B}_0 est une base orthonormée pour φ_0 , alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\varphi_0) = I_n \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\varphi) = \Gamma \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}).$$

- 77.2 Il existe une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale Δ telle que

$$Q^\top \cdot \Gamma \cdot Q = \Delta.$$

- 77.3 La matrice Q est la matrice de passage de la base \mathcal{B}_0 à une base \mathcal{B} . Comme $\rightarrow[69.4]$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_0) = I_n \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \Delta,$$

alors la base \mathcal{B} est simultanément une base orthonormée pour φ_0 et une base orthogonale pour φ .

78. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. L'application

$$\varphi = [(X, Y) \mapsto X^\top \cdot A \cdot Y]$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et comme l'application

$$[X \mapsto (A^{-1}B) \cdot X]$$

est un endomorphisme auto-adjoint de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire φ , la matrice $(A^{-1}B)$ est diagonalisable.

79. Soient A et B , deux matrices symétriques réelles. On suppose que la matrice B est définie positive.

- 79.1 L'application φ_B définie par

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \varphi_B(X, Y) = X^\top \cdot B \cdot Y$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- 79.2 Il existe une matrice diagonale D , dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs, et une matrice orthogonale P telles que

$$B = P \cdot D \cdot P^\top.$$

Il existe une matrice symétrique et inversible L telle que $B = L^2$.

- 79.3 Il existe une matrice symétrique réelle C telle que

$$AX = \lambda BX \iff C(LX) = \lambda(LX)$$

pour toute matrice colonne X et tout réel λ .

- 79.4 Il existe une base $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, orthonormée pour le produit scalaire φ_B , et des scalaires réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad Ae_i = \lambda_i Be_i.$$

80. Décomposition spectrale d'une matrice symétrique

Soit $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq r}$, le spectre d'une matrice A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Il existe des matrices $(P_k)_{1 \leq k \leq r}$ telles que

$$Q(A) = \sum_{k=1}^r Q(\lambda_k) P_k^\top \cdot P_k$$

pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$. En particulier, la matrice A est une combinaison linéaire de matrices symétriques positives :

$$A = \sum_{k=1}^r \lambda_k P_k^\top \cdot P_k.$$

2. Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\sum_{k=1}^r \|P_k X\|^2 = \|X\|^2.$$

- 81.1 Pour toute matrice $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$,

$$(\det A)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \text{tr}(A).$$

- 81.2 Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$|\det M|^2 \leq \left(\frac{\text{tr}(M^\top \cdot M)}{n} \right)^n$$

82. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice antisymétrique.

1. Quelle que soit la matrice colonne X ,

$$X^\top \cdot A \cdot X = 0.$$

2. Si $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors la matrice $A + B$ est inversible.

- 83.1 Si A est une matrice antisymétrique réelle, alors $\exp(A)$ est une matrice de rotation.

- 83.2 Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, comparer les spectres et les sous-espaces propres de A et de $\exp(A)$.

84. Racine carrée d'un endomorphisme auto-adjoint positif
 Tout endomorphisme $v \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $v^2 = u$ est une *racine carrée* de $u \in \mathcal{S}^+(E)$.

1. On suppose qu'il existe une racine carrée v de u .
 1.a Si F_k est le sous-espace propre de v associé à la valeur propre μ_k , alors F_k contenu dans un sous-espace propre de u . À quelle valeur propre de u ce sous-espace est-il associé?

1.b Chaque sous-espace propre de v est aussi un sous-espace propre de u .

2. Il existe une, et une seule, racine carrée de u .

3. Interprétation matricielle.

85. Factorisation de Cartan

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Il existe une matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = A^\top \cdot A$ [84] et une matrice orthogonale $O \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A = OS.$$

Cette factorisation, analogue de la représentation trigonométrique des nombres complexes, est unique.

86. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathfrak{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On suppose que le rang de la matrice B est égal à m .

86.1 L'entier n est supérieur à l'entier m .

86.2 Le noyau de la matrice

$$C = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & 0 \end{pmatrix}$$

est réduit à la colonne nulle. La matrice C est-elle inversible?

87.1 La matrice S est symétrique et définie positive si, et seulement si, il existe une matrice inversible P telle que $S = P \cdot P^\top$ [71].

87.2 Quelles que soient $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, la matrice ST est semblable à une matrice symétrique réelle et donc diagonalisable.

87.3 Si A est diagonalisable, alors il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que

$$A^\top = S^{-1} \cdot A \cdot S.$$

Étudier la réciproque.

88. Double produit vectoriel

Soit $a \in \mathbb{R}^3$, un vecteur unitaire. Comme

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad ((a \wedge x) \wedge a \mid y) = (a \wedge x \mid a \wedge y)$$

l'endomorphisme $f = [x \mapsto (a \wedge x) \wedge a]$ est auto-adjoint, positif mais pas défini positif.

Reconnaitre f à l'aide de la formule du double produit vectoriel :

$$u \wedge (v \wedge w) = (u \mid w) \cdot v - (u \mid v) \cdot w.$$

89. Soit $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On suppose que les coefficients $A_{i,j}$ sont tous différents de 0 et on considère la matrice

$$B = (B_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \left(\frac{1}{A_{i,j}} \right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

89.1 Si $\text{rg } A = 1$, alors $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

89.2 Si $\text{rg } A \geq 2$, alors il existe deux indices $1 \leq i < j \leq n$ tels que

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_{i,i} & a_{i,j} \\ a_{j,i} & a_{j,j} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}).$$

Le déterminant de la matrice

$$B_0 = \begin{pmatrix} b_{i,i} & b_{i,j} \\ b_{j,i} & b_{j,j} \end{pmatrix}$$

est strictement négatif, donc il existe un couple $(x_i, x_j) \neq (0, 0)$ tel que

$$(x_i \ x_j) B_0 \begin{pmatrix} x_i \\ x_j \end{pmatrix} < 0$$

et la matrice symétrique B n'est pas positive.

90. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, une matrice dont les valeurs propres sont strictement positives. On les note :

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$$

et on pose $\kappa_A = \sqrt{\lambda_n/\lambda_1}$.

90.1 Il existe une matrice orthogonale P telle que les matrices $P^{-1}AP$ et $P^{-1}A^{-1}P$ soient diagonales.

90.2 Quels que soient les réels y_1, \dots, y_n ,

$$\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} y_i^2 \right)$$

donc

$$\|X\|^2 \leq [(X^\top \cdot A \cdot X)(X^\top \cdot A^{-1} \cdot X)]^{1/2}$$

pour tout $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

90.3 En posant $Y = P^\top \cdot X = (y_1, \dots, y_n)$, on a :

$$(X^\top \cdot A \cdot X)(X^\top \cdot A^{-1} \cdot X) = \kappa_A^2 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_n} y_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_1}{\lambda_i} y_i^2 \right)$$

donc

$$\begin{aligned} [(X^\top \cdot A \cdot X)(X^\top \cdot A^{-1} \cdot X)]^{1/2} &\leq \frac{\kappa_A}{2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\lambda_i}{\lambda_n} + \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \right] y_i^2 \\ &\leq \frac{\kappa_A + \kappa_A^{-1}}{2} \|X\|^2. \end{aligned}$$

IV

Formes quadratiques

91. Soit E , un espace vectoriel réel (de dimension quelconque).

91.1 \Rightarrow Une application $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une **forme quadratique** lorsqu'il existe une application bilinéaire symétrique $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in E, \quad q(x) = \varphi(x, x).$$

91.2 \rightarrow L'ensemble des formes quadratiques sur E est un sous-espace vectoriel de l'espace des applications de E dans \mathbb{R} .

91.3 Si la dimension de E est finie, toute forme quadratique sur E est une application continue.

91.4 Si q est une forme quadratique sur E , alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \quad q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$$

et l'application

$$\varphi_q = [(x, y) \mapsto q(x + y) - q(x - y)] : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

est une forme bilinéaire symétrique.

91.5 \Rightarrow Soit $q : E \rightarrow \mathbb{R}$, une forme quadratique. L'unique forme bilinéaire symétrique $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in E, \quad q(x) = \varphi(x, x)$$

est la **forme bilinéaire symétrique associée à q** .

92. On peut définir des formes bilinéaires symétriques sur un espace vectoriel E , quel que soit le corps de base \mathbb{K} .

92.1 Le lien entre formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques n'est assuré que si la caractéristique du corps \mathbb{K} est différente de 2 (c'est-à-dire si on peut diviser par 2).

92.2 Seules les propriétés relatives au signe sont spécifiques au corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

93. Exemple fondamental

Soient f et g , deux formes linéaires sur E .

93.1 L'application

$$\psi = [(x, y) \mapsto f(x)g(y)] : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

est une forme bilinéaire sur E .

93.2 L'application

$$\varphi = [(x, y) \mapsto \varphi(x, y) + \varphi(y, x)] : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

est une forme bilinéaire symétrique sur E .

93.3 \rightarrow L'application

$$q = [x \mapsto f(x)g(x)] : E \rightarrow \mathbb{R}$$

est une forme quadratique sur E .

93.4 \triangleright Quels que soient les scalaires réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, quelles que soient les formes linéaires f_1, \dots, f_n sur E , l'application $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in E, \quad q(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k [f_k(x)]^2$$

est une forme quadratique sur E .

93.5 Si les formes linéaires f_1, \dots, f_n sont linéairement indépendantes, on dit que la forme quadratique q est **décomposée en carrés**.

94. Cône isotrope

Soit q , une forme quadratique sur E .

94.1 L'ensemble $C_q = \{x \in E : q(x) = 0\}$ est un cône de E .

94.2 \Rightarrow L'ensemble

$$\{x \in E : q(x) = 0\}$$

est le **cône isotrope** de la forme quadratique q .

94.3 \Rightarrow La forme quadratique q est dite **définie** lorsque son cône isotrope est réduit au vecteur nul.

94.4 Suite de [93.4] – Si la forme quadratique q est décomposée en carrés, alors le cône isotrope de q contient l'intersection des hyperplans $\text{Ker } f_k$ pour $1 \leq k \leq n$.

95. Dégénérescence

On considère une forme quadratique q et la forme bilinéaire symétrique φ qui lui est associée.

95.1 \Rightarrow Deux vecteurs x et y sont **conjugués** pour la forme φ lorsque $\varphi(x, y) = 0$.

95.2 \Rightarrow Le **conjugué** d'une partie $A \subset E$ est l'ensemble $A^0 \subset E$ défini par

$$A^0 = \{x \in E : \forall y \in A, \varphi(x, y) = 0\}.$$

95.3 Quelle que soit la partie A , le conjugué A^0 est un sous-espace de E .

95.4 \Rightarrow Un sous-espace vectoriel F de E est dit **non isotrope** pour la forme quadratique q lorsque

$$F \cap F^0 = \{0_E\}.$$

95.5 Le sous-espace F est non isotrope si, et seulement si, la restriction à F de la forme quadratique q est non dégénérée.

95.6 \Rightarrow Un sous-espace vectoriel F de E est dit **totalelement isotrope** pour la forme quadratique q lorsqu'il est contenu dans son conjugué :

$$F \subset F^0.$$

95.7 Le sous-espace E^0 est contenu dans le cône isotrope de q et totalelement isotrope.

95.8 \Rightarrow La forme quadratique q est dite **non dégénérée** lorsque le sous-espace

$$E^0 = \{x \in E : \forall y \in E, \varphi(x, y) = 0\}$$

est réduit au vecteur nul.

95.9 Si la forme quadratique q est définie [94.3], alors elle est non dégénérée.

96. Signe d'une forme quadratique

96.1 \Rightarrow Une forme quadratique q est **positive** lorsque

$$\forall x \in E, \quad q(x) \geq 0.$$

Elle est **définie positive** lorsque

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad q(x) > 0.$$

96.2 \Rightarrow Une forme quadratique est dite **négative** (resp. **définie négative**) lorsque la forme $-q$ est positive (resp. définie positive).

96.3 Une forme quadratique définie positive (ou définie négative) est définie au sens de [94.3].

Représentation matricielle

97. On identifie ici les espaces vectoriels \mathbb{R}^n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en ne distinguant pas le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ et la colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui représente x dans la base canonique de \mathbb{R}^n .

97.1 Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad X^\top \cdot A \cdot X = 0,$$

alors A est antisymétrique.

97.2 Si A et B sont deux matrices symétriques réelles telles que

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad X^\top \cdot A \cdot X = X^\top \cdot B \cdot X,$$

alors $A = B$.

97.3 \rightarrow L'application $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme quadratique sur \mathbb{R}^n si, et seulement si, il existe une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad q(X) = X^\top \cdot A \cdot X.$$

97.4 La forme quadratique q est positive (resp. définie positive) si, et seulement si, la matrice symétrique A est positive (resp. définie positive).

97.5 La forme bilinéaire symétrique associée à q est l'application

$$[(X, Y) \mapsto X^\top \cdot A \cdot Y].$$

98. Exemples

98.1 La forme quadratique $[(u, v, w) \mapsto u^2 + 3v^2 + 2w^2]$ est définie positive.

98.2 Forme de Lorentz

La forme quadratique

$$q = [(x, y, z, t) \mapsto c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2]$$

n'est ni positive, ni négative.

98.3 La forme quadratique q définie sur \mathbb{R}^3 par

$$\begin{aligned} q(u, v, w) &= 5u^2 + 2v^2 + w^2 - 2uv + 2uw + 2vw \\ &= (u + v + w)^2 + (2u - v)^2 \end{aligned}$$

est positive, sans être définie positive.

98.4 La forme quadratique q définie sur \mathbb{R}^3 par

$$q(u, v, w) = (u - v)^2 + (v - w)^2 + (w - u)^2$$

est positive, sans être définie positive : $q(u, v, w) = 0$ si, et seulement si, $u = v = w$.

98.5 La forme quadratique sur \mathbb{R}^2 définie par

$$\begin{aligned} \forall x = (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad q(x) &= u^2 + 6uv + v^2 \\ &= (u + 3v)^2 - 8v^2 \end{aligned}$$

n'est ni positive, ni négative et il existe des vecteurs $x \neq 0$ tels que $q(x) = 0$.

98.6 La forme quadratique sur \mathbb{R}^3 définie par

$$\forall x = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3, \quad q(x) = uv + vw + wu$$

est représentée par la matrice

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique de \mathbb{R}^3 . Elle n'est ni positive, ni négative.

99. Formule de changement de base

Soient $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_k)_{1 \leq k \leq n}$, deux bases de E . On note $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{C} .

99.1 Une forme bilinéaire symétrique φ sur E est représentée dans la base \mathcal{B} par la matrice

$$\Omega = (\varphi(e_k, e_\ell))_{1 \leq k, \ell \leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}).$$

Dans le cas d'un produit scalaire, on reconnaît la matrice de Gram du produit scalaire.

99.2 → La forme bilinéaire symétrique φ est représentée dans la base \mathcal{C} par la matrice

$$\Omega' = P^\top \cdot \Omega \cdot P.$$

99.3 ⇐ Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites **congruentes** lorsqu'il existe une matrice inversible $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$B = P^\top \cdot A \cdot P.$$

99.4 Deux matrices congruentes ont même rang.

99.5 La relation de congruence est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

100. Groupe orthogonal

Soient E , un espace vectoriel sur \mathbb{K} et φ , une forme bilinéaire symétrique sur E .

100.1 ⇐ Un automorphisme $u \in \text{GL}(E)$ est dit **φ -orthogonal** lorsque

$$\forall x, y \in E, \quad \varphi(u(x), u(y)) = \varphi(x, y).$$

100.2 → L'ensemble $O_\varphi(E)$ des automorphismes φ -orthogonaux de E est un sous-groupe du groupe $\text{GL}(E)$.

100.3 Supposons que E soit un espace de dimension finie et considérons une base $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ de E . On note $\Omega \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, la matrice qui représente φ dans cette base \mathcal{B} .

Un automorphisme u de E est φ -orthogonal si, et seulement si, sa matrice

$$M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$$

vérifie :

$$M^\top \cdot \Omega \cdot M = \Omega.$$

Existence d'une base conjuguée

101. Soient E , un espace vectoriel sur \mathbb{K} et φ , une forme bilinéaire symétrique sur E .

Pour x et y dans E , on notera $\langle x | \varphi | y \rangle$ au lieu de $\varphi(x, y)$. On notera donc

$$| \varphi | y \rangle$$

l'application partielle $[x \mapsto \langle x | \varphi | y \rangle]$.

102. On considère un sous-espace vectoriel F de E , en supposant que la dimension de F est finie.

102.1 Les espaces vectoriels F et $F^* = L(F, \mathbb{K})$ sont isomorphes.

102.2 Si le sous-espace F est non isotrope [95.4], alors l'application

$$[y \mapsto | \varphi | y \rangle]$$

est un isomorphisme de F sur F^* .

102.3 Dans ces conditions, pour tout vecteur $u_0 \in E$, il existe donc un, et un seul, vecteur $x_0 \in F$ tel que

$$\forall y \in F, \quad \langle u_0 | \varphi | y \rangle = \langle x_0 | \varphi | y \rangle$$

et $u_0 - x_0 \in F^\perp$.

102.4 → Pour tout sous-espace vectoriel F de E de dimension finie et non isotrope,

$$E = F \oplus F^\perp.$$

103. On suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps \mathbb{K} dont la caractéristique est différente de 2.

On considère une forme bilinéaire symétrique φ et la forme quadratique q associée à φ .

103.1 Notion de base conjuguée

Les vecteurs d'une base \mathcal{B} de E sont deux à deux conjugués si, et seulement si, la matrice de φ relative à \mathcal{B} est diagonale.

103.2 Si la forme quadratique q est identiquement nulle, alors toute base de E est conjuguée.

103.3 Sinon, il existe un vecteur ε_1 tel que $q(\varepsilon_1) \neq 0$ et la droite $D = \mathbb{K} \cdot \varepsilon_1$ est un sous-espace non isotrope :

$$E = \mathbb{K} \cdot \varepsilon_1 \oplus D^\perp.$$

Si $(\varepsilon_k)_{2 \leq k \leq n}$ est une base conjuguée de D^\perp , alors la famille

$$(\varepsilon_k)_{1 \leq k \leq n}$$

est une base conjuguée de E .

103.4 → Il existe une base de E conjuguée pour φ .

103.5 Toute matrice symétrique est congruente à une matrice diagonale.

Formes quadratiques sur un espace euclidien

104. Soit E , un espace euclidien.

104.1 Si $u \in \mathcal{S}(E)$ vérifie

$$\forall x \in E, \quad (x | u(x)) = 0,$$

alors u est l'endomorphisme nul.

104.2 → Une application $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une **forme quadratique** sur E lorsqu'il existe un endomorphisme auto-adjoint $u \in \mathcal{S}(E)$ tel que

$$\forall x \in E, \quad q(x) = (x | u(x)).$$

104.3 La forme quadratique q est positive (resp. définie positive) si, et seulement si, l'endomorphisme $u \in \mathcal{S}(E)$ est positif (resp. défini positif).

105. Exemples

Soit E , un espace euclidien.

105.1 Pour tout endomorphisme $u \in L(E)$, l'application q définie par

$$\forall x \in E, \quad q(x) = \|u(x)\|^2$$

est une forme quadratique positive sur E . Elle est définie positive si, et seulement si, l'endomorphisme u est injectif.

105.2 Pour tout endomorphisme $u \in L(E)$, l'application q définie par

$$\forall x \in E, \quad q(x) = (x | u(x))$$

est la forme quadratique sur E associée à $(u + u^*)/2 \in \mathcal{S}(E)$.

105.3 Soit q , une forme quadratique. Pour tout endomorphisme u de E , l'application $q \circ u$ est une forme quadratique.

105.4 Quels que soient les vecteurs a et b de E , les applications

$$[x \mapsto (a | x)^2] \quad \text{et} \quad q = [x \mapsto (a | x) \cdot (b | x)]$$

sont des formes quadratiques sur E . La forme q est associée à l'endomorphisme auto-adjoint u défini par

$$\forall y \in E, \quad u(y) = (b | y) \cdot a + (a | y) \cdot b.$$

105.5 L'application q définie par

$$\begin{aligned} q(P) &= \int_0^1 P(t)P''(t) dt \\ &= P(1)P'(1) - P(0)P'(0) - \int_0^1 [P'(t)]^2 dt \end{aligned}$$

est une forme quadratique sur $E = \mathbb{R}_n[X]$. Est-elle positive?

105.6 L'application q définie sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$q(M) = \text{tr}(M^\top M) + (\text{tr } M)^2$$

est une forme quadratique définie positive.

106. Décomposition canonique en carrés

On considère la forme quadratique q , associée à un endomorphisme auto-adjoint u de E .

106.1 Il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ de valeurs propres de u et, en notant λ_k , la valeur propre réelle associée au vecteur propre e_k ,

$$\forall x \in E, \quad q(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k (e_k | x)^2.$$

106.2 Cette décomposition permet de comparer la forme quadratique q à la norme euclidienne sur E .

$$\forall x \in E, \quad \left(\min_{1 \leq k \leq n} \lambda_k \right) \cdot \|x\|^2 \leq q(x) \leq \left(\max_{1 \leq k \leq n} \lambda_k \right) \cdot \|x\|^2$$

107. Forme quadratique décomposée en carrés

Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, des formes linéaires linéairement indépendantes sur E . La forme quadratique $\psi : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par [93.4]

$$\forall x \in E, \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k [\varepsilon_k(x)]^2$$

est positive si, et seulement si, tous les α_k sont positifs [4.44].

108. La définition [104.2] vaut également dans le cas où la dimension de l'espace E est infinie.

108.1 On considère l'application q définie sur $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ par

$$\forall f \in E, \quad q(f) = \int_0^1 f^2(t) dt.$$

1. L'application q est une forme quadratique sur E .
2. Existe-t-il une forme linéaire T sur E telle que $q = T^2$?
3. S'il existe des formes linéaires $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ linéairement indépendantes telles que

$$q \in \text{Vect}(\varepsilon_1^2, \dots, \varepsilon_n^2),$$

alors $\text{Ker } \varepsilon_1 \cap \dots \cap \text{Ker } \varepsilon_n = \{0_E\}$.

On sait [4.44] qu'il existe une famille $(u_k)_{1 \leq k \leq n}$ telle que

$$\forall 1 \leq i, k \leq n, \quad \varepsilon_i(u_k) = \delta_{i,k}.$$

Commenter.

108.2 Pour toute fonction $h \in E$, l'application définie par

$$\forall f \in E, \quad q_h = \int_0^1 f^2(t)h(t) dt$$

est une forme quadratique sur E . Condition sur h pour que q_h soit positive? définie positive?

Questions, exercices & problèmes
Perfectionnement
109. Exemples et contre-exemples

1. Exemples d'endomorphismes auto-adjoints? non auto-adjoints?
2. Exemples d'endomorphismes auto-adjoints positifs? définis positifs? non positifs?
3. Exemple d'endomorphisme u tel que $\det u = \pm 1$ et qui n'est pas une isométrie.
4. Si $\|\cdot\|$ désigne la norme associée au produit scalaire défini par

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \quad (P | Q) = \int_0^1 P(t)Q(t) dt,$$

alors $\|X^n\|$ tend vers 0 alors que la suite des fonctions $[t \mapsto t^n]$ ne converge pas simplement sur \mathbb{R} vers la fonction nulle. Comparer avec [8] et avec [7.154].

110. Méthodes

1. Comment déterminer l'adjoint d'un endomorphisme?
2. Comment vérifier qu'une matrice est orthogonale?
3. Soit $A \in O_3(\mathbb{R})$.
- 3.a Comment déterminer si A est une matrice de rotation?
- 3.b Comment déterminer un plan stable par A ?
4. Comment vérifier qu'un endomorphisme est une isométrie?
5. Comment vérifier qu'un endomorphisme est une projection orthogonale? une symétrie orthogonale?
6. Un endomorphisme u est représenté par la matrice A dans une base \mathcal{B} (qui n'est pas nécessairement une base orthonormée).
- 6.a Comment déterminer si u est auto-adjoint?
- 6.b Comment déterminer si u est une isométrie?

Approfondissement

111. Il existe une matrice $M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ telle que $\text{tr } M = a$ et $\det M = b$ si, et seulement si, $a^2 \geq 4b$.

112. Soient $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

112.1 S'il existe une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall 1 \leq k \leq p, \quad A_k \in \mathbb{R}[A],$$

alors les matrices A_k commutent deux à deux.

112.2 Si les matrices A_k commutent deux à deux, alors [123] il existe une matrice orthogonale P telle que $P^\top \cdot A_k \cdot P$ soit diagonale pour tout $1 \leq k \leq p$.

Il existe donc des polynômes Q_1, \dots, Q_p tels que

$$\forall 1 \leq k \leq p, \quad A_k = Q_k(A)$$

où $A = P \cdot \text{Diag}(1, 2, \dots, n) \cdot P^\top \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

113. Caractérisation des homothéties

On considère un espace euclidien E .

1. Si tout hyperplan de E est stable par u , alors l'adjoint u^* de u est une homothétie [12.66], donc u est une homothétie.
2. S'il existe un entier $2 \leq r < n$ tel que tout sous-espace de dimension r soit stable par u , alors tout hyperplan de E est stable par u .

114. Endomorphismes anti-symétriques

L'endomorphisme f d'un espace euclidien E est dit *anti-symétrique* lorsque

$$\forall x, y \in E, \quad (f(x) | y) = -(x | f(y)).$$

114.1 Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est anti-symétrique.
2. Pour tout $x \in E$, $(f(x) | x) = 0$.
3. La matrice A qui représente u dans une base orthonormée est anti-symétrique : $A^T = -A$.

114.2 On suppose ici que E est un espace euclidien orienté de dimension 3.

4. Pour tout $u \in E$, l'application $f_u = [x \mapsto u \wedge x]$ est anti-symétrique.

5. Pour tout endomorphisme anti-symétrique f , il existe un, et un seul, vecteur $u \in E$ tel que $f = f_u$.

6. L'endomorphisme f_u est diagonalisable si, et seulement si, $u = 0$.

7. Il existe [88] une base orthonormée de \mathbb{R}^3 constituée de vecteurs propres de f^2 . Quels sont les valeurs propres et les sous-espaces propres de f^2 ?

114.3 Soit $f \in L(E)$, un endomorphisme anti-symétrique d'un espace euclidien de dimension quelconque.

8. Si F est un sous-espace stable par f , alors F^\perp est aussi stable par F .

9. Le noyau et l'image de f sont supplémentaires et orthogonaux dans E .

$$E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$$

10. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, une racine du polynôme minimal de f , considéré comme un polynôme à coefficients complexes.

10.a Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice de u dans une base orthonormée \mathcal{B} , alors il existe un vecteur-colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = \lambda X$ et

$$|\lambda|^2 (\overline{X})^T \cdot X = (\overline{AX})^T \cdot (AX) = -\lambda^2 (\overline{X})^T \cdot X.$$

10.b Qu'en conclure si $\lambda \in \mathbb{R}$? Et si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$?

11. Le rang de f est pair et $\det(f) \geq 0$.

12. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

115. Décomposition QR

115.1 L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales et l'ensemble T_n^+ des matrices triangulaires supérieures dont les valeurs propres sont strictement positives sont des sous-groupes de $GL_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R}) \cap T_n^+ = \{I_n\}$.

115.2 Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

1. L'application

$$\varphi = [(X, Y) \mapsto X^T \cdot (A^T \cdot A) \cdot Y]$$

est un produit scalaire sur $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. La base canonique de E est-elle orthonormée pour ce produit scalaire ?

2. Il existe une base \mathcal{B} de E , orthonormée pour φ , telle que la matrice de passage P de la base canonique à la base \mathcal{B} appartienne à T_n^+ .

3. Il existe une matrice $R \in T_n^+$ telle que $A^T \cdot A = R^T \cdot R$.

4. Il existe un, et un seul, couple $(Q, R) \in O_n(\mathbb{R}) \times T_n^+$ tel que $A = QR$.

116. Soient E , un espace euclidien et u , un endomorphisme triangonalisable de E .

116.1 Il existe une base orthonormée \mathcal{B} de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire.

116.2 L'adjoint u^* de u est un polynôme en u si, et seulement si, u est auto-adjoint.

117. Une forme quadratique q telle que $q(x) \neq 0$ pour tout $x \neq 0$ est définie positive ou définie négative.

Pour aller plus loin

118. Questions pour réfléchir

1. Soit $(E, (\cdot | \cdot))$, un espace préhilbertien. Pour tout vecteur $a \in E$, la forme linéaire $\varphi_a = [x \mapsto (a | x)]$ est continue. Le théorème de Riesz [7.68.3] est-il encore vrai en dimension infinie ?

2. Si E est un espace réel de dimension finie et si $u \in L(E)$ est diagonalisable, alors il existe un produit scalaire sur E pour lequel u est un endomorphisme auto-adjoint.

3. Suite de [8] – La suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment $[a, b]$ de \mathbb{R} .

4. Étudier la structure du *cône isotrope* de $u \in L(E)$:

$$C_0(u) = \{x \in E : (x | u(x)) = 0\}$$

et comparer $C_0(u)$ au noyau de u .

5. Soit $u \in GL(E)$.

5.a Existe-t-il une structure euclidienne sur E pour laquelle u est une isométrie ?

5.b Étudier le cas où u est une symétrie.

119. Soit u , un endomorphisme de \mathbb{R}^3 muni de sa structure euclidienne orientée canonique.

1. Quels que soient x, y et z dans \mathbb{R}^3 ,

$$\begin{aligned} \text{Det}(u(x), y, z) + \text{Det}(x, u(y), z) + \text{Det}(x, y, u(z)) \\ = \text{tr}(u) \cdot \text{Det}(x, y, z). \end{aligned}$$

2. D'après [7.69.3], il existe un, et un seul, endomorphisme v de \mathbb{R}^3 tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad v(x \wedge y) = u(x) \wedge y + x \wedge u(y).$$

120. Étude d'une rotation en dimension 3 (variante de [21])

Dans un espace euclidien orienté de dimension 3, on considère une rotation u autour du vecteur unitaire n .

120.1 Pour toute base orthonormée directe $\mathcal{B} = (n, v, w)$ de E (obtenue en complétant le vecteur unitaire n),

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

120.2 D'après [20],

$$\forall x \in E, \quad (u - u^{-1})(x) = (2 \sin \theta) \cdot (n \wedge x)$$

120.3 Si $A \in SO_3(\mathbb{R})$ est la matrice relative à une base orthonormée directe \mathcal{B}_0 de la rotation u , alors il existe trois réels (p, q, r) tels que

$$\frac{1}{2}(A - A^T) = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\cos \theta = \frac{\text{tr } A - 1}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(n) = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}.$$

Comparer avec [21].

121. Structure euclidienne sur E^*

La structure euclidienne de E permet de définir une structure euclidienne naturelle sur son espace dual $E^* = L(E, \mathbb{R})$.

Pour tout $a \in E$, on pose $\varphi_a = [x \mapsto (a | x)]$.

1. Il existe un, et un seul, produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ sur E^* tel que

$$\forall (a, b) \in E \times E, \quad \langle \varphi_a | \varphi_b \rangle = (a | b)$$

et l'application $[a \mapsto \varphi_a]$ est une isométrie de $(E, (\cdot | \cdot))$ sur $(E^*, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

2. Une base \mathcal{B} de E est une base orthonormée pour $(\cdot | \cdot)$ si, et seulement si, sa base duale \mathcal{B}^* est une base orthonormée de E^* pour $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

122. On considère un espace euclidien $(E, (\cdot | \cdot))$.

1. Si $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E , alors il existe un, et un seul, endomorphisme auto-adjoint défini positif u tel que

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad \langle x | y \rangle = \langle x | u(y) \rangle.$$

2. Soit v , un endomorphisme de E auto-adjoint pour $(\cdot | \cdot)$. Alors v est auto-adjoint pour $\langle \cdot | \cdot \rangle$ si, et seulement si, il commute à l'endomorphisme $u : u \circ v = v \circ u$.

123. **Codiagonalisation de matrices symétriques [12.220]**

Soit $(A_i)_{i \in I}$, une famille de matrices symétriques réelles de même taille.

Il existe une matrice inversible P telle que toutes les matrices

$$P^{-1} A_i P$$

soient diagonales si, et seulement si, les matrices A_i commutent deux à deux.

124.1 Si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors il existe une matrice $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = R^2$ et

$$\text{tr}(PA) = \langle PR | R \rangle \leq \text{tr} A$$

pour toute matrice orthogonale P .

124.2 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, telle que

$$\forall P \in O_2(\mathbb{R}), \quad \text{tr}(PA) \leq \text{tr} A.$$

Alors la matrice A est symétrique.

124.3 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si

$$\forall P \in O_n(\mathbb{R}), \quad \text{tr}(PA) \leq \text{tr} A,$$

alors $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

125. **Factorisation d'une isométrie**

On considère un espace euclidien $(E, (\cdot | \cdot))$.

Toute isométrie de E est décomposable en un nombre fini de réflexions et le nombre de réflexions qui apparaissent dans cette factorisation peut être choisi inférieur à $\dim E$.

125.1 Soit $f \in O(E)$, tel que $f \neq I_E$. Il existe $u \neq 0_E$ tel que $f(u) \neq u$ et on pose $v = f(u)$.

1. Il existe une réflexion r telle que $r(u) = v$.
2. Pour tout $x \in E$ tel que $f(x) = x$,

$$(x | u - v) = 0 \quad \text{et} \quad r(x) = x.$$

3.

$$\dim \text{Ker}(r \circ f - I_E) > \dim \text{Ker}(f - I_E)$$

125.2 On construit une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'isométries de E en posant $f_0 = f$ et, pour tout $p \geq 1$,

- si $f_{p-1} = I_E$, alors $f_p = I_E$;
- sinon, alors $f_p = r_p \circ f_{p-1}$, où r_p est une réflexion telle que

$$\dim \text{Ker}(f_p - I_E) > \dim \text{Ker}(f_{p-1} - I_E).$$

Il existe un entier $p \leq \dim E$ tel que $f_p = I_E$. Que peut-on en déduire sur f ?

125.3 **Applications**

4. Décomposition d'une rotation du plan en produit de deux réflexions.

5. Classification géométrique des isométries de l'espace en fonction du sous-espace fixe (identité, réflexions, rotations, composées d'une rotation et d'une réflexion qui commutent).

126. **Matrices orthosesemblables**

La matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *orthosesemblable* à la matrice A lorsque

$$\exists P \in O_n(\mathbb{R}), \quad B = P^\top \cdot A \cdot P.$$

1. Cette relation est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Deux matrices orthosesemblables sont semblables. La réciproque est-elle vraie?
3. Si A est symétrique et si B est orthosesemblable à A , alors B est symétrique.

4. Que dire d'une matrice orthosesemblable à une matrice diagonale?

5. Interpréter géométriquement la notion de matrices orthosesemblables.

127. **Réduction simultanée de deux formes quadratiques**

127.1 **Aspects théoriques**

L'espace \mathbb{R}^n est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ représenté par la matrice $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ dans la base canonique. On considère une forme quadratique q , représentée par la matrice $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans la base canonique.

1. Il existe une matrice diagonale D_1 et une matrice P_1 telles que

$$P_1^\top \cdot P_1 = I_n \quad \text{et} \quad B = P_1^\top \cdot D_1 \cdot P_1.$$

2.a Il existe un, et un seul, endomorphisme auto-adjoint u de \mathbb{R}^n tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad q(x) = \langle x | u(x) \rangle.$$

2.b La matrice de u relative à la base canonique est $A^{-1}B$.

2.c Il existe une matrice diagonale D_2 et une matrice P_2 telles que

$$P_2^\top \cdot P_2 = A \quad \text{et} \quad B = P_2^\top \cdot D_2 \cdot P_2.$$

En outre, $A^{-1} \cdot B = P_2^{-1} \cdot D_2 \cdot P_2$. Discuter l'unicité des matrices P_2 et D_2 .

2.d La base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de \mathbb{R}^n représentée par la matrice P_2^{-1} dans la base canonique est orthonormée pour $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et

$$\forall i \neq j, \quad \langle \varepsilon_i | u(\varepsilon_j) \rangle = 0.$$

127.2 **Exemples**

L'espace \mathbb{R}^2 est muni du produit scalaire canonique $(\cdot | \cdot)$.

3. Les formes quadratiques définies par

$$\forall x = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} q_1(x) = x^2 + 2xy + 5y^2 \\ q_2(x) = x^2 + 2xy + 3y^2 \end{cases}$$

sont définies positives.

4. La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

est semblable à $\text{Diag}(1, 1/2)$.

5. Il existe une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de \mathbb{R}^2 , orthonormée pour $(\cdot | \cdot)$, telle que

$$q_1(x) = (3 - \sqrt{5}) (\varepsilon_1 | x)^2 + (3 + \sqrt{5}) (\varepsilon_2 | x)^2$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^2$. Par suite,

$$\min_{x \neq 0} \frac{q_1(x)}{(x | x)} = 3 - \sqrt{5} \quad \text{et} \quad \max_{x \neq 0} \frac{q_1(x)}{(x | x)} = 3 + \sqrt{5}.$$

6. On note $\langle \cdot | \cdot \rangle$, le produit scalaire associé à q_1 .

6.a Les vecteurs $u = (1, 0)$ et $v = (-1/2, 1/2)$ forment une base de \mathbb{R}^2 qui est orthonormée pour $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

6.b La forme quadratique définie par

$$\forall x = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad q_2(x) = x^2 + 2xy + 3y^2$$

est représentée par la matrice $\text{Diag}(1, 1/2)$ dans la base (u, v) , donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad q_2(x) = \langle u | x \rangle^2 + \frac{1}{2} \langle v | x \rangle^2$$

et

$$\min_{x \neq 0} \frac{q_2(x)}{q_1(x)} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \max_{x \neq 0} \frac{q_2(x)}{q_1(x)} = 1.$$

128. L'application $q : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$q(x) = \sum_{k=1}^n x_k^2 - \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k^2$$

(avec $1 \leq n < n+p \leq d$) est une forme quadratique sur \mathbb{R}^d .

128.1 Sa matrice dans la base canonique (e_1, \dots, e_d) de \mathbb{R}^d est égale à

$$\text{Diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_n, \underbrace{-1, \dots, -1}_p, \underbrace{0, \dots, 0}_{d-(n+p)}).$$

128.2 Tout sous-espace G dont la dimension est strictement supérieure à n rencontre le sous-espace

$$F_0 = \text{Vect}(e_{n+1}, \dots, e_d),$$

au sens où $\dim(F_0 \cap G) \geq 1$.

128.3 Si F est un sous-espace tel que la restriction de q à F soit définie positive :

$$\forall x \in F \setminus \{0\}, \quad q(x) > 0$$

alors $\dim F \leq n$.

129. L'espace \mathbb{R}^d étant muni de sa structure euclidienne canonique, on note $S^1(F)$, la sphère unité de chaque sous-espace vectoriel $F \subset \mathbb{R}^d$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad x \in S^1(F) \iff \begin{cases} x \in F \\ \|x\| = 1 \end{cases}.$$

On considère une famille croissante de nombre réels :

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_d.$$

1. L'application $q : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad q(x) = \sum_{k=1}^d a_k x_k^2$$

est une forme quadratique sur \mathbb{R}^d .

2.

$$\min_{x \in S^1(\mathbb{R}^d)} q(x) = a_1 \quad \max_{x \in S^1(\mathbb{R}^d)} q(x) = a_d$$

3. On note V_n , l'ensemble des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^d de dimension $1 \leq n \leq d$.

3.a

→[128]

$$\forall F \in V_n, \quad a_n \leq \sup_{x \in S^1(F)} q(x) \leq a_d$$

3.b Pour tout $1 \leq n \leq d$,

$$\min_{F \in G_n} \sup_{x \in S^1(F)} q(x) = a_n \quad \text{et} \quad \max_{F \in G_n} \sup_{x \in S^1(F)} q(x) = a_d.$$

130. Signature d'une forme quadratique

On se donne des formes linéaires $f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q$ linéairement indépendantes dans E et des scalaires réels strictement positifs $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$. On considère la forme quadratique Q définie par

$$\forall x \in E, \quad Q(x) = \sum_{k=1}^p \alpha_k [f_k(x)]^2 - \sum_{k=1}^q \beta_k [g_k(x)]^2.$$

1. Il existe un sous-espace F_+ de dimension p tel que la restriction de Q à F_+ soit une forme quadratique définie positive.

2. Si $\dim F > p$, alors il existe $x \in F$, non nul, tel que $Q(x) \leq 0$.

3. Soit A , la matrice de Q relative à une base \mathcal{B} . Alors l'entier p (resp. l'entier q) est le nombre de valeurs propres strictement positives (resp. strictement négatives) de A .

4. Relier le couple (p, q) au rang de Q .

5. Que dire du couple (p, q) lorsque Q est positive ? définie positive ? négative ? définie négative ? dégénérée ? Le couple (p, q) est la **signature** de la forme quadratique Q .

131. Formes symplectiques

Soit E , un espace vectoriel réel de dimension finie n .

131.1 On appelle **forme symplectique** sur E toute application bilinéaire $\omega : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ antisymétrique :

$$\forall x, y \in E, \quad \omega(x, y) = -\omega(y, x)$$

et non dégénérée :

$$[\forall y \in E, \quad \omega(x, y) = 0] \implies x = 0_E.$$

131.2 Soit $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$, une base de E . Une forme symplectique ω sur E est représentée dans la base \mathcal{B} par la matrice

$$\Omega = (\omega(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Quels que soient les vecteurs x et y de E ,

$$\omega(x, y) = X^\top \cdot \Omega \cdot Y$$

où les colonnes X et Y représentent respectivement x et y dans la base \mathcal{B} .

2. La matrice Ω est antisymétrique et inversible, donc la dimension n est paire.

131.3 Pour toute partie $F \subset E$, l'ensemble

$$F^\omega = \{x \in E : \forall y \in F, \quad \omega(x, y) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de E .

131.4 On suppose ici que $E = \mathbb{R}^2$ et on considère la matrice

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(On identifiera chaque vecteur de \mathbb{R}^2 à la colonne qui le représente dans la base canonique de \mathbb{R}^2 .)

3. L'application $\omega = [(x, y) \mapsto x^\top \cdot \Omega \cdot y]$ est une forme symplectique sur \mathbb{R}^2 .

4. Pour toute droite vectorielle $D \subset \mathbb{R}^2$,

$$D^\omega = D.$$

131.5 Plus généralement, quelle que soit la forme symplectique ω sur E , toute droite vectorielle $D \subset E$ est contenue dans le sous-espace D^ω .