
CALCUL DES PROBABILITÉS

Exercice 1

rms135-809

Un magasin dispose d'un stock de N produits. Le nombre de clients qui passent dans une journée suit la loi de Poisson de paramètre λ et chaque client a une probabilité p d'acheter le produit. Quelle est la probabilité pour que le magasin soit en rupture de stock avant la fin de la journée?

Exercice 2

rms135-810 - Jeu de Yam

On dispose de N dés identiques à six faces. On lance ces dés et, après chaque lancer, on relance ceux qui n'ont pas donné 6. On note S_n , le nombre total de dés ayant donné 6 après le n -ième lancer.

1. Proposer un modèle probabiliste pour lequel S_n est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale.
2. Dédire de ce modèle que, presque sûrement, les N dés donnent 6 après un nombre fini de lancers :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [S_n = N]\right) = 1.$$

3. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$T(\omega) = \inf(\{n \in \mathbb{N}^* : S_n(\omega) = N\} \cup \{+\infty\}).$$

3. a. Démontrer que T est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et préciser sa loi.
3. b. Démontrer que T est une variable aléatoire d'espérance finie et calculer cette espérance.

Exercice 3

rms135-811

Un péage autoroutier comporte trois files et n véhicules se présentent, en choisissant aléatoirement une voie. Pour $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, on note X_i , le nombre de véhicules qui passent par la file i .

1. Proposer un modèle probabiliste dans lequel X_1 , X_2 et X_3 sont des variables aléatoires.
2. Dédire de ce modèle $\mathbf{V}(X_1)$, $\mathbf{V}(X_2)$ et $\mathbf{V}(X_1 + X_2)$. En déduire $\mathbf{Cov}(X_1, X_2)$.
3. Les variables aléatoires X_1 , X_2 et X_3 sont-elles indépendantes?

Exercice 4

rms135-812

Une urne contient des boules numérotées de 1 à n . On en prend une poignée au hasard, on note le numéro des boules, on remet les boules dans l'urne et on recommence.

On note X , le nombre de numéros qui sont apparus dans les deux tirages.

Proposer un modèle probabiliste dans lequel X est une variable aléatoire et donner la loi de X selon ce modèle.

Exercice 5

rms135-823

Soient X , Y et Z , trois variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que

$$X \stackrel{d}{=} Z \stackrel{d}{=} \mathcal{G}(p) \quad \text{et que} \quad Y \stackrel{d}{=} \mathcal{P}(\lambda).$$

Calculer la probabilité pour que le vecteur aléatoire

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

soit un vecteur propre de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6**rms135-831**

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite d'évènements. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$Z(\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega).$$

Démontrer que : si la série $\sum \mathbf{P}(A_n)$ converge, alors Z est une variable aléatoire d'espérance finie.

Exercice 7**rms135-837**

On considère une variable aléatoire X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

1. Démontrer que $\mathbf{P}(X \geq 2\lambda) \leq 1/\lambda$.

2. Soit Z , une variable aléatoire réelle, centrée, admettant un moment d'ordre deux. On pose $\mathbf{V}(Z) = \sigma^2$.

2. a. Démontrer que

$$\forall a > 0, \forall x > 0, \quad \mathbf{P}(Z \geq a) \leq \frac{\sigma^2 + x^2}{(x + a)^2}.$$

2. b. En déduire que

$$\mathbf{P}(Z \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

3. Démontrer l'inégalité de Cantelli :

$$\mathbf{P}(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{1 + \lambda}.$$

Exercice 8**rms135-838**

1. Rappeler (sans démonstration) le développement en série entière au voisinage de 0 de

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel r pour qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N} telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = n) = \frac{(2n)!}{2^{3n}(n!)^2} \cdot r.$$

3. Calculer alors l'espérance et la variance de X .

Exercice 9**rms135-842**

1. Démontrer qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N} dont la fonction génératrice vérifie

$$\forall t \in [0, 1], \quad G(t) = \frac{e^{t-1}}{\sqrt{2-t}}.$$

2. Calculer l'espérance et la variance de X .

Exercice 10**rms135-1180**

Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite de réels appartenant à l'intervalle ouvert $]0, 1[$, telle que la série $\sum p_n$ converge.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sur lequel est définie une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires en supposant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que X_n suive la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p_n)$.

On pose alors

$$\forall \omega \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n(\omega) = \sum_{k=0}^n X_k(\omega)$$

ainsi que

$$\forall \omega \in \Omega, \quad S(\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} X_k(\omega).$$

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer $[S \geq k]$ à l'aide des évènements $[S_n \geq k]$. En déduire que S est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.
2. Vérifier que la variable aléatoire S est finie presque sûrement :

$$\mathbf{P}(S \in \mathbb{N}) = 1.$$

3. Démontrer que S admet une espérance et calculer cette espérance.