# 16
# Espaces euclidiens (deuxième partie)

**1.** ✍ *Un* **espace euclidien** *est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.*

**2.** Dans la suite de ce chapitre, sauf indication contraire, $\big(E,\,(\,\cdot\,|\,\cdot\,)\big)$ désigne toujours un espace euclidien.

**3.** Si l'endomorphisme $u \in \mathrm{L}(E)$ et les vecteurs $x$ et $y$ de $E$ sont représentés dans une *base orthonormée* de $E$ par la matrice $A$ et par les colonnes $X$ et $Y$, alors

$$X^\top.A.Y = \langle\, x \,|\, u(y) \,\rangle \qquad\qquad X^\top.X = \|x\|^2.$$

**4.** Quelle que soit la matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, quelles que soient les colonnes $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $Y = (y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$,

$$X^\top.A.Y = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{i,j} y_j.$$

Si la matrice $A$ est diagonale, alors

$$X^\top.A.X = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2.$$

**5. Rappels sur la réduction des endomorphismes**
Soit $u \in \mathrm{L}(E)$.
**5.1** Si $F$ et $G$ sont deux sous-espaces vectoriels stables par $u$, alors $F+G$ et $F\cap G$ sont stables par $u$.
**5.2** Si le sous-espace $F$ est stable par l'endomorphisme $u$, alors son orthogonal $F^\perp$ est stable par l'adjoint $u^*$.
**5.3** Si $u$ est inversible, alors $u^{-1}$ est un polynôme en $u$ et $u$ est un polynôme en $u^{-1}$ :

$$u^{-1} \in \mathbb{K}[u], \qquad u \in \mathbb{K}[u^{-1}].$$

**5.4** Si $P$ est un polynôme annulateur de $u$, irréductible et unitaire, alors $P$ est le polynôme minimal de $u$.
**5.5** Si le produit $PQ$ est un polynôme annulateur de $u$ et si $P(u)$ est injectif, alors

$$\forall\, x \in E, \quad (PQ)(u)(x) = 0_E = P(u)\big(Q(u)(x)\big)$$

et $Q$ est un polynôme annulateur de $u$.
**5.6** Si $P$ est un diviseur non constant du polynôme minimal de $u$, alors le sous-espace $\mathrm{Ker}\,P(u)$ contient un vecteur $x_0 \neq 0_E$.
**5.7** L'endomorphisme $u$ n'a pas de vecteur propre dans le sous-espace vectoriel

$$F = \Big(\bigoplus_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{Ker}(u-\lambda\,\mathrm{I}_E)\Big)^\perp.$$

Par suite, si $F$ est stable par $u$, alors le spectre de l'endomorphisme $u_F$ induit par restriction de $u$ à $F$ est vide.

**Entraînement**

**6.** Si $F$ et $G$ sont deux sous-espaces orthogonaux de $E$, alors

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} G \overset{\perp}{\oplus} (F^\perp \cap G^\perp).$$

On peut exprimer les trois projections relatives à cette décomposition en somme directe en fonction d'une base orthonormée de $F$ et d'une base orthonormée de $G$.

**7.** Soit $(y_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$, une famille de vecteurs de $E$. Les formes linéaires $\varphi_k = [\,x \mapsto (\,y_k \,|\, x\,)\,]$ sont liées dans l'espace dual $E^* = \mathrm{L}(E,\mathbb{R})$ si, et seulement si, la famille $(y_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ est liée et $\mathrm{rg}(\varphi_k)_{1\leqslant k\leqslant r} = \mathrm{rg}(y_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$.

**8.** Soit $(\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_d)$, une base de $E = \mathbb{R}_d[X]$ qui est orthonormée pour le produit scalaire $\varphi$. On considère une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $E$ telles que $\|P_n\|$ tende vers 0.
1.
$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant d, \quad (\,\varepsilon_k \,|\, P_n\,) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
2.
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^{d} (\,\varepsilon_k \,|\, P_n\,)\,\varepsilon_k(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

**9.** Soit $(E,\,\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle)$, un espace préhilbertien réel.
**9.1** Quel que soit le sous-espace $F$, le sous-espace $F^\perp$ est fermé.
**9.2** Si $E = F \oplus F^\perp$, alors $F$ est fermé.

## I
## Réduction des isométries

### I.1 Rappels

**10.** Un endomorphisme $u$ de $E$ est une ***isométrie*** (ou un ***automorphisme orthogonal***) lorsque

$$\forall\, x \in E, \qquad \big\|u(x)\big\| = \|x\|.$$

**10.1** ➙ *Un endomorphisme $u$ de $E$ est une isométrie si, et seulement si, il conserve le produit scalaire :*

$$\forall\,(x,y) \in E\times E, \quad \big(\,u(x)\,\big|\,u(y)\,\big) \;=\; (\,x\,|\,y\,).$$

**10.2** Une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est ***orthogonale*** si, et seulement si,

$$M^\top.M = I_n$$

c'est-à-dire si

$$M.M^\top = I_n.$$

**10.3** ➙ *Soit $u \in \mathrm{L}(E)$, représenté par la matrice $M$ dans une base orthonormée de $E$. L'endomorphisme $u$ est une isométrie si, et seulement si, la matrice $M$ est orthogonale.*
**10.4** ➙ **Caractérisations des matrices orthogonales**
*Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Les propositions suivantes sont équivalentes.*
1. *La matrice $M$ est orthogonale.*
2. *La matrice $M$ est inversible et $M^{-1} = M^\top$.*
3. *La matrice $M$ représente une isométrie dans une base orthonormée de $E$.*
4. *La matrice $M$ est la matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée.*
5. *Les colonnes de la matrice $M$ forment une base de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est orthonormée pour le produit scalaire canonique.*
6. *Les lignes de la matrice $M$ forment une base de $\mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ qui est orthonormée pour le produit scalaire canonique.*

**10.5** Le déterminant d'une matrice orthogonale (resp. d'une isométrie) est égal à $\pm1$. Les ***rotations*** sont les isométries dont le déterminant est égal à 1.

**11.** ➙ **Stabilité de l'orthogonal [7.106.3]**
*Si $u$ est une isométrie de $E$ et si $V$ est un sous-espace stable par $u$, alors l'orthogonal $V^\perp$ est stable par $u$.*

**12. Spectre d'une isométrie**
**12.1** ➙ *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de $u \in O(E)$, alors $\lambda = \pm1$.*
**12.2** Considérée comme une matrice *réelle*, une matrice orthogonale ne peut admettre comme valeurs propres que 1 et $-1$.
**12.3** Les valeurs propres d'une matrice orthogonale considérée comme une matrice *complexe* sont des nombres complexes de module 1.

**13.** Soit $u \in O(E)$.
On considère les sous-espaces vectoriels

$$V_+ = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{I}_E) \quad \text{et} \quad V_- = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{I}_E).$$

**13.1** Les sous-espaces vectoriels $V_+$ et $V_-$ sont orthogonaux.
**13.2** Les sous-espaces

$$V_+ \overset{\perp}{\oplus} V_- \quad \text{et} \quad F = \big(V_+ \overset{\perp}{\oplus} V_-\big)^\perp$$

sont stables par $u$.
**13.3** Si $x$ est un vecteur non nul de $F$, alors le sous-espace $\mathrm{Vect}(x, u(x))$ est un plan.
**13.4** Si $\dim E = 3$, alors $\dim F \leqslant 2$.

### I.2 Isométries en dimension $n \geqslant 3$

**14.** *Suite de* **[13]** – Le sous-espace $F = (V_+ \oplus V_-)^\perp$ est stable par $u$. On suppose qu'il existe un entier $k$ tel que $2k \leqslant \dim F$ et des plans $P_1, \ldots, P_k$ contenus dans $F$, deux à deux orthogonaux et stables par $u$.
**14.1** Si $G$ est un sous-espace vectoriel de $F$, alors

$$F = G \overset{\perp}{\oplus} (F \cap G^\perp) = G \overset{\perp}{\oplus} (V_+ \overset{\perp}{\oplus} V_- \overset{\perp}{\oplus} G)^\perp.$$

**14.2** Si $\dim F > 2k$, alors le sous-espace vectoriel

$$F_{k+1} = \big[(V_+ \overset{\perp}{\oplus} V_-) \overset{\perp}{\oplus} (P_1 \overset{\perp}{\oplus} P_2 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} P_k)\big]^\perp$$

est stable par $u$ [**7.106.3**] et contenu dans $F$, donc $\dim F \geqslant 2k+2$.
**14.3** Dans ce cas, l'endomorphisme $u_{k+1}$ induit par restriction de $u$ à $F_{k+1}$ est une isométrie qui n'a pas de valeurs propres réelles et son polynôme minimal admet un diviseur $\mu_{k+1}$ irréductible de degré 2.
**14.4** Si $x_{k+1}$ est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}\big(\mu_{k+1}(u_{k+1})\big)$, alors

$$P_{k+1} = \mathrm{Vect}(x_{k+1}, u(x_{k+1}))$$

est un plan stable par $u$, contenu dans $F$ et orthogonal aux plans $P_1, \ldots, P_k$.

**15.** ➙ *Soit $u \in O(E)$. Il existe des plans vectoriels $P_1, \ldots, P_d$, stables par $u$ et deux à deux orthogonaux tels que*

$$E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{I}_E) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}(u + \mathrm{I}_E) \overset{\perp}{\oplus} \Big( \bigoplus_{1 \leqslant k \leqslant d}^{\perp} P_k \Big).$$

**16.** ➙ **Traduction matricielle**
*En notant $p = \dim V_+$ et $q = \dim V_-$, il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $E$ et des réels $0 < \omega_1, \ldots, \omega_d < \pi$ tels que*

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{Diag}\big(I_p, -I_q, R(\omega_1), \ldots, R(\omega_d)\big).$$

*L'entier $q$ est pair si, et seulement si, $u$ est une rotation.*

#### Classifications des isométries vectorielles de l'espace

**17.** **Selon la dimension du sous-espace fixe**
Si $\dim E = 3$, on peut classer les isométries de l'espace en fonction de la dimension du sous-espace fixe $V_+ = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{I}_E)$.
**17.1** Si $\dim V_+ = 3$, alors $u = \mathrm{I}_E$.
**17.2** Si $\dim V_+ = 2$, alors $u$ est une réflexion représentée dans une base orthonormée convenable par la matrice

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

**17.3** Si $\dim V_+ = 1$, alors $u$ est une rotation et il existe un angle $0 < \theta \leqslant \pi$ tel que la matrice de $u$ soit

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix}$$

dans une base orthonormée convenable.
**17.4** Si $\dim V_+ = 0$, alors il existe $0 < \theta \leqslant \pi$ tel que, dans une base orthonormée convenable, la matrice de $u$ soit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cette isométrie est la composée d'une rotation et d'une réflexion qui commutent.

**18.** **Isométries diagonalisables**
En dimension 3, les isométries diagonalisables sont les suivantes.

- L'identité $\mathrm{I}_E$.
- Les réflexions.
- Les rotations d'angle $\theta = \pi$, c'est-à-dire les ***demi-tours d'axe*** $V_+$, appelés aussi ***symétries axiales***.
- La ***symétrie centrale*** $-\mathrm{I}_E$.

**19.** **Selon le déterminant**
Si $\dim E = 3$, on distingue :

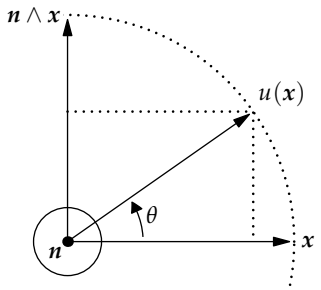
- Les rotations ($\det u = 1$) ;
- Les réflexions et les composées d'une rotation et d'une réflexion ($\det u = -1$).

### I.3 Méthodes pratiques

#### Matrice d'une rotation en dimension 3

**20.** Soient $\theta$, un réel ; $\boldsymbol{n}$, un vecteur unitaire d'un espace euclidien orienté $E$ de dimension 3 et $u \in \mathrm{SO}(E)$, la rotation d'angle $\theta$ autour de la droite vectorielle dirigée et orientée par $\boldsymbol{n}$.
**20.1** On a : $u(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n}$ et

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in (\mathbb{R} \cdot \boldsymbol{n})^\perp, \quad u(\boldsymbol{x}) = \cos\theta \cdot \boldsymbol{x} + \sin\theta \cdot (\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{x})$$




**20.2** Plus généralement,

$$\begin{aligned} \forall\, \boldsymbol{x} \in E, \quad u(\boldsymbol{x}) = {} & (\,\boldsymbol{n}\,|\,\boldsymbol{x}\,) \cdot \boldsymbol{n} + \cos\theta \cdot (\boldsymbol{x} - (\,\boldsymbol{n}\,|\,\boldsymbol{x}\,) \cdot \boldsymbol{n}) \\ & + \sin\theta \cdot (\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire la matrice de $u$ dans une base orthonormée directe quelconque.

#### Analyse d'une rotation en dimension 3

**21.** Soit $u$, une isométrie de $\mathbb{R}^3$ représentée dans une base orthonormée directe par une matrice orthogonale $A \in O_3(\mathbb{R})$ :

$$A^\top . A = I_3.$$

**21.1** On vérifie qu'il s'agit d'une matrice de rotation en calculant une matrice colonne $N \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$AN = N \qquad \text{et} \qquad N^\top.N = 1.$$

Cette colonne représente un vecteur unitaire $\boldsymbol{n}$ qui dirige l'axe de la rotation $u$.
Il reste à déterminer le réel $\theta$ (unique modulo $2\pi$) tel que $u$ soit la rotation d'angle $\theta$ autour de la droite orientée par $\boldsymbol{n}$.
**21.2** On choisit une matrice colonne $V \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui représente un vecteur unitaire $\boldsymbol{v}$ orthogonal à $\boldsymbol{n}$ :

$$N^\top.V = 0, \qquad V^\top.V = 1.$$

**21.3** Avec $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{v}$, la famille $\mathscr{B}_0 = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ est une base orthonormée directe. La matrice de $u$ relative à cette base est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $\operatorname{tr}(A) = 1 + 2\cos\theta$ et

$$\det(N, V, AV) = \det_{\mathscr{B}_0}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}, u(\boldsymbol{v})) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cos\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta \end{vmatrix} = \sin\theta.$$

**21.4** Une autre méthode d'étude est présentée au **[120]**.

## Entraînement

**22. Questions pour réfléchir**

1. Une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det M = \pm 1$ est-elle une matrice orthogonale ?

2.a La matrice $I_n$ est une matrice de rotation.

2.b La matrice $-I_n$ est-elle une matrice de rotation ?

3. Si $\det M = 1$, la matrice $M$ est-elle une matrice de rotation ?

4. Si $\dim E = 3$, quelles symétries orthogonales sont aussi des rotations ?

5. Une réflexion peut-elle être une rotation ?

6. Matrice d'une symétrie orthogonale relative à une base orthonormée quelconque ; à une base orthonormée adaptée aux sous-espaces propres.

7. Si une isométrie $u \in O(E)$ est diagonalisable, alors $u$ est une symétrie.

8. Expliciter une matrice orthogonale $P$ telle que

$$\operatorname{Diag}(1, 1, -1) = P^\top.\operatorname{Diag}(-1, 1, 1).P.$$

Est-il possible de choisir $P$ de telle sorte que $\det P = 1$ ?

9. *Suite de* **[17]** –

9.a Les matrices $R_x(\theta)$ et $R_x(-\theta)$ sont-elles semblables ?

9.b Étudier l'existence d'une matrice $P \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$R_x(-\theta) = P^\top.R_x(\theta).P.$$

Interpréter géométriquement.

10. *Suite de* **[20]** – Si $u \neq \mathrm{I}_E$, alors il n'y a que deux couples

$$(\boldsymbol{n}, \theta) \in E \times [-\pi, \pi]$$

possibles et ils sont opposés. Interpréter géométriquement.

11. *Suite de* **[21]** – Si $A \in O_3(\mathbb{R})$ et si l'équation $AN = N$ n'a que le vecteur $N = 0$ pour solution, que dire de la matrice $A$ ?

**23.** Un endomorphisme $u$ de $E$ tel que

$$u \circ u^* \circ u = u$$

induit une isométrie de $F = (\operatorname{Ker} u)^\perp$ sur $u_*(F)$.

**24. Matrices de rotation**
L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne orientée canonique. Les matrices suivantes représentent, dans la base canonique, la rotation d'angle $\theta$ autour de la droite vectorielle *orientée* par le vecteur $\boldsymbol{n}$. →**[20]**, **[21]**

**24.1** Pour $\theta = \pi/3$ et $\boldsymbol{n} = (1, -1, 1)$ :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**24.2** Pour $\theta = \pi/3$ et $\boldsymbol{n} = (1, 1, 0)$ :

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

**24.3** Pour $e^{i\theta} = \frac{3+4i}{5}$ et $\boldsymbol{n} = (0, -1, 2)$ :

$$\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 15 & -8\sqrt{5} & -4\sqrt{5} \\ 8\sqrt{5} & 17 & -4 \\ 4\sqrt{5} & -4 & 23 \end{pmatrix}$$

**24.4** Pour $e^{i\theta} = \frac{4+3i}{5}$ et $\boldsymbol{n} = (\sqrt{2}, 0, 1)$ :

$$\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 14 & -3\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 3\sqrt{3} & 12 & -3\sqrt{6} \\ \sqrt{2} & 3\sqrt{6} & 13 \end{pmatrix}$$

**24.5** Pour $\theta = \pi/6$ et $\boldsymbol{n} = (1, 0, -1)$ :

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & \sqrt{2} & -2+\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ -2+\sqrt{3} & \sqrt{2} & 2+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

**24.6** Pour $\theta = 2\pi/3$ et $\boldsymbol{n} = (1, 0, 2)$ :

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{15} & 6 \\ 2\sqrt{15} & -5 & -\sqrt{15} \\ 6 & \sqrt{15} & 7 \end{pmatrix}$$

**24.7** Pour $\theta = \pi/2$ et $\boldsymbol{n} = (1, 1, 1)$ :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

**24.8** Pour $e^{i\theta} = \frac{1+2i}{\sqrt{5}}$ et $\boldsymbol{n} = (0, 1, 1)$ :

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & -2\sqrt{10} & 2\sqrt{10} \\ 2\sqrt{10} & 5+\sqrt{5} & 5-\sqrt{5} \\ -2\sqrt{10} & 5-\sqrt{5} & 5+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

**24.9** Pour $\theta = 3\pi/4$ et $\boldsymbol{n} = (-2, 0, 1)$ :

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 8-\sqrt{2} & -\sqrt{10} & -4-2\sqrt{2} \\ \sqrt{10} & -5\sqrt{2} & 2\sqrt{10} \\ -4-2\sqrt{2} & -2\sqrt{10} & 2-4\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

**25.** Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$. La matrice

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} 1+\theta\cos 2\theta & -\theta\sin 2\theta \\ -\theta\sin 2\theta & 1-\theta\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

**26.** Soient $u \in O(E)$ et $v = u - \mathrm{I}_E$.

**26.1** Comme $\operatorname{Ker} v = (\operatorname{Im} v)^\perp$, pour tout vecteur $x \in E$, il existe deux vecteurs $y \in \operatorname{Ker} v$ et $z \in E$ tels que

$$x = y + v(z) \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \|y\|^2 + \|v(z)\|^2.$$

Le couple $(y, z)$ est-il unique ? Que valent $u(y)$ et $\|u(z)\|$ ?

**26.2** La suite de terme général

$$x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u^k(x)$$

converge vers le projeté orthogonal de $x$ sur $\operatorname{Ker} v$.

**27.** Soient $A$ et $B$, deux matrices de $\mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ telles que

$$A^\top.A = B^\top.B.$$

On note $f$ (resp. $g$), l'application linéaire de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^p$ canoniquement associée à la matrice $A$ (resp. à la matrice $B$). Les espaces $\mathbb{R}^q$ et $\mathbb{R}^p$ sont munis de leurs structures euclidiennes canoniques respectives.

**27.1** Quels que soient les vecteurs $x$ et $y$ de $\mathbb{R}^q$,

$$\big\langle f(x) \,\big|\, f(y) \big\rangle = \big\langle g(x) \,\big|\, g(y) \big\rangle .$$

**27.2** Les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker} g$ sont égaux.

**27.3** Si $\big(f(x_k)\big)_{1\leqslant k\leqslant r}$ est une base orthonormée de $\operatorname{Im} f$, alors $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^q$ et $\big(g(x_k)\big)_{1\leqslant k\leqslant r}$ est une base orthonormée de $\operatorname{Im} g$.

**27.4** Il existe une matrice orthogonale $U \in O_p(\mathbb{R})$ telle que $A = UB$.

# II

## Théorème spectral

**28. Rappels**

On considère un espace euclidien $E$ dont le produit scalaire est noté $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$.

**28.1** L'***adjoint*** d'un endomorphisme $u$ de $E$ est l'unique endomorphisme $u^*$ de $E$ tel que

$$\forall\, (x, y) \in E \times E, \quad \big(\, x \,\big|\, u(y) \,\big) = \big(\, u^*(x) \,\big|\, y \,\big).$$

**28.2** Un endomorphisme $u$ de $E$ est dit ***auto-adjoint*** (ou ***symétrique***) lorsqu'il est égal à son adjoint $u^*$, c'est-à-dire :

$$\forall\, (x, y) \in E \times E, \quad \big(\, u(x) \,\big|\, y \,\big) = \big(\, x \,\big|\, u(y) \,\big).$$

**28.3** En général, un projecteur $p$ possède deux sous-espaces propres : son noyau

$$\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker}(p - 0 \cdot \mathrm{I}_E) = \operatorname{Im}(\mathrm{I}_E - p)$$

et son image

$$\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(\mathrm{I}_E - p) = \operatorname{Ker}(p - 1 \cdot \mathrm{I}_E).$$

Ces sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans $E$ :

$$E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$$

et la décomposition de chaque vecteur est connue :

$$\forall\, x \in E, \qquad x = \big[x - p(x)\big] + p(x).$$

**28.4** Par définition, un projecteur $p \in \mathrm{L}(E)$ est une ***projection orthogonale*** si, et seulement si, les deux sous-espaces vectoriels

$$\operatorname{Ker} p \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{I}_E)$$

sont orthogonaux. On connaît alors une décomposition de $E$ en somme directe orthogonale :

$$E = \operatorname{Ker} p \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Ker}(p - \mathrm{I}_E).$$

**Propriétés des endomorphismes auto-adjoints**

**29.** ➙ *Un projecteur $p \in \mathrm{L}(E)$ est une projection orthogonale si, et seulement si, l'endomorphisme $p$ est auto-adjoint.*

**30.** ➙ *S'il existe une base orthonormée de vecteurs propres pour $u$, alors $u$ est un endomorphisme auto-adjoint.*

**31. Sous-espaces stables**

**31.1** ➙ *L'endomorphisme induit par restriction de $u \in \mathcal{S}(E)$ à un sous-espace $F$ stable par $u$ est un endomorphisme auto-adjoint de $F$.*

**31.2** Si $u(x)$ et $y$ sont orthogonaux, alors $x$ et $u(y)$ sont orthogonaux.

**31.3** ➙ *Si $u$ est un endomorphisme auto-adjoint de $E$, alors*

$$E = \operatorname{Ker} u \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} u.$$

**31.4** ➙ *Les sous-espaces propres d'un endomorphisme auto-adjoint sont deux à deux orthogonaux.*

**31.5** ➙ *Si $F$ est un sous-espace stable par $u \in \mathcal{S}(E)$, alors $F^\perp$ est stable par $u$.*

**32. Polynôme minimal**

**32.1** On considère une matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ comme une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et un vecteur propre $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ de $M$ associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\overline{\lambda}.\overline{X}^\top.X = \overline{(MX)}^\top.X = \overline{X}^\top.MX = \lambda \overline{X}^\top.X$$

**32.2** ➙ *Le polynôme minimal d'un endomorphisme auto-adjoint est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.* →**[61]**

### Versions géométriques du théorème spectral

**33.** Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.
**33.1** Si $V$ est un sous-espace stable par $u$ de dimension supérieure à 1, alors il contient un vecteur propre de $u$.
**33.2** Si $V_1, \ldots, V_r$ sont les sous-espaces propres de $u$, alors le sous-espace

$$F = \left[V_1 \overset{\perp}{\oplus} V_2 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} V_r\right]^{\perp}$$

est stable par $u$ mais ne contient aucun vecteur propre de $u$.
**33.3** ↣ *Tout endomorphisme auto-adjoint $u$ d'un espace euclidien $E$ est diagonalisable et*

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}^{\perp} \mathrm{Ker}(u - \lambda\, \mathrm{I}_E).$$

**33.4 Décomposition spectrale**
Pour tout endomorphisme auto-adjoint $u$,

$$u = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda \cdot p_\lambda$$

où $p_\lambda$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(u - \lambda\, \mathrm{I}_E)$, sous-espace propre de $u$ associé à $\lambda$. →[38.3]

### Versions vectorielles du théorème spectral

**34. Rappels**
Si un endomorphisme $u$ de $E$ est auto-adjoint, alors la matrice $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est symétrique, quelle que soit la base orthonormée $\mathscr{B}$ de $E$.
Réciproquement, s'il existe au moins une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $E$ telle que la matrice $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ soit symétrique, alors l'endomorphisme $u$ est auto-adjoint.
**35.** ↣ *Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Il existe une base orthonormée de $E$ constituée de vecteurs propres de $u$.*
**36.** Soient $u \in \mathcal{S}(E)$ et $\mathscr{B} = (\varepsilon_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$, une base orthonormée de vecteurs propres de $u$. On suppose que les valeurs propres de $u$ sont rangées par ordre croissant :

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n.$$

**36.1** Pour tout $x \in E$,

$$x = \sum_{k=1}^{n} (\,\varepsilon_k \,|\, x\,)\cdot \varepsilon_k \quad \text{et} \quad u(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\,(\,\varepsilon_k \,|\, x\,)\cdot \varepsilon_k.$$

**36.2** Comme

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (\,\varepsilon_k \,|\, x\,)^2,$$

alors

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leqslant \big(\,x \,\big|\, u(x)\,\big) \leqslant \lambda_n \|x\|^2.$$

**37.** Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.
**37.1** ↣ *Pour tout $x \in E$, il existe une famille orthogonale $(x_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}$ de vecteurs de $E$ telle que*

$$x = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} x_\lambda$$

*et que*

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \quad x_\lambda \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \cdot \mathrm{I}_E).$$

**37.2** En particulier,

$$\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \|x_\lambda\|^2 \quad \text{et} \quad u(x) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda \cdot x_\lambda.$$

**37.3** On en déduit que

$$\big(\,x \,\big|\, u(x)\,\big) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda \,\|x_\lambda\|^2$$

et que

$$\big\|u(x)\big\|^2 = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda^2 \|x_\lambda\|^2 \leqslant \Big(\max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} |\lambda|\Big)^2 \|x\|^2.$$

### Versions matricielles du théorème spectral

**38.1** ↣ *Pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{S}(E)$, il existe une base orthonormée $\mathscr{B}_0$ de $E$ telle que $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u)$ soit diagonale.*
**38.2** ↣ *Pour toute matrice symétrique réelle $A$, il existe une matrice orthogonale $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^\top.A.P$ soit diagonale.*
**38.3** Soient $u \in \mathcal{S}(E)$ et $\mathscr{B}_0 = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, une base orthonormée de $E$ constituée de vecteurs propres de $u$. Pour toute base orthonormée $\mathscr{B}$,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k.X_k^\top$$

où $\lambda_k$ est la valeur propre de $u$ associée à $\varepsilon_k$ et $X_k = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varepsilon_k)$.
**38.4** Soient $u \in \mathcal{S}(E)$ et $\mathscr{B}_1 = (e_1, \ldots, e_n)$, une base orthogonale de $E$ constituée de vecteurs propres de $u$. Pour toute base orthonormée $\mathscr{B}$,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{Y_k.Y_k^\top}{Y_k^\top.Y_k}$$

où $\lambda_k$ est la valeur propre de $u$ associée à $e_k$ et $Y_k = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(e_k)$.

### Entraînement

**39. Questions pour réfléchir**

1. Si $M$ est une matrice symétrique et s'il existe une matrice orthogonale $P$ telle que

$$P^\top.M.P = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

alors $B = 0$ et les matrices $A_1$ et $A_2$ sont symétriques. (Par un calcul direct ou en appliquant [**31.5**] et [**31.1**].)

2. *Suite de* [**31.5**] – On suppose que $\dim E = 2$ et que $x$ est un vecteur propre unitaire de $u \in \mathcal{S}(E)$. Si $y$ est un vecteur unitaire orthogonal à $x$, alors $(x, y)$ est une base orthonormée de vecteurs propres de $u$.

3. Soient $u \in \mathcal{S}(E)$, un endomorphisme auto-adjoint et $\mathscr{B}$, une base de vecteurs propres de $u$. Cette base est-elle nécessairement orthonormée ? Est-elle nécessairement orthogonale ?

4. Un endomorphisme $u \in \mathrm{L}(E)$ est auto-adjoint si, et seulement si,

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}^{\perp} \mathrm{Ker}(u - \lambda\, \mathrm{I}_E).$$

5. *Suite de* [**37.2**] –

$$\min_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\big(\,u(x) \,\big|\, x\,\big)}{\|x\|^2} = \lambda_1 \qquad \max_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\big(\,u(x) \,\big|\, x\,\big)}{\|x\|^2} = \lambda_r$$

6. Un endomorphisme $u$ de $E$ est auto-adjoint si, et seulement si, il existe une base orthonormée de $E$ constituée de vecteurs propres de $u$.

7. Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est semblable à la matrice diagonale $\Delta$, combien existe-t-il de matrices $P \in O_n(\mathbb{R})$ telles que

$$P^\top.A.P = \Delta \quad ?$$

8. La matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$$

n'est pas diagonalisable. Comparer avec [**38.2**].

9. Une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique si, et seulement si, il existe des matrices $P_1$, $P_2$, …, $P_r$ dans $\mathfrak{M}_n(R)$ telles que $M \in \mathrm{Vect}(P_k,\, 1 \leqslant k \leqslant r)$ avec

$$\begin{cases} \forall\ 1 \leqslant k \leqslant r, & P_k^2 = P_k = P_k^\top \\ \forall\ 1 \leqslant j < k \leqslant n, & P_j P_k = P_k P_j = 0 \end{cases}$$

**40.** Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $A.A^\top.A = I_n$. La matrice $A$ est inversible et comme son inverse est symétrique, elle est elle-même symétrique et $A = I_n$.

**41.** Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A^\top = I_n$.
Comme $A = I_n - (A^\top)^2$, alors

$$(A - I_n)(A^2 + A - I_n) = 0_n$$

et comme 1 n'est pas valeur propre de $A$, alors la matrice $A$ est symétrique.

**42.** Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf

$$\forall\, 1 \leqslant i < n, \quad a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = 1.$$

La matrice $A$ est diagonalisable et possède $n$ valeurs propres deux à deux distinctes.

**43.** Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, →**[66]**

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ker}\, A^\top.A = \mathrm{Ker}\, A, && \mathrm{Im}\, A^\top.A = (\mathrm{Ker}\, A)^\perp,\\ &\mathrm{Ker}\, A.A^\top = (\mathrm{Im}\, A)^\perp, && \mathrm{Im}\, A.A^\top = \mathrm{Im}\, A \end{aligned}$$

et en particulier

$$\mathrm{rg}(A^\top.A) = \mathrm{rg}(A.A^\top) = \mathrm{rg}(A).$$

**44.** Soit $E$, un espace euclidien. Tout endomorphisme auto-adjoint $v \in \mathcal{S}(E)$ est continu : il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\forall\, x \in E, \quad \big\|v(x)\big\| \leqslant K\,\|x\|.$$

**45.** Soient $U \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, une colonne non nulle, et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. La matrice

$$A = I_n + \alpha U.U^\top$$

est diagonalisable. Préciser ses éléments propres.

**46. Codiagonalisation d'endomorphismes auto-adjoints**
Soient $f$ et $g$, deux endomorphismes auto-adjoints.

1. S'il existe une base de $E$ constituée de vecteurs propres à la fois pour $f$ et pour $g$, alors $f \circ g = g \circ f$.
2. On suppose que $f \circ g = g \circ f$. Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, on note $g_\lambda$, l'endomorphisme induit par restriction de $g$ au sous-espace

$$E_\lambda^f = \mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{I}_E).$$

Tout vecteur propre de $g_\lambda$ est aussi un vecteur propre de $f$. Il existe une base orthonormée de $E$ constituée de vecteurs propres à la fois pour $f$ et pour $g$.

**47. Endomorphismes contractants [37.2]**
Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.

**47.1**

$$\min_{\|x\|=1} \big\|u(x)\big\| = \min_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} |\lambda|, \qquad \max_{\|x\|=1} \big\|u(x)\big\| = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} |\lambda|$$

**47.2** Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\forall\, x \in E, \quad \big\|P(u)(x)\big\| \leqslant \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \big|P(\lambda)\big|\,\|x\|.$$

**47.3** Un endomorphisme auto-adjoint $u$ est ***contractant*** :

$$\forall\, x \in E, \qquad \big\|u(x)\big\| \leqslant \|x\|$$

si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(u) \subset [-1, 1]$. Il est ***strictement contractant*** :

$$\forall\, x \neq 0, \qquad \big\|u(x)\big\| < \|x\|$$

si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(u) \subset\, ]-1, 1[$.

**48.** Les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ sont munis de leurs structures euclidiennes canoniques respectives. On considère la matrice $K_n \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $K_n(i,j) = 1$ si $|i-j| = 1$ et $K_n(i,j) = 0$ sinon.

**48.1** Il existe une base orthonormée $(U_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de $\mathbb{R}^n$ et des réels $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ tels que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad K_n U_k = \lambda_k U_k.$$

**48.2** L'endomorphisme $T$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \qquad T(M) = K_n M + M K_n + M$$

est diagonalisable.

**48.3** La famille $(V_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = (U_i.U_j^\top)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base orthonormée de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de $T$.

**49.** Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, une matrice telle que

$$\forall\, 1 \leqslant i,j \leqslant n, \quad a_{i,j} > 0 \quad \text{et} \quad \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

On admet que $\dim \mathrm{Ker}(A - I_n) = 1$ et on note

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \|X\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|.$$

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(A - I_n)$.
2. Comme

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \qquad \|AX\| \leqslant \|X\|,$$

toutes les valeurs propres de $A$ appartiennent au segment $[-1, 1]$.
3. La matrice $B = I_n + A$ est inversible [**5.11**].
4. La suite de matrices $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $R$ semblable à $E_{1,1} = \mathrm{Diag}(1, 0, \ldots, 0)$.

**50.** L'espace $E = \mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On note $f$, l'endomorphisme de $E$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 5 & -5 \\ 5 & 3 & -3 \\ -5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

**50.1** Le sous-espace $F = (\mathrm{Ker}\, f)^\perp$ est stable par $f$ et, avec

$$u_1 = (1, 0, 0) \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (0, 1, -1),$$

cet espace admet $\mathscr{B} = (u_1, u_2)$ comme base orthonormée.

**50.2** On note $g$, l'endomorphisme de $F$ induit par restriction de $f$. La matrice de $g$ relative à la base $\mathscr{B}$ est égale à

$$\begin{pmatrix} 11 & 5\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} & 6 \end{pmatrix}.$$

**50.3** La matrice $A$ est semblable à $\mathrm{Diag}(0, 1, 16)$.

**51.** Soient $u$ et $v$, deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$. Ils sont représentés par les matrices colonnes $U$ et $V$ dans la base canonique et on note $f$, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par la matrice

$$A = I_n + U.V^\top + V.U^\top$$

dans la base canonique.

**51.1** Le réel $\lambda$ est une valeur propre de $f$ si, et seulement si, il existe un vecteur $x$ non nul tel que

$$(\lambda - 1) \cdot x = (\,x \,|\, u\,) \cdot v + (\,x \,|\, v\,) \cdot u.$$

**51.2** Si $n \geqslant 3$, alors le spectre de $f$ est constitué des réels

$$1, \quad 1 + (\,u \,|\, v\,) - \|u\|\,\|v\|, \quad 1 + (\,u \,|\, v\,) + \|u\|\,\|v\|$$

et la matrice $A$ est diagonalisable.

**52.** Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice de coefficients

$$\forall\, 1 \leqslant i,j \leqslant n, \quad a_{i,j} = i + j.$$

On note $U$ et $V$, les matrices colonnes qui représentent les vecteurs

$$u = (1,1,\dots,1) \quad \text{et} \quad v = (1,2,\dots,n)$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

**52.1** Comme $A = V.U^\top + U.V^\top$, la matrice $A$ est diagonalisable, l'image de $A$ est engendrée par $U$ et $V$ et le noyau de $A$ est l'orthogonal de Im $A$.

**52.2** Si $X$ est un vecteur propre de $A$ associé à une valeur propre non nulle, alors il existe deux réels $a$ et $b$ tels que

$$X = aU + bV.$$

**52.3** Les valeurs propres non nulles de $A$ sont

$$(\,u\,|\,v\,) \pm \|u\|\,\|v\|$$

et les sous-espaces propres correspondant sont les droites dirigées par les vecteurs $\|v\|\,U \pm \|u\|\,V$.

**53.** Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Pour tout entier *impair* $p \in \mathbb{N}$, il existe un, et un seul, endomorphisme $v \in \mathcal{S}(E)$ tel que $v^p = u$.

**54.** Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice nilpotente d'indice $p$. Si les matrices $A$ et $A^\top$ commutent, alors la matrice symétrique $A^\top.A$ est nilpotente et la matrice $A$ est nulle **[43]**.

**55.** L'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$ étant muni du produit scalaire défini par

$$\forall\, P,Q \in E, \quad \langle\, P\,|\,Q\,\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t,$$

on considère l'application $f$ définie par

$$\forall\, P \in E, \quad f(P) = \frac{1}{2}(X^2-1)P'' + XP' - P.$$

**55.1** L'application $f$ est un endomorphisme auto-adjoint de $E$ et sa matrice relative à la base canonique de $E$ est triangulaire supérieure. Pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$, il existe un vecteur propre $P_k$ de $f$ associé à la valeur propre

$$\lambda_k = \frac{k^2+k-2}{2}$$

et $\deg P_k = k$.

**55.2** On note $(T_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$, la base orthonormée de $E$ déduite de la base canonique par l'algorithme de Gram-Schmidt. Alors, pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$f(T_k) = \sum_{i=0}^{k} \langle\, f(T_k)\,|\,T_i\,\rangle \cdot T_i = \langle\, T_k\,|\,f(T_k)\,\rangle \cdot T_k$$

et les polynômes $P_k$ et $T_k$ sont proportionnels.

**56.** Pour tout endomorphisme $u$ d'un espace euclidien $E$, l'application $u^* \circ u$ est un endomorphisme auto-adjoint et il existe une base orthonormée $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de $E$ telle que

$$\forall\, i \neq j, \quad \big(\,u(e_i)\,\big|\,u(e_j)\,\big) = 0.$$

**57.** Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $W$, l'ensemble des vecteurs propres unitaires de $A$ (l'espace $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ étant muni de sa norme euclidienne canonique). On pose

$$\forall\, X \in W, \qquad F_A(X) = \min_{u\in\mathbb{R}} \mathrm{tr}\big[(A - u\cdot X.X^\top)^2\big].$$

La fonction $F_A$ atteint un minimum $m(A)$ sur $W$ et

$$m(A) = \mathrm{tr}(A^2) - \rho(A^2)$$

où $\rho(A^2)$ est le ***rayon spectral*** de $A^2$, défini par

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \rho(M) = \max\{|\lambda|,\, \lambda \in \mathrm{Sp}(M)\}.$$

**58.** Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

**58.1** Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la matrice $A(t)$ est diagonalisable et ses valeurs propres vérifient

$$a(t) < 0 < b(t) < 2 < c(t).$$

**58.2** Lorsque $t$ tend vers $+\infty$,

$$-1/t < a(t) < 0 < 2 - 2/t < b(t) < 2$$

donc $c(t) = t + o(1)$.

**59.** L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique. On considère une matrice symétrique $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, X \in \mathbb{R}^n, \quad f(X) = X^\top.S.X.$$

Les valeurs propres de $S$ sont rangées par ordre croissant et comptées avec multiplicité :

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n.$$

**59.1** Pour tout vecteur unitaire $X \in \mathbb{R}^n$,

$$\lambda_1 \leqslant f(X) \leqslant \lambda_n.$$

**59.2** Quels que soient $X$ et $Y$ dans $\mathbb{R}^n$,

$$2X^\top.S.Y = f\Big(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\Big) - f\Big(\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\Big).$$

**59.3** En notant $\mathcal{R}$, l'ensemble des couples $(X,Y)$ de vecteurs unitaires et orthogonaux de $\mathbb{R}^n$,

$$\max_{(X,Y)\in\mathcal{R}} |X^\top.S.Y| = \frac{\lambda_n - \lambda_1}{2}.$$

**60.**

1. Toutes les matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont diagonalisables.
2. Parmi les matrices triangulaires supérieures strictes, seule la matrice nulle est diagonalisable.
3. Si $V$ est un sous-espace de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les matrices sont diagonalisables, alors

$$\dim V \leqslant \frac{n(n+1)}{2}.$$

**61. Polynôme minimal de $u \in \mathcal{S}(E)$**

Le polynôme minimal d'un endomorphisme auto-adjoint est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. On peut démontrer ce fait sans recourir à la notion de spectre complexe. →**[32]**

**61.1** Soit $f \in \mathcal{S}(V)$ où $\dim V = 2$.

1. Le polynôme caractéristique $C_f$ de $f \in \mathcal{S}(V)$ est de la forme $(X-a)(X-b) - c^2$ et est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Le polynôme $C_f$ admet une racine double si, et seulement si, $f$ est une homothétie.

**61.2** Soit $P$, un diviseur irréductible de degré 2 du polynôme minimal de $u \in \mathcal{S}(E)$.

3. L'endomorphisme $P(u)$ n'est pas injectif et, quel que soit le vecteur $x_0 \in \mathrm{Ker}\,P(u)$, ce n'est pas un vecteur propre de $u$.
4. Si $x_0$ est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}\,P(u)$, alors le sous-espace vectoriel
$$V = \mathrm{Vect}(x_0, u(x_0))$$
est un plan stable par $u$.
5. Le polynôme minimal de l'endomorphisme $u_V$ induit par restriction de $u$ à $V$ est le polynôme $P$.
6. Conclure.

## III

## Endomorphismes auto-adjoints positifs

**62.1** ✍ *Une matrice symétrique $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est* **positive** *lorsque*

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \qquad X^\top.A.X \geqslant 0.$$

*L'ensemble des matrices symétriques positives est noté $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.*
**62.2** ✍ *Une matrice symétrique $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite* **définie positive** *lorsque*

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \qquad X^\top.A.X > 0.$$

*L'ensemble de ces matrices est noté $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.*
**63.1** ✍ *Un endomorphisme auto-adjoint $u \in \mathcal{S}(E)$ est* **positif** *lorsque*

$$\forall\, x \in E, \quad \big(\, x \,\big|\, u(x) \,\big) \geqslant 0.$$

*L'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs de l'espace E est noté $\mathcal{S}^+(E)$.*
**63.2** ✍ *Un endomorphisme auto-adjoint $u \in \mathrm{L}(E)$ est* **défini positif** *lorsque*

$$\forall\, x \in E \setminus \{0_E\}, \quad \big(\, x \,\big|\, u(x) \,\big) > 0.$$

*L'ensemble des endomorphismes auto-adjoints définis positifs de E est noté $\mathcal{S}^{++}(E)$.*

**64.** Les définitions matricielles **[62]** et vectorielles **[63]** sont analogues et on peut préciser cette analogie. →**[7.76]**
**64.1** Soient $u \in \mathcal{S}(E)$ et $\mathscr{B}$, une base orthonormée quelconque de $E$. Si $u$ est positif (resp. défini positif), alors sa matrice $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est symétrique et positive (resp. définie positive).
**64.2** Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. S'il existe une base orthonormée de $E$ telle que la matrice $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ soit symétrique et positive (resp. définie positive), alors $u$ est un endomorphisme auto-adjoint positif (resp. défini positif).

**65. Exemples et contre-exemples**
**65.1** $\mathrm{I}_E \in \mathcal{S}^{++}(E)$
**65.2** Un projecteur orthogonal est un endomorphisme auto-adjoint **[29]** positif, mais n'est pas défini positif en général.
**65.3** Une symétrie orthogonale est un endomorphisme auto-adjoint qui n'est pas positif en général.

**66.** Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices $B = A^\top.A$ et $C = A.A^\top$ sont des matrices symétriques positives : →**[71]**

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \begin{cases} X^\top.B.X = \|AX\|^2 \\ X^\top.C.X = \|A^\top.X\|^2. \end{cases}$$

Les matrices $A^\top.A$ et $A.A^\top$ sont définies positives si, et seulement si, la matrice $A$ est inversible.

**67. Caractérisations spectrales**
On note $\Sigma^1 = [\|x\| = 1]$, la sphère unité de $E$ et on considère un endomorphisme $u \in \mathcal{S}(E)$, dont les valeurs propres sont rangées par ordre croissant :

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_r.$$

**67.1** *Suite de* **[37.2]** –

$$\lambda_1 = \min_{x \in \Sigma^1} \big(\, x \,\big|\, u(x) \,\big), \qquad \lambda_r = \max_{x \in \Sigma^1} \big(\, x \,\big|\, u(x) \,\big)$$

**67.2 Variante [36]**
Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$P^\top.A.P = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

En notant $P^\top.X = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, on obtient

$$X^\top.A.X = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k^2 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \min\limits_{X^\top.X=1} X^\top.A.X = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \alpha_k, \\ \max\limits_{X^\top.X=1} X^\top.A.X = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \alpha_k. \end{cases}$$

**67.3** ➙ *Un endomorphisme auto-adjoint $u \in \mathcal{S}(E)$ est :*
1. *positif si, et seulement si, ses valeurs propres sont positives ;*
2. *défini positif si, et seulement si, ses valeurs propres sont strictement positives.*

**67.4** ➙ *Un endomorphisme auto-adjoint est défini positif si, et seulement si, il est positif et inversible.*
**67.5** ➙ *Un endomorphisme auto-adjoint est défini positif si, et seulement si, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que*

$$\forall\, x \in E, \quad \big(\, x \,\big|\, u(x) \,\big) \geqslant \alpha \|x\|^2.$$

**Caractérisation des produits scalaires**

**68.** On considère un espace euclidien $E$ : sur cet espace est défini un produit scalaire de référence : $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ et une norme, notée $\|\cdot\|$, est associée à ce produit scalaire.
Nous allons nous intéresser aux autres produits scalaires définis sur $E$.

**69. Représentation matricielle d'un produit scalaire**
Soit $\varphi$, un produit scalaire quelconque sur $E$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, une base de $E$.
**69.1** La ***matrice de Gram relative à la base*** $\mathscr{B}$ est la matrice $\Gamma$ définie par **[7.8]**

$$\Gamma = \big(\varphi(e_i, e_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

**69.2** Quels que soient les vecteurs $x$ et $y$ de $E$, respectivement représentés par les colonnes $X$ et $Y$ dans la base $\mathscr{B}$,

$$\varphi(x, y) = X^\top.\Gamma.Y.$$

**69.3** La matrice de Gram $\Gamma$ d'un produit scalaire est symétrique et définie positive.

$$\forall\, x \neq 0_E, \quad X^\top.\Gamma.X = \varphi(x, x) > 0.$$

**69.4** Soit $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à une base $\mathscr{B}'$. La matrice $\Gamma' = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}'}(\varphi)$ s'exprime en fonction de la matrice $\Gamma = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ par la relation suivante :

$$\Gamma' = Q^\top.\Gamma.Q.$$

En particulier, si $\mathscr{B}'$ est une base orthonormée pour $\varphi$, alors

$$Q^\top.\Gamma.Q = I_n, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \Gamma = P^\top.P$$

où $P = Q^{-1} = \mathfrak{Mat}(\mathscr{B}' \to \mathscr{B})$.

**70. Produit scalaire associé à une matrice** $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, une matrice symétrique définie positive.
**70.1** L'application

$$\psi_A = \Big[(X, Y) \mapsto X^\top.A.Y\Big]$$

est un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
**70.2** Pour toute base $\mathscr{B}$ de $E$, il existe un produit scalaire $\varphi$ sur $E$ dont la matrice de Gram relative à $\mathscr{B}$ soit la matrice $A$.

**71. Factorisation d'une matrice** $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$
Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
**71.1** Il existe une matrice orthogonale $Q$ et une matrice diagonale $\Delta \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A = Q^\top.\Delta^2.Q$$

et une matrice $P$ telle que

$$A = P^\top.P.$$

La matrice $P$ est inversible si, et seulement si, la matrice $A$ est définie positive. →**[66]**
**71.2** Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors l'algorithme de Gram-Schmidt appliqué au produit scalaire $\psi_A$ **[70.1]** prouve l'existence d'une matrice triangulaire inversible $P$ telle que $A = P^\top.P$.
**71.3** Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire si, et seulement si, il existe un automorphisme $u$ de $E$ tel que

$$\forall\, (x, y) \in E \times E, \qquad \varphi(x, y) = \big(\, u(x) \,\big|\, u(y) \,\big).$$

## Entraînement

**72. Questions pour réfléchir**

1. Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors $A^2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. Si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors les coefficients diagonaux de $A$ sont tous positifs.
3. Un endomorphisme auto-adjoint $u$ est positif si, et seulement si, pour tout $x \in E$, l'angle formé par le couple $\big(x, u(x)\big)$ est un angle aigu.
4. L'ensemble $\mathcal{S}^+(E)$ est-il un espace vectoriel ?
5. L'ensemble $\mathcal{S}^+(E)$ est une partie convexe de $\mathrm{L}(E)$ et un ***cône positif*** :

$$\forall\ (\lambda, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}^+(E), \quad \lambda \cdot u \in \mathcal{S}^+(E).$$

6. Un endomorphisme auto-adjoint défini positif est positif et inversible.
7. On suppose connue une décomposition de $E$ en somme directe orthogonale :

$$E = \bigoplus_{1 \leqslant k \leqslant r}^{\perp} F_k.$$

On note $p_1, \ldots, p_r$, les projections associées à cette décomposition de $E$.

7.a Les $p_k$, $1 \leqslant k \leqslant r$, sont des projecteurs orthogonaux tels que

$$\forall\ 1 \leqslant k < \ell \leqslant n, \quad p_k \circ p_\ell = p_\ell \circ p_k = 0.$$

7.b Tout endomorphisme $u \in \mathrm{Vect}(p_k,\ 1 \leqslant k \leqslant r)$ est auto-adjoint. Condition pour que $u$ soit positif ? défini positif ?

**73.** Soient $A$ et $B$, deux matrices appartenant à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

1. La matrice $A + B$ est symétrique et positive.
2. Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $A + B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

**74.** Si la matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^\top & D \end{pmatrix}$$

est définie positive, alors $\det B > 0$.

**75.** Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. La propriété

$$\forall\ X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top.A.X \geqslant 0$$

est vraie si, et seulement si, les valeurs propres de la matrice $B = A^\top + A$ sont toutes positives.

**76. Matrice de Hilbert**

La matrice de Gram relative à la base canonique de $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par

$$\forall\ P, Q \in E, \quad (\,P \,|\, Q\,) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

est la matrice

$$H = \Big(\frac{1}{i+j+1}\Big)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

Cette matrice $H$ est diagonalisable.

Pour $U \in \mathfrak{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, le scalaire $U^\top.H.U$ peut s'exprimer comme l'intégrale d'une fonction positive, donc les valeurs propres de $H$ sont strictement positives.

**77. Base orthogonale commune [69.4]**

Soit $\varphi$, un produit scalaire sur $E$. Notons $\varphi_0 = (\,\cdot \,|\, \cdot\,)$, le produit scalaire de référence.

**77.1** Si $\mathscr{B}_0$ est une base orthonormée pour $\varphi_0$, alors

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\varphi_0) = I_n \quad \text{et} \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\varphi) = \Gamma \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$$

**77.2** Il existe une matrice orthogonale $Q$ et une matrice diagonale $\Delta$ telle que

$$Q^\top.\Gamma.Q = \Delta.$$

**77.3** La matrice $Q$ est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_0$ à une base $\mathscr{B}$. Comme →[69.4]

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi_0) = I_n \quad \text{et} \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \Delta,$$

alors la base $\mathscr{B}$ est simultanément une base orthonormée pour $\varphi_0$ et une base orthogonale pour $\varphi$.

**78.** Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. L'application

$$\varphi = \Big[(X, Y) \mapsto X^\top.A.Y\Big]$$

est un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et comme l'application

$$\Big[X \mapsto (A^{-1}B).X\Big]$$

est un endomorphisme auto-adjoint de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire $\varphi$, la matrice $(A^{-1}B)$ est diagonalisable.

**79.** Soient $A$ et $B$, deux matrices symétriques réelles. On suppose que la matrice $B$ est définie positive.

**79.1** L'application $\varphi_B$ définie par

$$\forall\ X, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \varphi_B(X, Y) = X^\top.B.Y$$

est un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

**79.2** Il existe une matrice diagonale $D$, dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs, et une matrice orthogonale $P$ telles que

$$B = P.D.P^\top.$$

Il existe une matrice symétrique et inversible $L$ telle que $B = L^2$.

**79.3** Il existe une matrice symétrique réelle $C$ telle que

$$AX = \lambda BX \iff C(LX) = \lambda(LX)$$

pour toute matrice colonne $X$ et tout réel $\lambda$.

**79.4** Il existe une base $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, orthonormée pour le produit scalaire $\varphi_B$, et des scalaires réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$\forall\ 1 \leqslant i \leqslant n, \quad Ae_i = \lambda_i\, Be_i.$$

**80. Décomposition spectrale d'une matrice symétrique**

Soit $(\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}$, le spectre d'une matrice $A$ de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Il existe des matrices $(P_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}$ telles que

$$Q(A) = \sum_{k=1}^{r} Q(\lambda_k) P_k^\top.P_k$$

pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$. En particulier, la matrice $A$ est une combinaison linéaire de matrices symétriques positives :

$$A = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k P_k^\top.P_k.$$

2. Pour tout $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\sum_{k=1}^{r} \|P_k X\|^2 = \|X\|^2.$$

**81.1** Pour toute matrice $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$,

$$(\det A)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\,\mathrm{tr}(A).$$

**81.2** Pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$,

$$|\det M|^2 \leqslant \Big(\frac{\mathrm{tr}(M^\top.M)}{n}\Big)^n$$

**82.** Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice antisymétrique.

1. Quelle que soit la matrice colonne $X$,

$$X^\top.A.X = 0.$$

2. Si $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors la matrice $A + B$ est inversible.

**83.1** Si $A$ est une matrice antisymétrique réelle, alors $\exp(A)$ est une matrice de rotation.

**83.2** Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, comparer les spectres et les sous-espaces propres de $A$ et de $\exp(A)$.

**84. Racine carrée d'un endomorphisme auto-adjoint positif**
Tout endomorphisme $v \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $v^2 = u$ est une ***racine carrée*** de $u \in \mathcal{S}^+(E)$.

1. On suppose qu'il existe une racine carrée $v$ de $u$.

1.a Si $F_k$ est le sous-espace propre de $v$ associé à la valeur propre $\mu_k$, alors $F_k$ contenu dans un sous-espace propre de $u$. À quelle valeur propre de $u$ ce sous-espace est-il associé ?

1.b Chaque sous-espace propre de $v$ est aussi un sous-espace propre de $u$.

2. Il existe une, et une seule, racine carrée de $u$.

3. Interprétation matricielle.

**85. Factorisation de Cartan**
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Il existe une matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = A^\top.A$ **[84]** et une matrice orthogonale $O \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A = OS.$$

Cette factorisation, analogue de la représentation trigonométrique des nombres complexes, est unique.

**86.** Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathfrak{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On suppose que le rang de la matrice $B$ est égal à $m$.

**86.1** L'entier $n$ est supérieur à l'entier $m$.

**86.2** Le noyau de la matrice

$$C = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & 0 \end{pmatrix}$$

est réduit à la colonne nulle. La matrice $C$ est-elle inversible ?

**87.1** La matrice $S$ est symétrique et définie positive si, et seulement si, il existe une matrice inversible $P$ telle que $S = P.P^\top$ **[71]**.

**87.2** Quelles que soient $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, la matrice $ST$ est semblable à une matrice symétrique réelle et donc diagonalisable.

**87.3** Si $A$ est diagonalisable, alors il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que

$$A^\top = S^{-1}.A.S.$$

Étudier la réciproque.

**88. Double produit vectoriel**
Soit $a \in \mathbb{R}^3$, un vecteur unitaire. Comme

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad \big( (a \wedge x) \wedge a \,\big|\, y \big) \;=\; \big( a \wedge x \,\big|\, a \wedge y \big)$$

l'endomorphisme $f = [x \mapsto (a \wedge x) \wedge a]$ est auto-adjoint, positif mais pas défini positif.
Reconnaître $f$ à l'aide de la formule du double produit vectoriel :

$$u \wedge (v \wedge w) = \big( u \,\big|\, w \big) \cdot v - \big( u \,\big|\, v \big) \cdot w.$$

**89.** Soit $A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On suppose que les coefficients $A_{i,j}$ sont tous différents de 0 et on considère la matrice

$$B = (B_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \Big( \frac{1}{A_{i,j}} \Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

**89.1** Si $\mathrm{rg}\, A = 1$, alors $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

**89.2** Si $\mathrm{rg}\, A \geqslant 2$, alors il existe deux indices $1 \leqslant i < j \leqslant n$ tels que

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_{i,i} & a_{i,j} \\ a_{j,i} & a_{j,j} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}).$$

Le déterminant de la matrice

$$B_0 = \begin{pmatrix} b_{i,i} & b_{i,j} \\ b_{j,i} & b_{j,j} \end{pmatrix}$$

est strictement négatif, donc il existe un couple $(x_i, x_j) \neq (0,0)$ tel que

$$\begin{pmatrix} x_i & x_j \end{pmatrix} B_0 \begin{pmatrix} x_i \\ x_j \end{pmatrix} < 0$$

et la matrice symétrique $B$ n'est pas positive.

**90.** Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, une matrice dont les valeurs propres sont strictement positives. On les note :

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$$

et on pose $\kappa_A = \sqrt{\lambda_n/\lambda_1}$.

**90.1** Il existe une matrice orthogonale $P$ telle que les matrices $P^{-1}AP$ et $P^{-1}A^{-1}P$ soient diagonales.

**90.2** Quels que soient les réels $y_1, \ldots, y_n$,

$$\Big( \sum_{i=1}^n y_i^2 \Big)^2 \leqslant \Big( \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \Big) \Big( \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} y_i^2 \Big)$$

donc

$$\|X\|^2 \leqslant [(X^\top.A.X)(X^\top.A^{-1}.X)]^{1/2}$$

pour tout $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

**90.3** En posant $Y = P^\top.X = (y_1, \ldots, y_n)$, on a :

$$(X^\top.A.X)(X^\top.A^{-1}.X) = \kappa_A^2 \Big( \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_n} y_i^2 \Big) \Big( \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_1}{\lambda_i} y_i^2 \Big)$$

donc

$$\begin{aligned} [(X^\top.A.X)(X^\top.A^{-1}.X)]^{1/2} &\leqslant \frac{\kappa_A}{2} \sum_{i=1}^n \Big[ \frac{\lambda_i}{\lambda_n} + \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \Big] y_i^2 \\ &\leqslant \frac{\kappa_A + \kappa_A^{-1}}{2} \|X\|^2. \end{aligned}$$

# IV

## Formes quadratiques

**91.** Soit $E$, un espace vectoriel réel (de dimension quelconque).
**91.1** ✍ *Une application $q : E \to \mathbb{R}$ est une* **forme quadratique** *lorsqu'il existe une application bilinéaire symétrique $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\forall\, x \in E, \qquad q(x) = \varphi(x,x).$$

**91.2** ➙ *L'ensemble des formes quadratiques sur $E$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des applications de $E$ dans $\mathbb{R}$.*
**91.3** Si la dimension de $E$ est finie, toute forme quadratique sur $E$ est une application continue.
**91.4** Si $q$ est une forme quadratique sur $E$, alors

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in E, \quad q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$$

et l'application

$$\varphi_q = [(x,y) \mapsto q(x+y) - q(x-y)] \,:\, E \times E \to \mathbb{R}$$

est une forme bilinéaire symétrique.
**91.5** ✍ *Soit $q : E \to \mathbb{R}$, une forme quadratique. L'unique forme bilinéaire symétrique $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\forall\, x \in E, \qquad q(x) = \varphi(x,x)$$

*est la* **forme bilinéaire symétrique associée** *à $q$.*

**92.** On peut définir des formes bilinéaires symétriques sur un espace vectoriel $E$, quel que soit le corps de base $\mathbb{K}$.
**92.1** Le lien entre formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques n'est assuré que si la caractéristique du corps $\mathbb{K}$ est différente de 2 (c'est-à-dire si on peut diviser par 2).
**92.2** Seules les propriétés relatives au signe sont spécifiques au corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

**93. Exemple fondamental**
Soient $f$ et $g$, deux formes linéaires sur $E$.
**93.1** L'application

$$\psi = [(x,y) \mapsto f(x)g(y)] \,:\, E \times E \to \mathbb{R}$$

est une forme bilinéaire sur $E$.
**93.2** L'application

$$\varphi = [(x,y) \mapsto \varphi(x,y) + \varphi(y,x)] \,:\, E \times E \to \mathbb{R}$$

est une forme bilinéaire symétrique sur $E$.
**93.3** ➙ *L'application*

$$q = [x \mapsto f(x)g(x)] \,:\, E \to \mathbb{R}$$

*est une forme quadratique sur $E$.*
**93.4** ▷ *Quels que soient les scalaires réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, quelles que soient les formes linéaires $f_1, \ldots, f_n$ sur $E$, l'application $q : E \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\forall\, x \in E, \qquad q(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \big[f_k(x)\big]^2$$

*est une forme quadratique sur $E$.*
**93.5** Si les formes linéaires $f_1, \ldots, f_n$ sont linéairement indépendantes, on dit que la forme quadratique $q$ est ***décomposée en carrés***.

**94. Cône isotrope**
Soit $q$, une forme quadratique sur $E$.
**94.1** L'ensemble $C_q = \big\{x \in E \,:\, q(x) = 0\big\}$ est un cône de $E$.
**94.2** ✍ *L'ensemble*

$$\big\{x \in E \,:\, q(x) = 0\big\}$$

*est le* **cône isotrope** *de la forme quadratique $q$.*
**94.3** ✍ *La forme quadratique $q$ est dite* **définie** *lorsque son cône isotrope est réduit au vecteur nul.*
**94.4** *Suite de* **[93.4]** – Si la forme quadratique $q$ est décomposée en carrés, alors le cône isotrope de $q$ contient l'intersection des hyperplans Ker $f_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

**95. Dégénérescence**
On considère une forme quadratique $q$ et la forme bilinéaire symétrique $\varphi$ qui lui est associée.
**95.1** ✍ *Deux vecteurs $x$ et $y$ sont* **conjugués** *pour la forme $\varphi$ lorsque $\varphi(x,y) = 0$.*
**95.2** ✍ *Le* **conjugué** *d'une partie $A \subset E$ est l'ensemble $A^0 \subset E$ défini par*

$$A^0 = \big\{x \in E \,:\, \forall\, y \in A,\ \varphi(x,y) = 0\big\}.$$

**95.3** Quelle que soit la partie $A$, le conjugué $A^0$ est un sous-espace de $E$.
**95.4** ✍ *Un sous-espace vectoriel $F$ de $E$ est dit* **non isotrope** *pour la forme quadratique $q$ lorsque*

$$F \cap F^0 = \{0_E\}.$$

**95.5** Le sous-espace $F$ est non isotrope si, et seulement si, la restriction à $F$ de la forme quadratique $q$ est non dégénérée.
**95.6** ✍ *Un sous-espace vectoriel $F$ de $E$ est dit* **totalement isotrope** *pour la forme quadratique $q$ lorsqu'il est contenu dans son conjugué :*

$$F \subset F^0.$$

**95.7** Le sous-espace $E^0$ est contenu dans le cône isotrope de $q$ et totalement isotrope.
**95.8** ✍ *La forme quadratique $q$ est dite* **non dégénérée** *lorsque le sous-espace*

$$E^0 = \big\{x \in E \,:\, \forall\, y \in E,\ \varphi(x,y) = 0\big\}$$

*est réduit au vecteur nul.*
**95.9** Si la forme quadratique $q$ est définie **[94.3]**, alors elle est non dégénérée.

**96. Signe d'une forme quadratique**
**96.1** ✍ *Une forme quadratique $q$ est* **positive** *lorsque*

$$\forall\, x \in E, \quad q(x) \geqslant 0.$$

*Elle est* **définie positive** *lorsque*

$$\forall\, x \in E \setminus \{0\}, \quad q(x) > 0.$$

**96.2** ✍ *Une forme quadratique est dite* **négative** *(resp.* **définie négative***) lorsque la forme $-q$ est positive (resp. définie positive).*
**96.3** Une forme quadratique définie positive (ou définie négative) est définie au sens de **[94.3]**.

### Représentation matricielle

**97.** On identifie ici les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en ne distinguant pas le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ et la colonne $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui représente $x$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
**97.1** Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie

$$\forall\, X \in \mathbb{R}^n, \qquad X^\top.A.X = 0,$$

alors $A$ est antisymétrique.
**97.2** Si $A$ et $B$ sont deux matrices symétriques réelles telles que

$$\forall\, X \in \mathbb{R}^n, \quad X^\top.A.X = X^\top.B.X,$$

alors $A = B$.
**97.3** ➙ *L'application $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ si, et seulement si, il existe une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que*

$$\forall\, X \in \mathbb{R}^n, \qquad q(X) = X^\top.A.X.$$

**97.4** La forme quadratique $q$ est positive (resp. définie positive) si, et seulement si, la matrice symétrique $A$ est positive (resp. définie positive).
**97.5** La forme bilinéaire symétrique associée à $q$ est l'application

$$\Big[(X,Y) \mapsto X^\top.A.Y\Big].$$

**98. Exemples**

**98.1** La forme quadratique $\left[(u,v,w)\mapsto u^2+3v^2+2w^2\right]$ est définie positive.

**98.2 Forme de Lorentz**

La forme quadratique

$$q=\left[(x,y,z,t)\mapsto c^2t^2-x^2-y^2-z^2\right]$$

n'est ni positive, ni négative.

**98.3** La forme quadratique $q$ définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\begin{aligned}q(u,v,w)&=5u^2+2v^2+w^2-2uv+2uw+2vw\\&=(u+v+w)^2+(2u-v)^2\end{aligned}$$

est positive, sans être définie positive.

**98.4** La forme quadratique $q$ définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(u,v,w)=(u-v)^2+(v-w)^2+(w-u)^2$$

est positive, sans être définie positive : $q(u,v,w)=0$ si, et seulement si, $u=v=w$.

**98.5** La forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\begin{aligned}\forall\,\boldsymbol{x}=(u,v)\in\mathbb{R}^2,\quad q(\boldsymbol{x})&=u^2+6uv+v^2\\&=(u+3y)^2-8v^2\end{aligned}$$

n'est ni positive, ni négative et il existe des vecteurs $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ tels que $q(\boldsymbol{x})=0$.

**98.6** La forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall\,\boldsymbol{x}=(u,v,w)\in\mathbb{R}^3,\quad q(\boldsymbol{x})=uv+vw+wu$$

est représentée par la matrice

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Elle n'est ni positive, ni négative.

**99. Formule de changement de base**

Soient $\mathscr{B}=(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $\mathscr{C}=(\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, deux bases de $E$. On note $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$.

**99.1** Une forme bilinéaire symétrique $\varphi$ sur $E$ est représentée dans la base $\mathscr{B}$ par la matrice

$$\Omega=\big(\varphi(e_k,e_\ell)\big)_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}\in\mathcal{S}_n(\mathbb{K}).$$

Dans le cas d'un produit scalaire, on reconnaît la matrice de Gram du produit scalaire.

**99.2** ↣ *La forme bilinéaire symétrique $\varphi$ est représentée dans la base $\mathscr{C}$ par la matrice*

$$\Omega'=P^\top.\Omega.P.$$

**99.3** ✍ *Deux matrices $A$ et $B$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites* **congruentes** *lorsqu'il existe une matrice inversible $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que*

$$B=P^\top.A.P.$$

**99.4** Deux matrices congruentes ont même rang.

**99.5** La relation de congruence est une relation d'équivalence sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

**100. Groupe orthogonal**

Soient $E$, un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $\varphi$, une forme bilinéaire symétrique sur $E$.

**100.1** ✍ *Un automorphisme $u\in\mathrm{GL}(E)$ est dit* **$\varphi$-orthogonal** *lorsque*

$$\forall\,x,y\in E,\quad \varphi\big(u(x),u(y)\big)=\varphi(x,y).$$

**100.2** ↣ *L'ensemble $O_\varphi(E)$ des automorphismes $\varphi$-orthogonaux de $E$ est un sous-groupe du groupe $\mathrm{GL}(E)$.*

**100.3** Supposons que $E$ soit un espace de dimension finie et considérons une base $\mathscr{B}=(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de $E$. On note $\Omega\in\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, la matrice qui représente $\varphi$ dans cette base $\mathscr{B}$.
Un automorphisme $u$ de $E$ est $\varphi$-orthogonal si, et seulement si, sa matrice

$$M=\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$$

vérifie :

$$M^\top.\Omega.M=\Omega.$$

**Existence d'une base conjuguée**

**101.** Soient $E$, un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $\varphi$, une forme bilinéaire symétrique sur $E$.
Pour $x$ et $y$ dans $E$, on notera $\langle x\mid\varphi\mid y\rangle$ au lieu de $\varphi(x,y)$. On notera donc

$$\mid\varphi\mid y\rangle$$

l'application partielle $[x\mapsto\langle x\mid\varphi\mid y\rangle]$.

**102.** On considère un sous-espace vectoriel $F$ de $E$, en supposant que la dimension de $F$ est finie.

**102.1** Les espaces vectoriels $F$ et $F^*=\mathrm{L}(E,\mathbb{K})$ sont isomorphes.

**102.2** Si le sous-espace $F$ est non isotrope **[95.4]**, alors l'application

$$[y\mapsto\mid\varphi\mid y\rangle]$$

est un isomorphisme de $F$ sur $F^*$.

**102.3** Dans ces conditions, pour tout vecteur $u_0\in E$, il existe donc un, et un seul, vecteur $x_0\in F$ tel que

$$\forall\,y\in F,\quad\langle u_0\mid\varphi\mid y\rangle=\langle x_0\mid\varphi\mid y\rangle$$

et $u_0-x_0\in F^0$.

**102.4** ↣ *Pour tout sous-espace vectoriel $F$ de $E$ de dimension finie et non isotrope,*

$$E=F\oplus F^0.$$

**103.** On suppose que $E$ est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ dont la caractéristique est différente de 2.
On considère une forme bilinéaire symétrique $\varphi$ et la forme quadratique $q$ associée à $\varphi$.

**103.1 Notion de base conjuguée**

Les vecteurs d'une base $\mathscr{B}$ de $E$ sont deux à deux conjugués si, et seulement si, la matrice de $\varphi$ relative à $\mathscr{B}$ est diagonale.

**103.2** Si la forme quadratique $q$ est identiquement nulle, alors toute base de $E$ est conjuguéee.

**103.3** Sinon, il existe un vecteur $\varepsilon_1$ tel que $q(\varepsilon_1)\neq0$ et la droite $D=\mathbb{K}\cdot\varepsilon_1$ est un sous-espace non isotrope :

$$E=\mathbb{K}\cdot\varepsilon_1\oplus D^0.$$

Si $(\varepsilon_k)_{2\leqslant k\leqslant n}$ est une base conjuguée de $D^0$, alors la famille

$$(\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$$

est une base conjuguée de $E$.

**103.4** ↣ *Il existe une base de $E$ conjuguée pour $\varphi$.*

**103.5** Toute matrice symétrique est congruente à une matrice diagonale.

**Formes quadratiques sur un espace euclidien**

**104.** Soit $E$, un espace euclidien.

**104.1** Si $u\in\mathcal{S}(E)$ vérifie

$$\forall\,x\in E,\qquad(\,x\,|\,u(x)\,)=0,$$

alors $u$ est l'endomorphisme nul.

**104.2** ↣ *Une application $q:E\to\mathbb{R}$ est une* **forme quadratique** *sur $E$ lorsqu'il existe un endomorphisme auto-adjoint $u\in\mathcal{S}(E)$ tel que*

$$\forall\,x\in E,\qquad q(x)=(\,x\,|\,u(x)\,).$$

**104.3** La forme quadratique $q$ est positive (resp. définie positive) si, et seulement si, l'endomorphisme $u\in\mathcal{S}(E)$ est positif (resp. défini positif).

**105. Exemples**
Soit $E$, un espace euclidien.
**105.1** Pour tout endomorphisme $u \in \mathrm{L}(E)$, l'application $q$ définie par

$$\forall\, x \in E, \qquad q(x) = \big\|u(x)\big\|^2$$

est une forme quadratique positive sur $E$. Elle est définie positive si, et seulement si, l'endomorphisme $u$ est injectif.
**105.2** Pour tout endomorphisme $u \in \mathrm{L}(E)$, l'application $q$ définie par

$$\forall\, x \in E, \qquad q(x) = (\, x \,|\, u(x)\,)$$

est la forme quadratique sur $E$ associée à $(u + u^*)/2 \in \mathcal{S}(E)$.
**105.3** Soit $q$, une forme quadratique. Pour tout endomorphisme $u$ de $E$, l'application $q \circ u$ est une forme quadratique.
**105.4** Quels que soient les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ de $E$, les applications

$$\Big[\boldsymbol{x} \mapsto (\, \boldsymbol{a} \,|\, \boldsymbol{x}\,)^2\Big] \quad \text{et} \quad q = [\boldsymbol{x} \mapsto (\, \boldsymbol{a} \,|\, \boldsymbol{x}\,) \cdot (\, \boldsymbol{b} \,|\, \boldsymbol{x}\,)]$$

sont des formes quadratiques sur $E$. La forme $q$ est associée à l'endomorphisme auto-adjoint $u$ défini par

$$\forall\, \boldsymbol{y} \in E, \quad u(\boldsymbol{y}) = (\, \boldsymbol{b} \,|\, \boldsymbol{y}\,) \cdot \boldsymbol{a} + (\, \boldsymbol{a} \,|\, \boldsymbol{y}\,) \cdot \boldsymbol{b}.$$

**105.5** L'application $q$ définie par

$$\begin{aligned} q(P) &= \int_0^1 P(t)P''(t)\,\mathrm{d}t \\ &= P(1)P'(1) - P(0)P'(0) - \int_0^1 \big[P'(t)\big]^2\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

est une forme quadratique sur $E = \mathbb{R}_n[X]$. Est-elle positive ?
**105.6** L'application $q$ définie sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$q(M) = \mathrm{tr}(M^\top M) + (\mathrm{tr}\, M)^2$$

est une forme quadratique définie positive.

**106. Décomposition canonique en carrés**
On considère la forme quadratique $q$, associée à un endomorphisme auto-adjoint $u$ de $E$.
**106.1** Il existe une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de valeurs propres de $u$ et, en notant $\lambda_k$, la valeur propre réelle associée au vecteur propre $e_k$,

$$\forall\, x \in E, \qquad q(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, (\, e_k \,|\, x\,)^2.$$

**106.2** Cette décomposition permet de comparer la forme quadratique $q$ à la norme euclidienne sur $E$.

$$\forall\, x \in E, \quad \Big(\min_{1\leqslant k\leqslant n} \lambda_k\Big) \cdot \|x\|^2 \leqslant q(x) \leqslant \Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n} \lambda_k\Big) \cdot \|x\|^2$$

**107. Forme quadratique décomposée en carrés**
Soient $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, …, $\varepsilon_n$, des formes linéaires linéairement indépendantes sur $E$. La forme quadratique $\psi : E \to \mathbb{R}$ définie par **[93.4]**

$$\forall\, x \in E, \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \big[\varepsilon_k(x)\big]^2$$

est positive si, et seulement si, tous les $\alpha_k$ sont positifs **[4.44]**.
**108.** La définition **[104.2]** vaut également dans le cas où la dimension de l'espace $E$ est infinie.
**108.1** On considère l'application $q$ définie sur $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ par

$$\forall\, f \in E, \quad q(f) = \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. L'application $q$ est une forme quadratique sur $E$.
2. Existe-t-il une forme linéaire $T$ sur $E$ telle que $q = T^2$ ?
3. S'il existe des formes linéaires $\varepsilon_1$, …, $\varepsilon_n$ linéairement indépendantes telles que

$$q \in \mathrm{Vect}(\varepsilon_1^2, \ldots, \varepsilon_n^2),$$

alors $\mathrm{Ker}\,\varepsilon_1 \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}\,\varepsilon_n = \{0_E\}$.

On sait **[4.44]** qu'il existe une famille $(u_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ telle que

$$\forall\, 1 \leqslant i,k \leqslant n, \quad \varepsilon_i(u_k) = \delta_{i,k}.$$

Commenter.
**108.2** Pour toute fonction $h \in E$, l'application définie par

$$\forall\, f \in E, \quad q_h = \int_0^1 f^2(t)h(t)\,\mathrm{d}t$$

est une forme quadratique sur $E$. Condition sur $h$ pour que $\varphi_h$ soit positive ? définie positive ?

## Questions, exercices & problèmes

### Perfectionnement

**109. Exemples et contre-exemples**
1. Exemples d'endomorphismes auto-adjoints ? non auto-adjoints ?
2. Exemples d'endomorphismes auto-adjoints positifs ? définis positifs ? non positifs ?
3. Exemple d'endomorphisme $u$ tel que $\det u = \pm 1$ et qui n'est pas une isométrie.
4. Si $\|\cdot\|$ désigne la norme associée au produit scalaire défini par

$$\forall\, P, Q \in \mathbb{R}[X], \quad (\, P \,|\, Q\,) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t,$$

alors $\|X^n\|$ tend vers 0 alors que la suite des fonctions $[t \mapsto t^n]$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. Comparer avec **[8]** et avec **[7.154]**.

**110. Méthodes**
1. Comment déterminer l'adjoint d'un endomorphisme ?
2. Comment vérifier qu'une matrice est orthogonale ?
3. Soit $A \in O_3(\mathbb{R})$.
3.a Comment déterminer si $A$ est une matrice de rotation ?
3.b Comment déterminer un plan stable par $A$ ?
4. Comment vérifier qu'un endomorphisme est une isométrie ?
5. Comment vérifier qu'un endomorphisme est une projection orthogonale ? une symétrie orthogonale ?
6. Un endomorphisme $u$ est représenté par la matrice $A$ dans une base $\mathscr{B}$ (qui n'est pas nécessairement une base orthonormée).
6.a Comment déterminer si $u$ est auto-adjoint ?
6.b Comment déterminer si $u$ est une isométrie ?

### Approfondissement

**111.** Il existe une matrice $M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}\, M = a$ et $\det M = b$ si, et seulement si, $a^2 \geqslant 4b$.
**112.** Soient $A_1$, …, $A_p \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
**112.1** S'il existe une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, \quad A_k \in \mathbb{R}[A],$$

alors les matrices $A_k$ commutent deux à deux.
**112.2** Si les matrices $A_k$ commutent deux à deux, alors **[123]** il existe une matrice orthogonale $P$ telle que $P^\top.A_k.P$ soit diagonale pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$.
Il existe donc des polynômes $Q_1$, …, $Q_p$ tels que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, \qquad A_k = Q_k(A)$$

où $A = P.\,\mathrm{Diag}(1, 2, \ldots, n).P^\top \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

**113. Caractérisation des homothéties**
On considère un espace euclidien $E$.
1. Si tout hyperplan de $E$ est stable par $u$, alors l'adjoint $u^*$ de $u$ est une homothétie **[12.66]**, donc $u$ est une homothétie.
2. S'il existe un entier $2 \leqslant r < n$ tel que tout sous-espace de dimension $r$ soit stable par $u$, alors tout hyperplan de $E$ est stable par $u$.

**114. Endomorphismes anti-symétriques**
L'endomorphisme $f$ d'un espace euclidien $E$ est dit ***anti-symétrique*** lorsque

$$\forall\, x, y \in E, \quad \big(\, f(x) \,\big|\, y \,\big) = -\big(\, x \,\big|\, f(y) \,\big).$$

**114.1** Les propriétés suivantes sont équivalentes :
1. $f$ est anti-symétrique.
2. Pour tout $x \in E$, $\quad \big(\, f(x) \,\big|\, x \,\big) = 0$.
3. La matrice $A$ qui représente $u$ dans une base orthonormée est anti-symétrique : $A^\top = -A$.

**114.2** On suppose ici que $E$ est un espace euclidien orienté de dimension 3.
4. Pour tout $u \in E$, l'application $f_u = [x \mapsto u \wedge x]$ est anti-symétrique.
5. Pour tout endomorphisme anti-symétrique $f$, il existe un, et un seul, vecteur $u \in E$ tel que $f = f_u$.
6. L'endomorphisme $f_u$ est diagonalisable si, et seulement si, $u = 0$.
7. Il existe [**88**] une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de $f^2$. Quels sont les valeurs propres et les sous-espaces propres de $f^2$ ?

**114.3** Soit $f \in \mathrm{L}(E)$, un endomorphisme anti-symétrique d'un espace euclidien de dimension quelconque.
8. Si $F$ est un sous-espace stable par $f$, alors $F^\perp$ est aussi stable par $F$.
9. Le noyau et l'image de $f$ sont supplémentaires et orthogonaux dans $E$.

$$E = \operatorname{Ker} f \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} f$$

10. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, une racine du polynôme minimal de $f$, considéré comme un polynôme à coefficients complexes.

10.a Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice de $u$ dans une base orthonormée $\mathscr{B}$, alors il existe un vecteur-colonne $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = \lambda X$ et

$$|\lambda|^2\, (\overline{X})^\top.X = (\overline{AX})^\top.(AX) = -\lambda^2\, (\overline{X})^\top.X.$$

10.b Qu'en conclure si $\lambda \in \mathbb{R}$ ? Et si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ?
11. Le rang de $f$ est pair et $\det(f) \geqslant 0$.
12. L'endomorphisme $f$ est-il diagonalisable ?

**115. Décomposition QR**
**115.1** L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales et l'ensemble $T_n^+$ des matrices triangulaires supérieures dont les valeurs propres sont strictement positives sont des sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R}) \cap T_n^+ = \{I_n\}$.

**115.2** Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
1. L'application

$$\varphi = \Big[(X, Y) \mapsto X^\top.(A^\top.A).Y\Big]$$

est un produit scalaire sur $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. La base canonique de $E$ est-elle orthonormée pour ce produit scalaire ?
2. Il existe une base $\mathscr{B}$ de $E$, orthonormée pour $\varphi$, telle que la matrice de passage $P$ de la base canonique à la base $\mathscr{B}$ appartienne à $T_n^+$.
3. Il existe une matrice $R \in T_n^+$ telle que $A^\top.A = R^\top.R$.
4. Il existe un, et un seul, couple $(Q, R) \in O_n(\mathbb{R}) \times T_n^+$ tel que $A = QR$.

**116.** Soient $E$, un espace euclidien et $u$, un endomorphisme trigonalisable de $E$.

**116.1** Il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est triangulaire.

**116.2** L'adjoint $u^*$ de $u$ est un polynôme en $u$ si, et seulement si, $u$ est auto-adjoint.

**117.** Une forme quadratique $q$ telle que $q(x) \neq 0$ pour tout $x \neq 0$ est définie positive ou définie négative.

## Pour aller plus loin

**118. Questions pour réfléchir**
1. Soit $\big(E, (\,\cdot\,|\,\cdot\,)\big)$, un espace préhilbertien. Pour tout vecteur $a \in E$, la forme linéaire $\varphi_a = [x \mapsto (\, a \,|\, x \,)]$ est continue. Le théorème de Riesz [**7.68.3**] est-il encore vrai en dimension infinie ?
2. Si $E$ est un espace réel de dimension finie et si $u \in \mathrm{L}(E)$ est diagonalisable, alors il existe un produit scalaire sur $E$ pour lequel $u$ est un endomorphisme auto-adjoint.
3. *Suite de* [**8**] – La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.
4. Étudier la structure du ***cône isotrope*** de $u \in \mathrm{L}(E)$ :

$$C_0(u) = \big\{x \in E \,:\, \big(\, x \,\big|\, u(x) \,\big) = 0\big\}$$

et comparer $C_0(u)$ au noyau de $u$.
5. Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$.

5.a Existe-t-il une structure euclidienne sur $E$ pour laquelle $u$ est une isométrie ?

5.b Étudier le cas où $u$ est une symétrie.

**119.** Soit $u$, un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne orientée canonique.
1. Quels que soient $x$, $y$ et $z$ dans $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}\operatorname{Det}\big(u(x), y, z\big) + \operatorname{Det}\big(x, u(y), z\big) + \operatorname{Det}\big(x, y, u(z)\big)\\ = \operatorname{tr}(u) \cdot \operatorname{Det}(x, y, z).\end{aligned}$$

2. D'après [**7.69.3**], il existe un, et un seul, endomorphisme $v$ de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad v(x \wedge y) = u(x) \wedge y + x \wedge u(y).$$

**120. Étude d'une rotation en dimension 3 (variante de [21])**
Dans un espace euclidien orienté de dimension 3, on considère une rotation $u$ autour du vecteur unitaire $\boldsymbol{n}$.

**120.1** Pour toute base orthonormée directe $\mathscr{B} = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ de $E$ (obtenue en complétant le vecteur unitaire $\boldsymbol{n}$),

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

**120.2** D'après [**20**],

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in E, \quad (u - u^{-1})(\boldsymbol{x}) = (2\sin\theta) \cdot (\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{x})$$

**120.3** Si $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est la matrice relative à une base orthonormée directe $\mathscr{B}_0$ de la rotation $u$, alors il existe trois réels $(p, q, r)$ tels que

$$\frac{1}{2}(A - A^\top) = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\cos\theta = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta \cdot \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\boldsymbol{n}) = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}.$$

Comparer avec [**21**].

**121. Structure euclidienne sur $E^*$**
La structure euclidienne de $E$ permet de définir une structure euclidienne naturelle sur son espace dual $E^* = \mathrm{L}(E, \mathbb{R})$.
Pour tout $a \in E$, on pose $\varphi_a = [x \mapsto (\, a \,|\, x \,)]$.
1. Il existe un, et un seul, produit scalaire $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ sur $E^*$ tel que

$$\forall\, (a, b) \in E \times E, \quad \langle\, \varphi_a \,|\, \varphi_b \,\rangle = (\, a \,|\, b \,)$$

et l'application $[a \mapsto \varphi_a]$ est une isométrie de $\big(E, (\,\cdot\,|\,\cdot\,)\big)$ sur $\big(E^*, \langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle\big)$.
2. Une base $\mathscr{B}$ de $E$ est une base orthonormée pour $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ si, et seulement si, sa base duale $\mathscr{B}^*$ est une base orthonormée de $E^*$ pour $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$.

**122.** On considère un espace euclidien $(E, (\cdot\,|\,\cdot))$.

1. Si $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $E$, alors il existe un, et un seul, endomorphisme auto-adjoint défini positif $u$ tel que

$$\forall\,(x,y)\in E\times E,\quad \langle x\,|\,y\rangle = \big(x\,\big|\,u(y)\big).$$

2. Soit $v$, un endomorphisme de $E$ auto-adjoint pour $(\cdot\,|\,\cdot)$. Alors $v$ est auto-adjoint pour $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ si, et seulement si, il commute à l'endomorphisme $u : u\circ v = v\circ u$.

**123. Codiagonalisation de matrices symétriques [12.220]**
Soit $(A_i)_{i\in I}$, une famille de matrices symétriques réelles de même taille.
Il existe une matrice inversible $P$ telle que toutes les matrices

$$P^{-1}A_iP$$

soient diagonales si, et seulement si, les matrices $A_i$ commutent deux à deux.

**124.1** Si $A\in\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors il existe une matrice $R\in\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A=R^2$ et

$$\operatorname{tr}(PA) = \langle PR\,|\,R\rangle \leqslant \operatorname{tr}A$$

pour toute matrice orthogonale $P$.

**124.2** Soit $A\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, telle que

$$\forall\,P\in O_2(\mathbb{R}),\quad \operatorname{tr}(PA)\leqslant\operatorname{tr}A.$$

Alors la matrice $A$ est symétrique.

**124.3** Soit $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Si

$$\forall\,P\in O_n(\mathbb{R}),\quad \operatorname{tr}(PA)\leqslant\operatorname{tr}A,$$

alors $A\in\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

**125. Factorisation d'une isométrie**
On considère un espace euclidien $(E, (\cdot\,|\,\cdot))$.
Toute isométrie de $E$ est décomposable en un nombre fini de réflexions et le nombre de réflexions qui apparaissent dans cette factorisation peut être choisi inférieur à $\dim E$.

**125.1** Soit $f\in O(E)$, tel que $f\neq \mathrm{I}_E$. Il existe $u\neq 0_E$ tel que $f(u)\neq u$ et on pose $v=f(u)$.

1. Il existe une réflexion $r$ telle que $r(u)=v$.
2. Pour tout $x\in E$ tel que $f(x)=x$,

$$(x\,|\,u-v)=0\quad\text{et}\quad r(x)=x.$$

3.
$$\dim\operatorname{Ker}(r\circ f-\mathrm{I}_E)>\dim\operatorname{Ker}(f-\mathrm{I}_E)$$

**125.2** On construit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'isométries de $E$ en posant $f_0=f$ et, pour tout $p\geqslant 1$,

— si $f_{p-1}=\mathrm{I}_E$, alors $f_p=\mathrm{I}_E$ ;

— sinon, alors $f_p=r_p\circ f_{p-1}$, où $r_p$ est une réflexion telle que

$$\dim\operatorname{Ker}(f_p-\mathrm{I}_E)>\dim\operatorname{Ker}(f_{p-1}-\mathrm{I}_E).$$

Il existe un entier $p\leqslant\dim E$ tel que $f_p=\mathrm{I}_E$. Que peut-on en déduire sur $f$ ?

**125.3 Applications**

4. Décomposition d'une rotation du plan en produit de deux réflexions.
5. Classification géométrique des isométries de l'espace en fonction du sous-espace fixe (identité, réflexions, rotations, composées d'une rotation et d'une réflexion qui commutent).

**126. Matrices orthosemblables**
La matrice $B\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est ***orthosemblable*** à la matrice $A$ lorsque

$$\exists\,P\in O_n(\mathbb{R}),\quad B=P^{\top}.A.P.$$

1. Cette relation est une relation d'équivalence sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Deux matrices orthosemblables sont semblables. La réciproque est-elle vraie ?
3. Si $A$ est symétrique et si $B$ est orthosemblable à $A$, alors $B$ est symétrique.
4. Que dire d'une matrice orthosemblable à une matrice diagonale ?
5. Interpréter géométriquement la notion de matrices orthosemblables.

**127. Réduction simultanée de deux formes quadratiques**

**127.1 Aspects théoriques**
L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni d'un produit scalaire $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ représenté par la matrice $A\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ dans la base canonique. On considère une forme quadratique $q$, représentée par la matrice $B\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans la base canonique.

1. Il existe une matrice diagonale $D_1$ et une matrice $P_1$ telles que

$$P_1^{\top}.P_1=I_n\quad\text{et}\quad B=P_1^{\top}.D_1.P_1.$$

2.a Il existe un, et un seul, endomorphisme auto-adjoint $u$ de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall\,x\in\mathbb{R}^n,\quad q(x)=\langle x\,|\,u(x)\rangle.$$

2.b La matrice de $u$ relative à la base canonique est $A^{-1}B$.

2.c Il existe une matrice diagonale $D_2$ et une matrice $P_2$ telles que

$$P_2^{\top}.P_2=A\quad\text{et}\quad B=P_2^{\top}.D_2.P_2.$$

En outre, $A^{-1}.B=P_2^{-1}.D_2.P_2$. Discuter l'unicité des matrices $P_2$ et $D_2$.

2.d La base $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ représentée par la matrice $P_2^{-1}$ dans la base canonique est orthonormée pour $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ et

$$\forall\,i\neq j,\quad \langle\varepsilon_i\,|\,u(\varepsilon_j)\rangle=0.$$

**127.2 Exemples**
L'espace $\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire canonique $(\cdot\,|\,\cdot)$.

3. Les formes quadratiques définies par

$$\forall\,\boldsymbol{x}=(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad\begin{cases}q_1(\boldsymbol{x}) = x^2+2xy+5y^2\\ q_2(\boldsymbol{x}) = x^2+2xy+3y^2\end{cases}$$

sont définies positives.

4. La matrice

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1/2\\0&1/2\end{pmatrix}$$

est semblable à $\operatorname{Diag}(1,1/2)$.

5. Il existe une base $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ de $\mathbb{R}^2$, orthonormée pour $(\cdot\,|\,\cdot)$, telle que

$$q_1(\boldsymbol{x})=(3-\sqrt{5})\,(\varepsilon_1\,|\,\boldsymbol{x})^2+(3+\sqrt{5})\,(\varepsilon_2\,|\,\boldsymbol{x})^2$$

pour tout $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$. Par suite,

$$\min_{x\neq 0}\frac{q_1(\boldsymbol{x})}{(x\,|\,x)}=3-\sqrt{5}\quad\text{et}\quad\max_{x\neq 0}\frac{q_1(\boldsymbol{x})}{(x\,|\,x)}=3+\sqrt{5}.$$

6. On note $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$, le produit scalaire associé à $q_1$.

6.a Les vecteurs $\boldsymbol{u}=(1,0)$ et $\boldsymbol{v}=(-1/2,1/2)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ qui est orthonormée pour $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$.

6.b La forme quadratique définie par

$$\forall\,\boldsymbol{x}=(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad q_2(\boldsymbol{x})=x^2+2xy+3y^2$$

est représentée par la matrice $\operatorname{Diag}(1,1/2)$ dans la base $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$, donc

$$\forall\,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2,\quad q_2(\boldsymbol{x})=\langle\boldsymbol{u}\,|\,\boldsymbol{x}\rangle^2+\frac{1}{2}\langle\boldsymbol{v}\,|\,\boldsymbol{x}\rangle^2$$

et

$$\min_{x\neq 0}\frac{q_2(\boldsymbol{x})}{q_1(\boldsymbol{x})}=\frac{1}{2}\quad\text{et}\quad\max_{x\neq 0}\frac{q_2(\boldsymbol{x})}{q_1(\boldsymbol{x})}=1.$$

**128.** L'application $q : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par

$$q(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k^2$$

(avec $1 \leqslant n < n+p \leqslant d$) est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^d$.
**128.1** Sa matrice dans la base canonique $(e_1, \dots, e_d)$ de $\mathbb{R}^d$ est égale à

$$\mathrm{Diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{p}, \underbrace{0, \dots, 0}_{d-(n+p)}).$$

**128.2** Tout sous-espace $G$ dont la dimension est strictement supérieure à $n$ rencontre le sous-espace

$$F_0 = \mathrm{Vect}(e_{n+1}, \dots, e_d),$$

au sens où $\dim(F_0 \cap G) \geqslant 1$.
**128.3** Si $F$ est un sous-espace tel que la restriction de $q$ à $F$ soit définie positive :

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in F \setminus \{\boldsymbol{0}\}, \quad q(\boldsymbol{x}) > 0$$

alors $\dim F \leqslant n$.
**129.** L'espace $\mathbb{R}^d$ étant muni de sa structure euclidienne canonique, on note $S^1(F)$, la sphère unité de chaque sous-espace vectoriel $F \subset \mathbb{R}^d$ :

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \qquad \boldsymbol{x} \in S^1(F) \iff \begin{cases} \boldsymbol{x} \in F \\ \|\boldsymbol{x}\| = 1 \end{cases}.$$

On considère une famille croissante de nombre réels :

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_d.$$

1. L'application $q : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \quad q(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{d} a_k x_k^2$$

est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^d$.
2.

$$\min_{\boldsymbol{x} \in S^1(\mathbb{R}^d)} q(\boldsymbol{x}) = a_1 \qquad \max_{\boldsymbol{x} \in S^1(\mathbb{R}^d)} q(\boldsymbol{x}) = a_d$$

3. On note $V_n$, l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^d$ de dimension $1 \leqslant n \leqslant d$.
3.a →**[128]**

$$\forall\, F \in V_n, \quad a_n \leqslant \sup_{\boldsymbol{x} \in S^1(F)} q(\boldsymbol{x}) \leqslant a_d$$

3.b Pour tout $1 \leqslant n \leqslant d$,

$$\min_{F \in G_n} \sup_{\boldsymbol{x} \in S^1(F)} q(\boldsymbol{x}) = a_n \quad \text{et} \quad \max_{F \in G_n} \sup_{\boldsymbol{x} \in S^1(F)} q(\boldsymbol{x}) = a_d.$$

**130. Signature d'une forme quadratique**
On se donne des formes linéaires $f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q$ linéairement indépendantes dans $E$ et des scalaires réels strictement positifs $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$. On considère la forme quadratique $Q$ définie par

$$\forall\, x \in E, \quad Q(x) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \big[f_k(x)\big]^2 - \sum_{k=1}^{q} \beta_k \big[g_k(x)\big]^2.$$

1. Il existe un sous-espace $F_+$ de dimension $p$ tel que la restriction de $Q$ à $F_+$ soit une forme quadratique définie positive.
2. Si $\dim F > p$, alors il existe $x \in F$, non nul, tel que $Q(x) \leqslant 0$.
3. Soit $A$, la matrice de $Q$ relative à une base $\mathscr{B}$. Alors l'entier $p$ (resp. l'entier $q$) est le nombre de valeurs propres strictement positives (resp. strictement négatives) de $A$.
4. Relier le couple $(p, q)$ au rang de $Q$.
5. Que dire du couple $(p, q)$ lorsque $Q$ est positive ? définie positive ? négative ? définie négative ? dégénérée ?

Le couple $(p, q)$ est la ***signature*** de la forme quadratique $Q$.

**131. Formes symplectiques**
Soit $E$, un espace vectoriel réel de dimension finie $n$.
**131.1** *On appelle* **forme symplectique sur** $E$ *toute application bilinéaire* $\omega : E \times E \to \mathbb{R}$ *antisymétrique :*

$$\forall\, x, y \in E, \quad \omega(x, y) = -\omega(y, x)$$

*et non dégénérée :*

$$\big[\forall\, y \in E, \quad \omega(x, y) = 0\big] \implies x = 0_E.$$

**131.2** Soit $\mathscr{B} = (e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$, une base de $E$. Une forme symplectique $\omega$ sur $E$ est représentée dans la base $\mathscr{B}$ par la matrice

$$\Omega = \big(\omega(e_i, e_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Quels que soient les vecteurs $x$ et $y$ de $E$,

$$\omega(x, y) = X^\top . \Omega . Y$$

où les colonnes $X$ et $Y$ représentent respectivement $x$ et $y$ dans la base $\mathscr{B}$.
2. La matrice $\Omega$ est antisymétrique et inversible, donc la dimension $n$ est paire.

**131.3** Pour toute partie $F \subset E$, l'ensemble

$$F^\omega = \big\{x \in E \,:\, \forall\, y \in F, \quad \omega(x, y) = 0\big\}$$

est un sous-espace vectoriel de $E$.
**131.4** On suppose ici que $E = \mathbb{R}^2$ et on considère la matrice

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(On identifiera chaque vecteur de $\mathbb{R}^2$ à la colonne qui le représente dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.)
3. L'application $\omega = \Big[(x, y) \mapsto x^\top . \Omega . y\Big]$ est une forme symplectique sur $\mathbb{R}^2$.
4. Pour toute droite vectorielle $D \subset \mathbb{R}^2$,

$$D^\omega = D.$$

**131.5** Plus généralement, quelle que soit la forme symplectique $\omega$ sur $E$, toute droite vectorielle $D \subset E$ est contenue dans le sous-espace $D^\omega$.