Espaces vectoriels normés : énoncés

Exercices CCP

1) On note $E = \mathbb{R}[X]$ et pour $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in E$:

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \qquad \|P\|_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k |a_k| \qquad \|P\|_3 = \sup_{0 \le t \le 1} |P(t)|.$$

Montrer que $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_3$ sont des normes sur E. Sont-elles équivalentes ?

2) Donner un espace vectoriel normé E et une suite d'éléments de E bornée mais sans valeur d'adhérence.

3) Montrer que l'application $N : \ (x, y) \mapsto \int_0^1 |x + ty| \, dt$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$ et tracer sa sphère unité.

4) Soit E et F deux espaces vectoriels normés. On munit l'espace $E \times F$ de la norme :

$$\forall (x, y) \in E \times F, \ \|(x, y)\| = \max(\|x\|, \|y\|)$$

Pour $A \subset E, \ B \subset F$, montrer :

- $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$
- $\mathrm{Int}(A \times B) = \mathrm{Int}(A) \times \mathrm{Int}(B)$
- $\mathrm{Fr}(A \times B) = \big(\mathrm{Fr}(A) \times \overline{B}\big) \cup \big(\overline{A} \times \mathrm{Fr}(B)\big)$

5) Soit A un partie d'un espace vectoriel normé E. Montrer que $\mathrm{Fr}(A) = A$ si et seulement si A est un fermé d'intérieur vide. En déduire que pour toute partie B de E, $\mathrm{Fr}\,(\mathrm{Fr}\,(\mathrm{Fr}\ B)) = \mathrm{Fr}\,(\mathrm{Fr}\ B)$.

6) Soit $(M_k)_{k \ge 0}$ une suite d'éléments de $GL_n(\mathbb{R})$. On suppose que les suites (M_k) et (M_k^{-1}) convergent respectivement vers des matrices M et N. Montrer que M est inversible et que $N = M^{-1}$.

7) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que la suite $(A^k)_{k \ge 0}$ converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ quand n tend vers l'infini. Montrer que B est la matrice d'une projection.

8) Soit $(A_k)_{k \ge 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_n(K)$, où $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que la suite $(A_k)_{k \ge 0}$ converge (pour une norme quelconque de $\mathcal{M}_n(K)$) si et seulement si pour tout vecteur $X \in K^n$, la suite $(A_k X)_{k \ge 0}$ converge.

9) Soit A une algèbre normée de dimension finie, c'est-à-dire une algèbre de dimension finie munie d'une norme vérifiant :

$$\forall u, v \in A, \ \|u.v\| \le \|u\| \,.\, \|v\|$$

On note e l'élément unité de A.

a) Soit u est un élément de A tel que $\|u\| < 1$. Démontrer :

- la série $\sum_{k \ge 0} u^k$ est convergente ;
- $e - u$ est inversible et $(e - u)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} u^k$.

b) Démontrer que pour tout $u \in A$, $\sum_{k \ge 0} \frac{u^k}{k!}$ est convergente.

10) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} P \in GL_n(\mathbb{C})$. Que peut-on dire de M ?

Exercices Mines-Centrale: normes

11) Soit F l'ensemble des applications lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ nulles en 0. Pour $f \in F$, on pose :

$$N(f) = \sup_{x \neq y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|.$$

Montrer que N est une norme sur F et comparer la à la norme de la convergence uniforme.

12) Les normes suivantes sont-elles équivalentes ?

a) $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$

$$\|f\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)| \qquad N_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \qquad N_2(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$$

b) $E = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ \sum_{n \geq 0} |x_n| \text{ converge}\}$

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \qquad \|x\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2}$$

13) Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et $g \in E$. On considère $N_g \ : \ f \mapsto \|fg\|_\infty$. À quelle condition N_g est-elle une norme sur E ? À quelle condition supplémentaire cette norme est-elle équivalente à $\| \ \|_\infty$?

Si g_1 et g_2 sont deux éléments de E tels que N_{g_1} et N_{g_2} soient des normes, à quelle condition N_{g_1} et N_{g_2} sont-elles équivalentes ?

14) (Centrale 2019) On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \longmapsto \|A\| = \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2}$.

a) Montrer que $\| \ \|$ est une norme multiplicative, i.e. que $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$ pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit une suite $(M_k)_{k \geq 0}$ par la donnée de $M_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la relation de récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ M_{k+1} = 2M_k - M_k A M_k.$$

Montrer que si $\|I_n - AM_0\| < 1$, A est inversible et $M_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} A^{-1}$. Que peut-on dire de la vitesse de convergence ?

15) Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et $n \mapsto r_n$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Pour chaque famille sommable $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, on définit l'application $N_a : f \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, |f(r_n)|$.

a) Montrer que N_a est une norme sur E, non équivalente à la norme de la convergence uniforme.

b) Si $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une autre famille sommable de réels strictement positifs, à quelle condition les normes N_a et N_b sont-elles équivalentes ?

16) On munit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ de la norme $\| \ \|_1$ ou $\| \ \|_2$. Montrer que la convergence au sens de l'une de ces deux normes n'entraine pas la convergence simple.

17) a) Construire deux normes sur $\mathbb{R}[X]$ telle qu'aucune des deux ne soit plus fine que l'autre.

b) Construire deux normes sur $\mathbb{R}[X]$ telles que $D : \ P \longmapsto P'$ soit continue pour l'une et discontinue pour l'autre.

c) Existe-t-il une norme sur $\mathbb{R}[X]$ qui rende continue D et l'application $P \longmapsto XP$?

18) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\|A\| = \sup\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$. Pour $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on pose $\|A\|_P = \|P^{-1}AP\|$. On rappelle que le *rayon spectral* de A est $\rho(A) = \max\limits_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|$.

a) Montrer que pour tout $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, l'application $\| \ \|_P$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire une norme telle que $\|AB\|_P \le \|A\|_P \, \|B\|_P$ pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que A^k tend vers 0 quand k tend vers l'infini. Montrer que $\rho(A) < 1$.

c) Réciproquement, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rayon spectral strictement inférieur à 1. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\|A\|_P < 1$. En déduire que A^k tend vers 0 quand k tend vers l'infini.

19) Une suite $(x_n)_{n \ge 0}$ d'un espace vectoriel normé E est dite *de Cauchy* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall \, p, q \in \mathbb{N}, \ (p \ge n_0 \text{ et } q \ge n_0) \Longrightarrow \|x_p - x_q\| \le \varepsilon.$$

a) Montrer qu'une suite convergente est de Cauchy.

On dit que l'espace E est *complet* si, réciproquement, toute suite de Cauchy de E est convergente. Un espace vectoriel normé complet est appelé *espace de Banach*.

b) Montrer qu'une suite de Cauchy est bornée et que si elle possède une valeur d'adhérence, elle est convergente. En déduire que tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

c) Montrer que l'espace $\mathcal{B}([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions bornées de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est complet pour $\| \ \|_\infty$.

d) Montrer que l'espace $\mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$ n'est pas complet pour $\| \ \|_1$.

e) Montrer qu'un espace vectoriel normé E est un espace de Banach si et seulement si toute série absolument convergente d'éléments de E est convergente (pour la réciproque, on utilisera le b).

Exercices Mines-Centrale: topologie

20) On munit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme. Calculer la distance de 0 à la partie F définie par :

$$F = \left\{ f \in E \ / \ \int_0^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{1/2}^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1 \right\}$$

Montrer que cette distance n'est pas atteinte, bien que F soit fermé.

21) Soit E un espace vectoriel normé et C une partie convexe de E. Montrer que l'adhérence et l'intérieur de C sont convexes.

22) (Mines 2016) Soit E un espace préhilbertien. Montrer que $\{(x,y) \in E^2, \ (x,y) \text{ est libre}\}$ est un ouvert de E^2.

23) On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) d'une norme quelconque.

a) Montrer que les applications suivantes sont continues :

$$(M, X) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n \mapsto MX \qquad (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto MN \qquad M \mapsto {}^tM$$

$$M \mapsto \det(M) \qquad M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mapsto M^{-1}$$

b) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

c) Montrer que pour toute matrice M, il existe une voisinage $\mathcal{V}$ de M telle que $\mathrm{rg}(M) \le \mathrm{rg}(N)$ pour tout élément N de $\mathcal{V}$.

d) Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et si (M_k) est une suite bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la réunion des spectres des matrices M_k est bornée.

e) Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la suite (M^k) tend vers 0 si et seulement si les valeurs propres complexes de M sont toutes de module strictement inférieur à 1. À quelle condition la suite (M^k) est-elle bornée ?

f) Calculer l'adhérence et l'intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables.

g) Même question avec $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ / \ \exists p \in \mathbb{N}^*,\ M^p = I\}$.

24) Décomposition polaire

On munit $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ de sa topologie naturelle.

a) Montrer que l'application définie de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times S_n^{+*}(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui à un couple (O, S) associe le produit OS est un homéomorphisme.

b) Montrer que l'application exponentielle réalise un homéomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ sur $S_n^{+*}(\mathbb{R})$. Qu'en déduit-on sur la structure topologique de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$?

25) Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'un espace vectoriel normé E, l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un fermé.

26) Soit E un espace vectoriel normé et $P \in \mathbb{R}[X]$ de valuation 1. Montrer que 0 est un point isolé de l'ensemble des $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que $P(u) = 0$. Pourquoi cette propriété devient-elle fausse lorsque E est de dimension au moins 2 et P de valuation supérieure à 2 ?

27) Montrer que si A est une partie non vide et bornée d'un espace vectoriel normé E de dimension finie $n \geq 1$, A et $Fr(A)$ ont même diamètre.

28) Pour A partie d'un espace vectoriel normé E et $x \in \overline{A}$, montrer que l'on est dans un seul des deux cas suivants :

- il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \cap A = \{x\}$.
- pour tout $r > 0$, $B(x, r) \cap A$ est infini.

Dans le premier cas, on dit que x est un *point isolé* de A. Dans le second, que x est un *point d'accumulation* de A. Montrer que l'ensemble A' des points d'accumulation de A est une partie fermée.

29) (Mines 2016) a) Déterminer l'adhérence et l'intérieur de l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b) Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathcal{S}_M$ l'ensemble des matrices semblables à M. Donner une CNS pour que la matrice nulle appartiennent à l'adhérence de $\mathcal{S}_M$.

30) Soit F un fermé non vide d'un espace vectoriel de dimension finie E. On suppose que $f : \ F \to F$ est une application contractante, c'est-à-dire lipschitzienne de rapport $K \in [0, 1[$.

a) On fixe $x_0 \in F$ et on pose $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite (x_n) admet une limite $a \in F$ et que $f(a) = a$. On pourra transformer $(x_n)_{n\geq 0}$ en série.

b) Montrer que f possède un unique point fixe a dans F. Comment peut-on utiliser le résultat précédent pour calculer une approximation de a à ε près, pour $\varepsilon > 0$ fixé ?

31) Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'un espace vectoriel normé E, l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un fermé.

32) Soit A une partie convexe non vide d'un espace vectoriel normé E. Montrer que $x \longmapsto \mathrm{d}(x, A)$ est une application convexe.

33) Pour $n \geq 1$, on note $\mathcal{E}_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M^3 = I_n\}$. Le point I_n est-il un point isolé de $\mathcal{E}_n$?

Exercices Mines-Centrale: applications linéaires et continuité

34) Soit $c_0 = \{(x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \ / \ x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\}$ et $l_1 = \{(x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \ / \ \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| < +\infty\}$, munis respectivement des normes : $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ et $\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$.

Montrer que l'application $\varphi : x \in l_1 \mapsto \varphi(x) \in c_0^*$ définie par :

$$\forall x \in l_1, \forall y \in c_0,\ (\varphi(x))(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$$

est une isométrie de l_1 sur le dual topologique de c_0.

(le dual topologique d'un espace vectoriel normé E est l'espace des formes linéaires continues sur E, muni de sa norme usuelle)

35) Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et soit A une partie infinie bornée de $\mathbb{R}$. On munit E de la norme $\|P\|_A = \sup_{x\in A} |P(x)|$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note δ_a la fonction d'évaluation : $P \mapsto P(a)$. δ_a est-elle continue ? Si oui, calculer sa norme.

36) Soit $E = \left\{ f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\ \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$, muni de $\|\ \|_\infty$.

Montrer que pour tout $f \in E$, il existe une et une seule primitive g de f telle que $g \in E$. Montrer que l'application $\varphi :\ f \longmapsto g$ est un endomorphisme continu de E et calculer sa norme. On pourra, pour $f \in E$, démontrer qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $\varphi(f)(a) = 0$.

37) Soit E un espace vectoriel normé réel et f une application additive bornée sur la boule fermée unité de E. Montrer que f est linéaire et continue. Montrer que le résultat ne subsite pas si E est un espace vectoriel normé complexe.

38) Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Trouver l'adhérence et l'intérieur de $\{f \in \mathcal{L}(E) \ / \ f^2 = \mathrm{Id}\}$.

39) Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ muni de la norme uniforme et soit $n \mapsto r_n$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.

a) Montrer que $\varphi :\ f \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(r_n)}{(-2)^n}$ est une forme linéaire continue sur E.

b) Montrer que la distance de 0 à $\mathcal{H} = \varphi^{-1}(1)$ n'est pas atteinte.

c) Plus généralement, soit E un espace vectoriel normé et φ une forme linéaire continue non nulle sur E. Si $\mathcal{H} = \varphi^{-1}(1)$, montrer que la distance de 0 à $\mathcal{H}$ est atteinte si et seulement si $\sup_{\|x\|=1} |f(x)|$ est atteint.

40) Déterminer les normes matricielles sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associées aux normes $\|\ \|_\infty$, $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$.

41) (Centrale) Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Montrer que u est surjective si et seulement si l'image par u de tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

42) (Mines) Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\ \|_\infty$. Pour $f \in E$, on pose :

$$\forall\, x \in [0,1],\ T(f)(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

a) Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme continu T et calculer sa norme.

b) Soit $f \in E$ tel que $f \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe $x_0 > 0$ tel que :

$$\forall x \in [0, x_0[, \ |f(x)| < |f(x_0)| = \|f\|_\infty.$$

En déduire l'espace propre de T pour la valeur propre 2.

43) (Mines 2013) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On pose :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \ \|P\| = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n |P^{(n)}(0)|.$$

a) Montrer que $\| \ \|$ est une norme sur $\mathbb{C}[X]$.

b) Donner une CNS sur la suite (a_n) pour que l'application $P \longmapsto P'$ (resp. $P \longmapsto XP'$ et $P \longmapsto XP$) soit continue.

44) Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés et f une application bilinéaire de $E \times F$ dans G. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :

(i) f est continue en tout point ;

(ii) f est continue en $(0,0)$;

(iii) il existe une constante K telle que $\|f(x,y)\| \leq K \|x\| \|y\|$ pour tout $(x,y) \in E \times F$;

(iv) pour tout $x \in E$, l'application $F(x) : \ y \longmapsto f(x,y)$ est une application linéaire continue de F dans G et l'application $x \longmapsto F(x)$ est continue de E dans $\mathcal{L}_c(F,G)$.

45) Soit E un espace vectoriel normé. On note B la boule unité fermée de E et $\mathcal{L}_c(E)$ la sous-algèbre des endomorphismes continus de E. Pour $f \in \mathcal{L}_c(E)$, on note $|||f||| = \sup_{x \in B} \|f(x)\|$.

a) Montrer que pour tout $f \in \mathcal{L}_c(E)$, $|||f|||$ est le rapport de Lipschitz de f (c'est-à-dire la plus petite constante K telle que f est K-lipschitzienne).

b) Montrer que $||| \ |||$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{L}_c(E)$, c'est-à-dire que c'est une norme vérifiant la propriété supplémentaire : $\forall f, g \in \mathcal{L}_c(E), \ |||f \circ g||| \leq |||f||| \, |||g|||$.

c) On donne $f, g \in \mathcal{L}_c(E)$. Montrer que $f \circ g - g \circ f \neq \mathrm{Id}_E$ (on supposera $f \circ g - g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et on calculera $f \circ g^n - g^n \circ f$ pour $n \in \mathbb{N}$).

46) Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et A un compact infini de $\mathbb{R}$. On pose, pour $P \in E$: $\|P\|_A = \sup_{x \in A} |P(x)|$.

a) Montrer que l'application $\| \ \|_A$ est-elle une norme sur E.

b) Montrer que pour $b \in \mathbb{R}$, la forme linéaire $\varphi_b : \ P \longmapsto P(b)$ est continue de $(E, \| \ \|_A)$ dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $b \in A$.

c) Si B est un autre compact infini de $\mathbb{R}$, à quelle condition les normes $\| \ \|_A$ et $\| \ \|_B$ sont-elles équivalentes ?

Exercices Mines-Centrale: compacité

47) Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des suites bornées de réels ou de complexes, muni de la norme uniforme. L'ensemble $\mathcal{A}$ des suites nulles à partir d'un certain rang est-il un compact de $\mathcal{B}$?

48) Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, K un compact non vide de E et F un fermé non vide de E. Montrer qu'il existe $(a,b) \in K \times F$ tel que $d(K,F) = d(a,b)$. Montrer que la propriété ne subsiste pas si l'on suppose uniquement K fermé non vide, ou bien si E est de dimension infinie.

49) Soit (K_n) une suite décroissante de compacts non vides d'un espace vectoriel normé E.

a) Montrer que $K = \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} K_n$ est un compact non vide.

b) Montrer que tout ouvert O contenant K contient au moins un des K_n.

c) Montrer que le diamètre de K_n tend vers celui de K quand n tend vers l'infini.

50) Soit E un espace vectoriel normé, K un compact non vide de E et $f : K \to K$ telle que :

$$\forall x, y \in K, \quad \mathrm{d}\left(f(x), f(y)\right) \geq \mathrm{d}(x,y)$$

Pour a, b dans K, on considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = a,\ b_0 = b,\ a_{n+1} = f(a_n)$ et $b_{n+1} = f(b_n)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{d}(a, a_n) < \varepsilon$ et $\mathrm{d}(b, b_n) < \varepsilon$.

En déduire que f est une isométrie de K sur lui-même.

51) Soit E un espace vectoriel normé, K un compact non vide de E et $f\ : K \to K$ telle que :

$$\forall x, y \in K, \quad x \neq y \Longrightarrow \mathrm{d}(f(x), f(y)) < \mathrm{d}(x,y)$$

a) Montrer que f admet un et un seul point fixe a.

b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par la donnée de $x_0 \in K$ et de la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que la suite $(d(x_n, a))_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite ℓ quand n tend vers l'infini et que toute valeur d'adhérence b de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $d(a,b) = \ell$. En déduire que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

52) Soit E un espace vectoriel normé et K un compact de E. Montrer que toute partie infinie et discrète de K est non fermée (on dit qu'une partie A est discrète si pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \cap A = \{a\}$).

53) Soit E un espace vectoriel normé et K un compact de E. Pour $r > 0$, soit $V_r = \{x \in E \ /\ \mathrm{d}(x,K) < r\}$. Montrer que pour tout ouvert U contenant K, il existe $r > 0$ tel que $V_r \subset U$.

54) Ensemble triadique de Cantor Pour $n \in \mathbb{N}$, nous noterons $\mathcal{S}_n = \{0,1\}^n$. L'ensemble $\mathcal{S} = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ est muni de l'ordre lexicographique.

Pour une suite $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{S}_n$, nous définissons l'intervalle $I_a = [\alpha_a, \beta_a]$ par récurrence sur n :

- $\alpha_{()} = 0$ et $\beta_{()} = 1$, où $()$ désigne la suite vide (cas où $n = 0$) ;
- pour $n \in \mathbb{N}$ et $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \S_n$, on définit :

$$\alpha_{(a_1,\ldots,a_n,0)} = \alpha_a,\ \beta_{(a_1,\ldots,a_n,0)} = \alpha_a + \frac{\beta_a - \alpha_a}{3},\ \alpha_{(a_1,\ldots,a_n,1)} = \alpha_a + 2\,\frac{\beta_a - \alpha_a}{3} \text{ et } \beta_{(a_1,\ldots,a_n,1)} = \beta_a$$

Autrement-dit, $I_{(a_1,\ldots,a_n,0)}$ et $I_{(a_1,\ldots,a_n,1)}$ sont respectivement les premier et troisième tiers de I_a.

On pose ensuite :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ K_n = \bigcup_{a\in\mathcal{S}_n} I_a.$$

a) Montrer que pour tout n et pour tout $a \in \mathcal{S}_n$, $\beta_a = \alpha_a + \frac{1}{3^n}$ et donner une expression de α_a en fonction des a_i.

b) Montrer que (K_n) est une suite décroissante de parties compactes de $[0,1]$. En déduire que $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est un compact de $[0,1]$. Quelle est la mesure de K ?

c) Montrer que $f\ :\ (a_i)_{i\geq 1} \longmapsto \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{2a_i}{3^i}$ est une bijection strictement croissante de $\mathcal{S}$ sur K. En déduire que K a la puissance du continu.

d) Montrer que K n'a pas de point isolé (on dit que K est *parfait*).

e) Soit P un fermé non vide de $\mathbb{R}$ sans point isolé. Montrer que P contient une partie homéomorphe à K (un homéomorphisme est une bijection f telle que f et f^{-1} sont continues). Quel est le cardinal de P ?

55) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que l'image réciproque par f de tout compact est un compact. Montrer que l'image directe par f d'un fermé est un fermé. Que se passe-t-il si l'on suppose seulement : $\forall y \in \mathbb{R},\ f^{-1}(\{y\})$ est compact ?

56) Soit K un compact non vide d'un espace vectoriel normé E et $\mathcal{A}$ l'anneau $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$. Montrer que pour tout a de K, $I_a = \{f \in \mathcal{A}\ /\ f(a) = 0\}$ est un idéal maximal de $\mathcal{A}$ (un idéal I d'un anneau $\mathcal{A}$ est dit maximal s'il est différent de $\mathcal{A}$ et les seuls idéaux de $\mathcal{A}$ contenant I sont I et $\mathcal{A}$). Étudier la réciproque.

On admettra la propriété : si $(O_j)_{j\in J}$ est une famille d'ouverts de E telle que $K \subset \bigcup_{j\in J} O_j$, il existe $k \in \mathbb{N}$ et $j_1, j_2, \ldots, j_k \in J$ tels que $K \subset O_{j_1} \cup O_{j_2} \cup \cdots \cup O_{j_k}$.

57) Soit K un compact non vide d'un espace vectoriel normé E et F un espace vectoriel normé quelconque. Montrer que la projection $p : K \times F \to F$ transforme tout fermé en fermé. En déduire qu'une application $f : K \to F$ est continue si et seulement si son graphe $G = \{(x, f(x)),\ x \in K\}$ est un fermé de $E \times F$.

58) Soient A et B deux parties compactes (respectivement connexes par arcs) d'un espace vectoriel normé E. Montrer que l'ensemble $C = \bigcup_{(a,b)\in A\times B} [a,b]$ est compact (respectivement connexe par arcs).

59) Soient K un compact d'une espace vectoriel normé E et $(O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'ouverts telle que $K \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$.

a) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que : $\forall x \in K,\ \exists \lambda \in \Lambda\ /\ \mathrm{B}(x,r) \cap K \subset O_\lambda$.

b) En déduire qu'il existe une partie finie Λ' de Λ telle que $K \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda'} O_\lambda$.

c) Réciproquement, montrer que cette propriété caractérise les compacts.

60) Soit K un compact non vide d'un espace vectoriel normé E et $f :\ K \to K$.

a) On suppose que f est contractante. Montrer que f possède un et un seul point fixe.

b) On suppose maintenant que K est convexe et que f est 1-lipschitzienne. Montrer que f possède un point fixe. Pour a élément fixé de K, on pourra considérer les applications $f_n :\ x \longmapsto \frac{1}{n} a + \frac{n-1}{n} f(x)$.

61) (Mines) Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension infinie.

a) Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $y \in F$ tel que $d(x,y) = d(x,F)$.

b) Soit F est un sous-espace vectoriel de dimension et $x \in E \setminus F$. On fixe $y \in F$ tel que $d(x,y) = d(x,F)$. Quelle est la distance de $\frac{x-y}{\|x-y\|}$ à F ?

c) En déduire que la boule unité fermée de E n'est pas compacte.

62) (Mines 12) Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $f \in \mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ telle que :

$$\exists\, c > 0,\ \exists\, R > 0,\ \forall\, x \in E,\ \|x\| > R \Longrightarrow |f(x)| > c\,\|x\|.$$

Montrer que f admet un minimum.

Exercices Mines-Centrale: connexité

63) Dans tout l'exercice, E est un espace vectoriel normé fixé et A une partie de E. La partie A est dite *connexe* si elle vérifie la propriété :

> si O_1 et O_2 sont deux ouverts de E tels que $O_1 \cap A$ et $O_2 \cap A$ soient disjoints et recouvrent A, alors $O_1 \cap A$ ou $O_2 \cap A$ est vide.

a) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) A est connexe ;

(2) les seules parties de A qui sont à la fois ouvertes et fermées relativement à A sont $\emptyset$ et A ;

(3) si $f :\ A \to \{0, 1\}$ est continue, f est constante.

b) Montrer que toute partie connexe par arcs est connexe. Montrer que si A est une partie ouverte, elle est connexe si et seulement si elle est connexe par arcs.

c) Montrer que l'image d'une partie connexe par une application continue est une partie connexe.

d) Montrer que si A est connexe, toute partie B telle que $A \subset B \subset \overline{A}$ est connexe. Donner un exemple de partie de $\mathbb{R}^2$ qui soit connexe sans être connexe par arcs.

e) Construire dans $\mathbb{R}^2$ d'une suite décroissante de parties connexes dont l'intersection n'est pas connexe.

f) Donner un exemple simple de parties homéomorphes A et B de $\mathbb{R}^2$ telles que $\mathbb{R}^2 \setminus A$ soit connexe sans que $\mathbb{R}^2 \setminus B$ le soit.

64) Soit E un espace vectoriel normé, A une partie de E et Γ une partie connexe de E. Montrer que si Γ rencontre à la fois l'intérieur et l'extérieur de A, elle rencontre la frontière de A.

65) Soient E un espace vectoriel normé et A une partie de E. Montrer que la relation :

$$x\ \mathcal{R}\ y \Longleftrightarrow \exists\, \gamma :\ [0, 1] \longrightarrow A \text{ continue telle que } \gamma(0) = x \text{ et } \gamma(1) = y$$

est une relation d'équivalence sur A. Montrer que ses classes d'équivalence sont les parties connexes par arcs maximales de A : on les appelle les *composantes connexes par arcs* de A.

66) Montrer que l'ensemble des composantes connexes d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est au plus dénombrable. En déduire la forme des ouverts de $\mathbb{R}$.

67) Soient A et B deux parties connexes d'un espace vectoriel normé telles que $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$. Montrer que $A \cup B$ est connexe.

68) En utilisant un argument de connexité par arcs, montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ si $n \geq 2$.

69) Soit $X = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n),\ \mathrm{Ker}\,(f) \not\subset \mathrm{Im}\,(f)\}$. Montrer que X est connexe par arcs. Quelle est son adhérence ?

70) Soit A une partie convexe d'un e.v.n. E et B telle que $A \subset B \subset \overline{A}$. Montrer que B est connexe par arcs.

71) Soient $n \geq 2$ et $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f^{-1}(\{a\})$ est borné pour tout $a \in \mathbb{R}$. Montrer que f admet un extremum global.

72) Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel normé réel E et $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

a) Montrer que H est fermé si et seulement φ est continue.

b) Montrer que $E \setminus H$ est connexe par arcs si et seulement si φ n'est pas continue.

73) (Centrale 22) Soit $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $a \in \mathbb{R}$.

a) On suppose que $f^{-1}(\{a\})$ est un singleton $\{b\}$. Montrer que a est un extremum global de f.

b) On suppose que $f^{-1}(\{a\})$ est un compact non vide. Montrer que f admet un extremum global.

c) On suppose que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{y\})$ est un compact de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $f(x)$ admet une limite lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$.

Exercices X-ENS

74) (PLC) Soit P un polynôme complexe de degré supérieur ou égal à 2. On note (P_n) la suite de polynômes définie par :

$$P_0 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = P \circ P_n.$$

On note K l'ensemble des z tels que la suite $(P_n(z))_{n \geq 0}$ est bornée.

a) Montrer qu'il existe $R \geq 0$ tel que $|P(z)| \geq 2|z|$ pour tout z tel que $|z| > R$.

b) Montrer que $z \in K$ si et seulement si $|P_n(z)| \leq R$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Montrer que K est un compact non vide.

d) Montrer que $\mathbb{C} \setminus K$ est connexe par arcs.

75) Le cube de Hilbert

a) Pour $k \in \mathbb{N}$, on fixe $x_k : n \in \mathbb{N} \mapsto x_k(n) \in \mathbb{R}$. Montrer que si chaque suite x_k est bornée, il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout k, la suite $\Big(x_k\left(\varphi(n)\right)\Big)_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente.

b) Soit $E = \{(x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \ / \ \sum\limits_{n \geq 0} |x_n|^2 \text{ converge}\}$ muni de la norme : $||x||_2 = \sqrt{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2}$. Soit (λ_n) une suite de réels positifs.

On pose $C = \{x \in E \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ |x_n| \leq \lambda_n\}$. Montrer que C est compact si et seulement si $\sum\limits_{n \geq 0} \lambda_n^2$ converge.

76) Soit K un compact non vide d'un espace vectoriel normé. On considère l'algèbre $A = \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$, munie de la norme de la convergence uniforme. Pour $f \in A$, on note Z_f l'ensemble des zéros de f.

On considère un idéal fermé $\mathcal{I}$ de A et on note Z l'intersection des Z_g pour g décrivant $\mathcal{I}$. Démontrer la propriété :

$$\forall f \in A,\ Z \subset Z_f \iff f \in \mathcal{I}.$$

77) (P,L,C) Montrer qu'une partie G de $GL_n(\mathbb{C})$ non vide, compacte et stable par produit est un sous-groupe.

78) (X) Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}$ et $f: K \longrightarrow K$ continue. On suppose que $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite de K vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n. Montrer que si cette suite possède exactement deux valeurs d'adhérence a et b, alors $f(a) = b$ et $f(b) = a$. Montrer ensuite que a et b sont les limites des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

Indication : on commencera par démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\|u_n - a\| < \varepsilon$ ou $\|u_n - b\| < \varepsilon$.

79) (ENS 2017) Une partie A d'un espace vectoriel normé E est dite *discrète* si tous ses points sont *isolés*, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \cap A = \{x\}.$$

a) Donner un exemple de partie infinie bornée et discrète de $\mathbb{R}$.

b) Montrer qu'une partie discrète d'un espace vectoriel normé de dimension finie est au plus dénombrable.

c) Montrer que ce résultat ne subsiste pas quand E est de dimension infinie (on pourra travailler dans $E = \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\ \|_\infty$).

80) Soient $n \geq 2$ et f continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On note $Z = \{x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = 0\}$.

a) On suppose que f est surjective. Montrer que Z n'est pas compact.

b) On suppose que f est convexe, que Z est un compact non vide et on fixe $x_0 \in Z$. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que $f(x) > 0$ pour $\|x - x_0\| \geq R$. Montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers l'infini.

81) Soit E un espace vectoriel normé réel de dimension finie et K un compact de E. On admet le théorème de Riesz : la boule unité fermée de E n'est pas compacte.

a) Montrer que pour tout $a \in E$ et $r > 0$, la sphère de centre a et de rayon r n'est pas compacte.

b) Soit $a \in E \setminus K$. Montrer qu'il existe un vecteur unitaire u tel que la demi-droite $a + \mathbb{R}^+ u$ ne rencontre pas K.

c) Montrer que $E \setminus K$ est connexe par arcs.

82) (X 19) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que la classe de similitude de M, i.e. $\mathcal{C}_M = \{P^{-1}MP,\ P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\}$, est connexe par arcs si et seulement si M est diagonalisable.

83) (X 2019) Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}_d[X]$ de sa topologie usuelle et on travaille dans l'ensemble U_d des polynômes de degré d normalisés. Que sont l'intérieur et l'adhérence (relativement à U_d) de l'ensemble S_d des polynômes de degré d normalisés scindés à racines simples ?

84) On note E l'espace vectoriel des fonctions continues à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, muni de la norme $||\ ||_\infty$ et on fixe $f \in E$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $f_a: x \longmapsto f(a+x)$ et $\mathcal{T}$ l'espace vectoriel engendré par les fonctions f_a quand a décrit $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonction $h : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$ à support compact et en escalier. Pour $h \in \mathcal{H}$, on définit :

$$f * h:\ x \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-t)h(t)\,\mathrm{d}t$$

et on note $\mathcal{C} = \{f * h,\ h \in \mathcal{H}\}$.

Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de E que que $\overline{\mathcal{C}} = \overline{\mathcal{T}}$.

85) Soient E un espace vectoriel normé réel de dimension finie n, X une partie de E et C l'enveloppe convexe de X. Nous noterons, pour $m \in \mathbb{N}^*$:

$$C_m = \{x \in E,\ \exists (x_i) 1 \leq i \leq m \in X^m,\ \exists (\alpha_i)_{1\leq i\leq m} \in (\mathbb{R}^+)^m\ /\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \text{ et } x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\}.$$

a) Montrer que pour tout $m \geq n+1$, $C_{m+1} = C_m$. Pour $x = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i x_i \in C_{m+1}$, avec $\alpha_i > 0$ pour tout i, on utilisera que la famille $(x_1 - x_{m+1}, \dots, x_m - x_{m+1})$ est liée.

b) Démontrer que si X est compact, C est compact.

c) Montrer que cette propriété n'est plus vraie si E est de dimension infinie. On pourra démontrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E qui converge vers un élément x, la partie $K = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est un compact.

Espaces vectoriels normés : corrigés

Exercices CCP

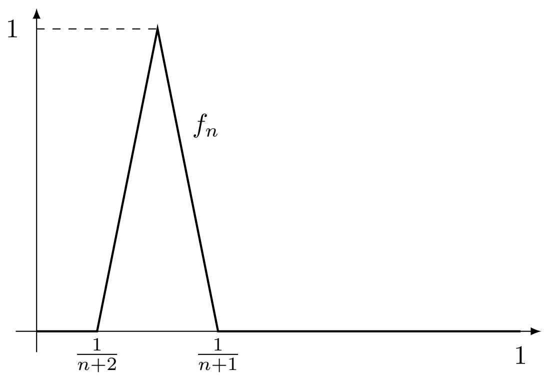
1) Les applications sont trivialement des normes (i.e. que l'on a $\|P\| \geq 0$, $\|\lambda P\| = |\lambda| \, \|P\|$, $\|P+Q\| \leq \|P\| + \|Q\|$ et $\|P\| = 0 \Longrightarrow P = 0$ pour tous $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a $\|P\|_3 \leq \|P\|_1 \leq \|P\|_2$ pour tout $P \in E$ donc $\| \; \|_2$ est plus fine que $\| \; \|_1$, qui est elle-même plus fine que $\| \; \|_3$.

En considérant la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$, on montre que $\| \; \|_1$ et $\| \; \|_2$ ne sont pas équivalentes, puisque $\|X^n\|_1 = 1$ et que $\|X_n\|_2 = 2^n$ tend vers $+\infty$.

De même, $\| \; \|_3$ et $\| \; \|_1$ ne sont pas équivalente, car $\|(1-X)^n\|_3 = 1$ et $\|(1-X)^n\|_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

2) On choisit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $|| \; ||_\infty$ et on va construire une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments unitaires tels que $d(f_n, f_m) \geq 1$ pour tous $n \neq m$. Il suffit pour cela que, pour $n \neq m$, f_n et f_m diffère de 1 en au moins un point. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit f_n la fonction affine par morceaux dont le graphe est :



On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; ||f_n||_\infty = 1 \text{ et } \forall n, m \in \mathbb{N}, \; d(f_n, f_m) = 1 \text{ si } n \neq m.$$

La suite (f_n) est donc bornée mais ne possède pas de valeur d'adhérence (sinon, il existerait une extractrice φ telles que $(f_{\varphi(n)})$ converge ; on aurait alors $1 = ||f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, qui serait absurde).

3) Pour $(x,y)(x',y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

- $N((x,y)+(x',y')) = \displaystyle\int_0^1 |x + x' + t(y+y')| \, \mathrm{d}t \leq \int_0^1 (|x+ty| + |x'+ty'|) \, \mathrm{d}t = N(x,y) + N(x',y')$;
- $N(\lambda(x,y)) = \displaystyle\int_0^1 |\lambda x + t\lambda y| \, \mathrm{d}t = \int_0^1 |\lambda| \, |x+ty| \, \mathrm{d}t = |\lambda| \, N(x,y)$;
- si $N(x,y) = 0$, la fonction $\varphi : \; t \longmapsto |x+ty|$ est nulle sur $[0,1]$, car elle est continue, positive et d'intégrale nulle. On en déduit que $x = \varphi(0) = 0$, puis $y = \varphi(1) = 0$;

donc N est une norme.

Notons S la sphère unité pour N. S étant symétrique par rapport à l'origine, nous allons étudier l'intersection de S avec le demi-plan d'équation $y \geq 0$. Fixons donc $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Pour calculer $N(x,y)$, on différencie quatre cas :

- si $y = 0$, $N(x,y) = |x|$, ce qui donne deux points de S : $A(1,0)$ et $D(-1,0)$;

- si $y > 0$ et $x \geq 0$, $x + ty \geq 0$ sur $[0, 1]$ et

$$N(x, y) = \int_0^1 (x + ty)\mathrm{d}t = x + \frac{y}{2}$$

Sur la partie $\mathcal{D}_1 = (x \geq 0, y > 0)$, S coïncide avec la droite d'équation $y = 2(1 - x)$, ce qui complète le segment $[A, B]$;

- si $y > 0$, $x < 0$ et $-x < y$, $x + ty$ change de signe en $-x/y \in]0, 1[$ et

$$N(x, y) = -\int_0^{-x/y} (x + ty)\mathrm{d}t + \int_{-x/y}^1 (x + ty)\mathrm{d}t = \frac{2xy + 2x^2 + y^2}{2y}$$

Sur la partie $\mathcal{D}_2 = (0 < -x < y)$, S coïncide avec la conique d'équation $2x^2 + 2xy + y^2 - 2y = 0$. Cette conique est une ellipse de centre $(-1, 2)$ car

$$2x^2 + 2xy + y^2 - 2y = 0 \Longleftrightarrow (x + y - 1)^2 + (x + 1)^2 = 2.$$

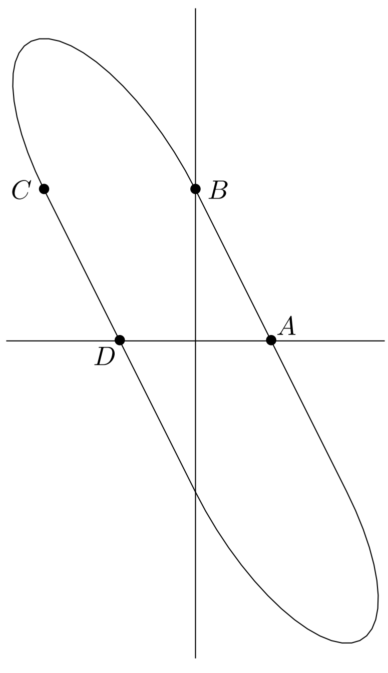
On obtient donc la portion d'ellipse (B, C) ;

- si $y > 0$, $x < 0$ et $-x \geq y$, $x + ty$ est négatif sur $[0, 1]$ et

$$N(x, y) = \int_0^1 (-x - ty)\mathrm{d}t = -x - \frac{y}{2}$$

Sur la partie $\mathcal{D}_3 = (-x \geq y > 0)$, S coïncide avec la droite d'équation $y = -2(1 + x)$, ce qui donne le segment $[C, D]$

On obtient donc, en complétant par symétrie :



4) • Remarquons pour commencer qu'une suite $\big((x_n, y_n)\big)_{n\geq 0}$ d'éléments de $E \times F$ converge vers $(x, y) \in E \times F$ si et seulement si $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ convergent respectivement vers x et y. On en déduit la première égalité :

$$\begin{aligned}
(x, y) \in \overline{A \times B} &\iff \exists\big((x_n, y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \in (A \times B)^{\mathbb{N}},\ (x_n, y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (x, y) \\
&\iff \exists(x_n)_{n\geq 0} \in A^{\mathbb{N}},\ x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \text{ et } \exists(y_n)_{n\geq 0} \in B^{\mathbb{N}},\ y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y \\
&\iff (x, y) \in \overline{A} \times \overline{B}
\end{aligned}$$

• D'autre part, pour $(x,y) \in E \times F$ et $r > 0$, $B((x,y),r) = B(x,r) \times B(y,r)$; ainsi, si $(x,y) \in \mathrm{Int}(A \times B)$, il existe $r > 0$ tel que $B((x,y),r) \subset A \times B$, d'où $B(x,r) \subset A$ et $B(y,r) \subset B$: (x,y) est donc élément de $\mathrm{Int}(A) \times \mathrm{Int}(B)$. Réciproquement, si $(x,y) \in \mathrm{Int}(A) \times \mathrm{Int}(B)$, il existe $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ tels que $B(x,r_1) \subset A$ et $B(y,r_2) \subset B$: on a donc $r = \min(r_1,r_2) > 0$ et $B((x,y),r) \subset A \times B$, donc $(x,y) \in \mathrm{Int}(A \times B)$.

• Enfin, pour $(x,y) \in E \times F$:

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \mathrm{Fr}(A \times B) &\iff (x,y) \in \overline{A \times B} \text{ et } (x,y) \notin \mathrm{Int}(A \times B) \\
&\iff x \in \overline{A},\ y \in \overline{B} \text{ et } (x,y) \notin \mathrm{Int}(A) \times \mathrm{Int}(B) \\
&\iff \big(x \in \overline{A},\ y \in \overline{B} \text{ et } x \notin \mathrm{Int}(A)\big) \text{ ou } \big(x \in \overline{A},\ y \in \overline{B} \text{ et } y \notin \mathrm{Int}(B)\big) \\
&\iff \big(x \in \mathrm{Fr}(A) \text{ et } y \in \overline{B}\big) \text{ ou } \big(x \in \overline{A} \text{ et } y \in \mathrm{Fr}(B)\big)
\end{aligned}$$

donc $\mathrm{Fr}(A \times B) = \big(\mathrm{Fr}(A) \times \overline{B}\big) \cup \big(\overline{A} \times \mathrm{Fr}(B)\big)$.

5) Si $A = \mathrm{Fr}(A)$, A est fermé (la frontière d'une partie est toujours fermée) et $A = \mathrm{Adh}(A) \setminus \mathrm{Int}(A) = A \setminus \mathrm{Int}(A)$. Comme $\mathrm{Int}(A) \subset A$, $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$: A est un fermé d'intérieur vide.

Si A est un fermé d'intérieur vide, $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Adh}(A) \setminus \mathrm{Int}(A) = A \setminus \emptyset = A$.

Soit B une partie de E. La partie $A = \mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(B))$ est fermée : il reste à montrer qu'elle est d'intérieur vide pour avoir le résultat demandé. On a alors :

$$A = \overline{\mathrm{Fr}(B)} \setminus \mathrm{Int}(\mathrm{Fr}(B)) = \mathrm{Fr}(B) \setminus \mathrm{Int}(\mathrm{Fr}(B)) \subset \mathrm{Fr}(B)$$

donc

$$\mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Fr}(B)).$$

Comme $\mathrm{Int}(\mathrm{Fr}(B)) \cap A = \emptyset$, ceci prouve que $\mathrm{Int}(A)$ ne rencontre pas non plus A, tout en étant contenue dans A : ainsi, $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$.

6) Comme $M_k(M_k)^{-1} = I_n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $MN = I_n$ par passage à la limite (le produit matriciel est continu). On en déduit que M est inversible et que $M^{-1} = N$.

7) On a $A^{2k} = (A^k)^2$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc $B = B^2$ en faisant tendre k vers l'infini (le produit matriciel est continu). B est donc la matrice d'une projection.

8) La convergence dans $\mathcal{M}_n(K)$ pour une norme quelconque (elles sont toutes équivalentes) est la convergence coefficients par coefficients. Si (A_k) converge vers A, on a $A_k[i,j] \xrightarrow[k\to+\infty]{} A[i,j]$ pour tout (i,j). On en déduit que pour tout $X \in \mathbb{K}^n$:

$$\forall i \in \{1,\dots,n\},\ (A_kX)[i] = \sum_{j=1}^{n} A_k[i,j]X[j] \xrightarrow[k\to+\infty]{} \sum_{j=1}^{n} A[i,j]X[j] = (AX)[i]$$

donc $A_kX \xrightarrow[k\to+\infty]{} AX$.

Réciproquement, si $A_kX \xrightarrow[k\to+\infty]{} AX$ pour tout $X \in \mathbb{K}^n$, on applique ceci à la base canonique $(e_1,\dots,e_n)$ de K^n :

$$\forall i,j \in \{1,\dots,n\},\ A_k[i,j] = (A_ke_j)[i] \xrightarrow[k\to+\infty]{} (Ae_j)[i] = A[i,j]$$

donc $A_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} A$.

9) a) Comme $\|u^k\| \leq \|u\|^k$, avec $\|u\| < 1$, la série $\sum_{k\geq 0} u^k$ est absolument convergente, donc convergente (car E est de dimension finie).

On en déduit que $u^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, puis que

$$(e-u)\sum_{k=0}^{K} u^k = e - u^{K+1} \xrightarrow[K\to+\infty]{} e.$$

Le produit interne de E étant continu (c'est une conséquence élémentaire de la propriété $\|u.v\| \leq \|u\|.\|v\|$), on obtient :

$$(e-u)\sum_{k=0}^{+\infty} u^k = e.$$

De la même façon, on obtient $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u^k\right)(e-u) = e$, ce qui prouve que $e-u$ est inversible et que son inverse est $\sum_{k=0}^{+\infty} u^k$.

b) On a encore convergence absolue, donc convergence de la série :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \left\|\frac{u^k}{k!}\right\| \leq \frac{\|u\|^k}{k!} = \alpha_k$$

et α_k est le terme général d'une série convergente.

10) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M \times M^k = M^{k+1}$, ce qui donne $MP = P$ en faisant tendre k vers l'infini, soit $M = I_n$ car P est inversible.

Exercices Mines-Centrale: normes

11) a) Si $f \in F$, l'ensemble $\left\{\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|,\ x \neq y\right\}$ est une partie majoré et non vide de R^+, donc $N(f)$ est bien défini et appartient à $\mathbb{R}^+$. On a ensuite, pour $f, g \in F$ et $\alpha \in \mathbb{R}$:

- $\forall x \neq y,\ \left|\frac{(f+g)(x)-(f+g)(y)}{x-y}\right| \leq \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| + \left|\frac{g(x)-g(y)}{x-y}\right|$, d'où $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$ en passant à la borne supérieure ;
- $\forall x \neq y,\ \left|\frac{(\alpha f)(x)-(\alpha f)(y)}{x-y}\right| = |\alpha| \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|$, d'où $N(\alpha f) = |\alpha|\, N(f)$;
- si $N(f) = 0$, f est 0-lipschitzienne, donc constante. Comme $f(0) = 0$, f est nulle.

N est donc une norme sur F.

b) Pour $f \in F$, f est lipschitzienne de rapport $N(f)$ ($N(f)$ est son rapport de Lipschitz, c'est-à-dire le minimum de l'ensemble des K tels que f est K-lipschitzienne). On a donc :

$$\forall x \in [0,1],\ |f(x)| = |f(x) - f(0)| \leq N(f)|x - 0| \leq N(f)$$

donc $\|f\|_\infty \leq N(f)$: N est plus fine que $\|\ \|_\infty$. Nous allons montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes, en construisant des fonctions f telles que $\|f\|_\infty$ soit petite devant $N(f)$. On peut par exemple prendre des fonctions de classe C^1 bornées, mais dont la dérivée prend de grandes valeurs (si f est de classe C^1, sa constante de Lipschitz est $\|f'\|_\infty$). Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \longmapsto x^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons :

- $f_n \in F$ et $\|f_n\|_\infty = 1$;
- $N(f_n) = \sup_{0\leq t\leq 1} n\, t^{n-1} = n$

donc il n'existe pas de constante β telle que $N(f) \leq \beta\|f\|_\infty$ pour tout $f \in F$: les normes ne sont pas équivalentes.

12) a) Soit $f \in E$. On a, par l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall t \in [0,1],\ |f(t)| \leq |f(t) - f(0)| + |f(0)| \leq t\|f'\|_\infty + |f(0)| \leq N_2(f).$$

On en déduit :

$$\|f\|_\infty \leq N_2(f) \leq N_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq N_2(f) + \|f'\|_\infty \leq 2N_2(f).$$

On en déduit que N_1 et N_2 sont équivalentes et qu'elles ont plus fines que $\|\ \|_\infty$. En posant, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n :\ t \longmapsto t^n$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n\|_\infty = 1 \text{ et } N_1(f) = 1 + \sup_{0\leq t\leq 1} |nt^{n-1}| = 1 + n$$

donc N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes à $\|\ \|_\infty$.

b) On peut commencer par remarquer que si $x \in E$, x est bornée (car x_n est le terme général d'une série absolument convergente) et $\sum_{n\geq 0} x_n^2$ est convergente car $x_n^2 = O(|x_n|)$: il est donc possible de définir les trois normes sur l'espace E.

On a ensuite, pour tout $x \in E$:

- $\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n| \leq \|x\|_2$, donc $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$;
- $\|x\|_1^2 = \displaystyle\sum_{i,j\in\mathbb{N}} |x_i|\,|x_j| \geq \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i^2 = \|x\|_2^2$, d'où $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$.

$\|\ \|_1$ est donc plus fine que $\|\ \|_2$, qui est elle-même plus fine que $\|\ \|_\infty$.

En considérant, pour $N \in \mathbb{N}$, la suite $x^N = (\underbrace{1,1,\ldots,1}_{N\ termes},0,0,\ldots)$, on a : $\|x^N\|_\infty = 1$, $\|x^N\|_1 = N$ et $\|x^N\|_2 = \sqrt{N}$. Il n'existe donc pas de constante β telle que $\|\ \|_1 \leq \beta\|\ \|_\infty$, ni telle que $\|\ \|_2 \leq \beta\|\ \|_\infty$.

Nous avons donc démontré que $\|\ \|_1$ est strictement plus fine que $\|\ \|_2$, qui est elle-même strictement plus fines $\|\ \|_\infty$.

13) a) On a facilement $N_g(f_1+f_2) \leq N_g(f_1)+N_g(f_2)$ et $N_g(\lambda f) = |\lambda|\,N_g(f_1)$ pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f_1, f_2 \in E$. On a ensuite, en notant

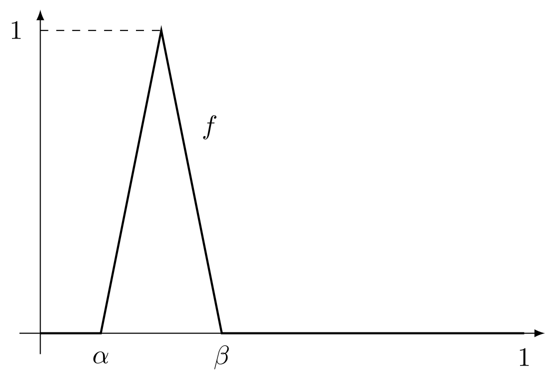
$$S_g = \overline{\{x \in [0,1],\ g(x) \neq 0\}}$$

(S_g est le *support* de g), on a :

$$\forall f \in E,\ N_g(f) = 0 \Longleftrightarrow (\forall x \in [0,1] \text{ t.q. } g(x) \neq 0,\ f(x) = 0) \Longleftrightarrow f = 0 \text{ sur } S_g$$

par continuité de f (si f est nulle sur une partie A, elle est nulle sur son adhérence). On en déduit que N_g est une norme si et seulement si $S_g = [0,1]$. En effet :

- le sens $\Longrightarrow$ est évident ;
- si $S_g \neq [0,1]$, il existe un intervalle α et β tels que $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ tel que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in]\alpha,\beta[$ (car g est continue). En notant f la fonction représentée ci-dessous,



nous avons $N_g(f) = 0$ avec $f \neq 0$, donc N_g n'est pas une norme.

La condition $S_g = [0,1]$ peut aussi s'écrire : Z_g est d'intérieur ou vide, où $Z_g = \{x \in [0,1],\ g(x) = 0\}$.

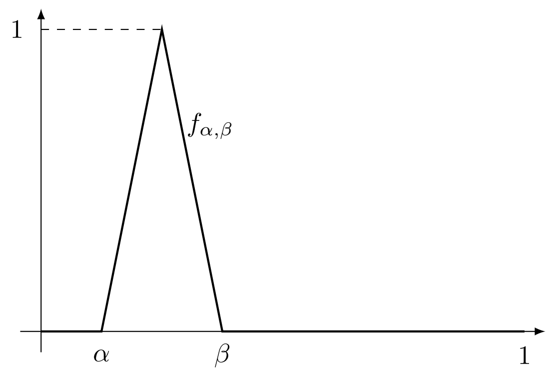
b) On a, pour $f \in E$, $N_g(f) \leq \|g\|_\infty \|f\|_\infty$ donc $\| \ \|_\infty$ est plus fine que N_g.

Si g ne s'annule pas, on note $m > 0$ le minimum sur $[0,1]$ de $|g(x)|$. On a :

$$\forall f \in E,\ N_g(f) = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)g(x)| \geq \sup_{0 \leq x \leq 1} m|f(x)| = m\,\|f\|_\infty$$

donc N_g et $\| \ \|_\infty$ sont équivalentes.

Sinon, fixons $a \in [0,1]$ tel que $g(a) = 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle $[\alpha, \beta]$ contenant a (avec $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$) tel que $|g(x)| \leq \varepsilon$ sur $[\alpha, \beta]$ (g est continue en a). On définit alors la fonction $f_{\alpha,\beta}$:



On a : $\|f_{\alpha,\beta}\|_\infty = 1$ et $N_g(f_{\alpha,\beta}) = \sup\limits_{\alpha \leq x \leq \beta} |f(x)g(x)| \leq \varepsilon$, donc les deux normes ne sont pas équivalentes.

c) Montrons que les normes sont équivalentes si et seulement s'il existe M_1 et M_2 tels que :

$$\forall x \in [0,1],\ |g_1(x)| \leq M_1\,|g_2(x)| \text{ et } |g_2(x)| \leq M_2\,|g_1(x)|.$$

Le sens réciproque est évident. Montrons le sens direct par contraposée : supposons que M_1 (par exemple) n'existe pas. Pour chaque entier $n \geq 1$, il existe donc $a \in [0,1]$ tel que $|g_1(a)| > n\,|g_2(a)|$. Comme g_1 et g_2 sont continue sur $[0,1]$, il existe un intervalle $[\alpha, \beta]$ contenant a tel que :

- $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$;
- $\forall x \in]\alpha, \beta[,\ |g_1(x)| > n\,|g_2(x)|$.

En considérant la même fonction $f_{\alpha,\beta}$ que dans le b), on a :

$$\forall x \in]\alpha, \beta[,\ |f_{\alpha,\beta}(x)g_1(x)| > n\,|f_{\alpha,\beta}(x)g_2(x)|$$

Comme $f_{\alpha,\beta}$ est nulle en dehors de $]\alpha, \beta[$, nous avons :

$$\forall x \in [0,1],\ |f_{\alpha,\beta}(x)g_1(x)| \geq n\,|f_{\alpha,\beta}(x)g_2(x)|,$$

d'où $N_{g_1}(f_{\alpha,\beta}) \geq n\,N_{g_2}(f_{\alpha,\beta})$: les normes ne sont donc pas équivalentes (plus précisément, N_{g_2} n'est pas plus fine que N_{g_1}).

14) a) Pour $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \|AB\|^2 &= \sum_{1\leq i,j\leq n} \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}\right)^2 \\ &\leq \sum_{1\leq i,j\leq n} \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n b_{i,k}^2\right) \\ &= \|A\|^2\ \|B\|^2 \end{aligned}$$

b) Cette question est très facile à traiter si l'on pense à poser $N_k = I_n - AM_k$, puisque l'on a :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ N_{k+1} = I_n - 2AM_k + AM_kAM_k = -(I_n - 1M_k)^2 = -N_k^2$$

On en déduit :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \|N_k\| \leq \|N_0\|^{2^k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \text{ car } \|N_0\| < 1.$$

AM_k converge donc vers I_n quand k tend vers l'infini : cela prouve que A est inversible (car $\det(A)\det(M_k) = \det(AM_k)$ est non nul pour k assez grand) et que M_k converge vers A^{-1} (l'application $M \longmapsto A^{-1}M$ est continue). En notant $e_k = \|M_k - A^{-1}\|$, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ e_{k+1} \leq \|A^{-1}\|\ \|N_k\| \leq \|A^{-1}\|\ \|A\|\ e_k^2$$

donc on a une convergence quadratique (et donc très rapide).

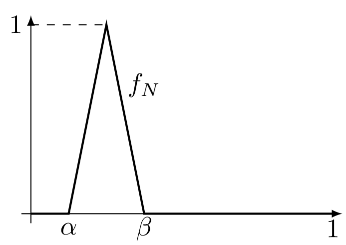
Remarque : cette construction peut être vue comme une généralisation de la méthode de Newton ; en dimension 1, considérons $a > 0$ est $f :\ x \longmapsto ax - 1$. Pour approximer la racine $1/a$ de f, la méthode de Newton conduit) fixer $m_0 > 0$ et à définir, pour tout $k \geq 0$, $m_{k+1} = m_k - \frac{f(m_k)}{f'(m_k)} = m_k - \frac{1}{a} \times (am_k - 1)$. Évidemment, dans ce cas trivial, on obtient $m_1 = \dfrac{1}{a}$ et la suite stationne, mais on ne sait pas calculer m_1 (le but est de calculer une valeur approchée de $1/a$. Il est donc naturel de modifier la définition de m_{k+1} en approximant $1/a \ldots$ par m_k. Cela donne la suite définie par :

$$\forall k \geq 0,\ m_{k+1} = m_k - (am_k - 1)m_k = 2m_k - m_kam_k.$$

15) a) On a trivialement $N_a(f+g) \leq N_a(f) + N_a(g)$ et $N_a(\lambda f) = |\lambda|\, N_a(f)$ pour tous $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Enfin, si $N_a(f) = 0$, $f(r_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc f est nulle sur $[0,1]$, puisqu'elle est continue et nulle sur la partie dense $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.

On a $N_a(f) \leq \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) ||f||_\infty$ pour tout $f \in E$, donc $||\ ||_\infty$ est plus fine que N_a.

Pour $N \in \mathbb{N}$, on choisit α, β tels que $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ et $r_i \notin]\alpha, \beta[$ pour tout i compris entre 0 et N. On définit alors la fonction f_N :



On a $N_a(f) = \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n\,|f(r_n)| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ donc (f_N) converge vers 0 pour N_a mais pas pour $\|\ \|_\infty$: les normes ne sont pas équivalentes.

b) Supposons qu'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha a_n \leq b_n \leq \beta a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (comme les a_n et b_n ne s'annulent pas, cela revient à dire que $a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(a_n)$ au voisinage de l'infini). On a alors $\alpha\, N_a \leq N_b \leq \beta N_a$ et les normes sont équivalentes.

Supposons maintenant qu'un tel α n'existe pas (le cas où β n'existe pas est symétrique). Pour $\varepsilon > 0$, il existe donc un entier k tel que $\varepsilon\, a_k > b_k$. Comme il existe en fait une infinité de tels k, on peut supposer que $r_k \notin \{0, 1\}$, ce qui évitera des cas particuliers. Il existe également $N > k$ tel que :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} b_n < \varepsilon\, a_k.$$

On définit alors la fonction f_N comme précédemment, avec les conditions :

- $r_k = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ (pour avoir $f_N(r_k) = 1$) ;
- $\forall i \in \{0, 1, \ldots, N\} \setminus \{k\}$, $r_i \notin]\alpha, \beta[$.

Nous avons alors $N_a(f_N) \geq a_k |f_N(a_k)| = a_k$ et :

$$N_b(f_N) = b_k |f_N(a_k)| + \sum_{n=N+1}^{+\infty} b_n\,|f_N(a_n)| \leq b_k + \sum_{n=N+1}^{+\infty} b_n < 2\varepsilon a_k \leq 2\varepsilon N_a(f_N).$$

Les deux normes ne sont donc pas équivalentes (N_b n'est pas plus fine que N_a).

Nous avons donc démontré que N_a et N_b sont équivalentes si et seulement si $a_n = \Theta(b_n)$ au voisinage de l'infini.

16) Il suffit de donner un contre-exemple ; on considère les fonctions $f_n : x \longmapsto x^n$. On montre facilement que (f_n) converge vers la fonction nulle pour $\|\ \|_1$ et pour $\|\ \|_2$, alors que (f_n) ne converge pas simplement vers 0 (puisque $f_n(1) = 1$ pour tout n).

17) On peut choisir :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \|P\|_1 = \sup_{0\leq t\leq 1} |P(t)| \text{ et } \|P\|_2 = \sup_{-1\leq t\leq 0} |P(t)|.$$

En posant $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|P_n\|_1 = n+1 \text{ et } \|P_n\|_2 = \sup_{-1\leq t\leq 0} \left|\frac{1-t^{n+1}}{1-t}\right| \leq 2$$

donc $\|\ \|_2$ n'est pas plus fine que $\|\ \|_1$. Par symétrie, $\|\ \|_1$ n'est pas non plus plus fine que $\|\ \|_2$ (considérer la suite $Q_n = P_n(-X)$, qui échange les comportements sur $[0, 1]$ et $[-1, 0]$).

18) a) On montre facilement que $\|\ \|$ est une norme. Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\|AB\| = \sup_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} \left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}\right| \leq \sup_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|\,|b_{k,j}|.$$

On peut échanger les deux sommes :

$$\|AB\| \leq \sup_{1\leq i\leq n} \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,k}|\,|b_{k,j}| = \sup_{1\leq i\leq n} \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \underbrace{\sum_{j=1}^{n} |b_{k,j}|}_{\leq \|B\|} \leq \|B\| \sup_{1\leq i\leq n} \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| = \|A\|\,\|B\|.$$

$\| \ \|_P$ est également une norme d'algèbre :

$$\|AB\|_P = \|P^{-1}ABP\| = \|(P^{-1}AP)(P^{-1}BP)\| \le \|P^{-1}AP\| \, \|P^{-1}BP\| = \|A\|_P \, \|B\|_P.$$

b) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. Comme A^k tend vers 0 quand k tend vers l'infini, $\lambda^k X = A^k X$ tend aussi vers 0, donc $|\lambda| < 1$ car X est non nul. On en déduit que $\rho(A) < 1$.

c) Comme le corps de base est $\mathbb{C}$, on peut trigonaliser A : il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $Q^{-1}AQ = (b_{i,j})_{1\le i,j\le n} = B$ avec $b_{i,j} = 0$ pour $i > j$. L'idée consiste à modifier la base de trigonalisation $(e_1, \dots, e_n)$ en multipliant les e_i par des scalaires non nuls. On utilise donc une matrice diagonale inversible $R = Diag(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et on pose $P = QR$. On a :

$$P^{-1}AP = \left(b_{i,j}\frac{\alpha_j}{\alpha_i}\right)_{1\le i,j\le n}.$$

Le but est de diminuer suffisamment les coefficients qui sont au dessus de la diagonale pour rendre $\|A\|_P$ strictement inférieure à 1. Il faut pour cela que $\dfrac{\alpha_j}{\alpha_i}$ soit petit quand $j > i$. On va utiliser un paramètre $t > 0$ que l'on fera tendre vers 0, les α_i dépendant de t de sorte que l'on ait α_j négligeable devant α_i quand t tend vers 0 dès que $j > i$. On peut donc poser : $\alpha_i = t^{i-1}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et on obtient :

$$P^{-1}AP = \left(b_{i,j}t^{j-i}\right)_{1\le i,j\le n}.$$

On a alors, pour tout $t \in]0,1]$:

$$\|A\| = \sup_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}| \, t^{j-i} = \sup_{1\le i\le n} \left(|b_{i,i}| + \sum_{j=i+1}^{n} |b_{i,j}| \, \underbrace{t^{j-i}}_{\le t} \right) \le \sup_{1\le i\le n} \left(|b_{i,i}| + t \sum_{j=i+1}^{n} |b_{i,j}| \right).$$

Comme $|b_{i,i}| < 1$ pour tout i, on peut choisir $t \in]0,1]$ tel que :

$$\forall i, \ |b_{i,i}| + t \sum_{j=i+1}^{n} |b_{i,j}| < 1,$$

ce qui assurera que $\|A\|_P < 1$.

On en déduit que $\|A^k\|_P \le (\|A\|_P)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, donc A^k tend vers 0 quand k tend vers l'infini (on a équivalence des normes).

19) a) Supposons que $(x_n)_{n\ge 0}$ converge vers x. Pour $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ n \ge n_0 \Longrightarrow \|x_p - x\| \le \varepsilon.$$

On en déduit :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \ (p \ge n_0 \text{ et } q \ge n_0) \Longrightarrow \|x_p - x_q\| \le \|x_p - x\| + \|x - x_q\| \le 2\varepsilon$$

ce qui prouve que $(x_n)_{n\ge 0}$ est de Cauchy.

b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Il existe n_0 tel que :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \ (p \ge n_0 \text{ et } q \ge n_0) \Longrightarrow \|x_p - x_q\| \le 1.$$

On en déduit :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \ p \ge n_0 \Longrightarrow \|x_p\| \le \|x_p - x_{n_0}\| + \|x_{n_0}\| \le 1 + \|x_{n_0}\|.$$

Ceci traduit que $(x_n)_{n\ge 0}$ est bornée à partir du rang n_0, i.e. que $(x_n)_{n\ge 0}$ est bornée.

Supposons que $(x_n)_{n\ge 0}$ possède une valeur d'adhérence x. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_ε tel que :

$$\forall p, q \ge n_\varepsilon, \ \|x_p - x_q\| \le \varepsilon.$$

Comme x est valeur d'adhérence de la suite, il existe un entier $q \geq n_\varepsilon$ tel que $\|x_p - x\| \leq \varepsilon$. On en déduit :

$$\forall p \geq n_\varepsilon,\ \|x_p - x\| \leq \|x_p - x_q\| + \|x_q - x\| \leq 2\varepsilon$$

ce qui traduit que x_n tend vers x quand n tend vers l'infini.

Supposons que E soit de dimension finie et soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy de E. La suite est majorée par un réel $M \geq 0$. Comme $\overline{B(0,M)}$ est compacte (c'est un fermé borné d'un espace de dimension finie), la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ possède une valeur d'adhérence x, vers laquelle elle converge. Ainsi, toute suite de Cauchy de E est convergente et E est complet.

c) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy de $(\mathcal{B}([0,1],\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$. Nous avons donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0,\ \forall p, q \in \mathbb{N},\ (p \geq n_0 \text{ et } q \geq n_0) \Longrightarrow \forall x \in [0,1],\ |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon.$$

Pour $x \in [0,1]$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ est donc une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel normé de dimension finie, cette suite est convergente : sa limite, qui dépend de x, peut être notée $f(x)$, ce qui définit une fonction $f:\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Ainsi, la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge *simplement* vers f. Il reste à montrer que f est bornée et que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f au sens de la norme $\|\ \|_\infty$.

Avec $\varepsilon = 1$, il existe n_0 tel que :

$$\forall p, q \in \mathbb{N},\ (p \geq n_0 \text{ et } q \geq n_0) \Longrightarrow \forall x \in [0,1],\ |f_p(x) - f_q(x)| \leq 1.$$

En particulier, avec $p = n_0$ et $x \in [0,1]$, nous avons :

$$\forall q \geq n_0, |f_{n_0}(x) - f_q(x)| \leq 1.$$

Nous pouvons faire tendre q vers $+\infty$ dans cette inégalité, pour obtenir $|f_{n_0}(x) - f(x)| \leq 1$, ce qui donne :

$$\forall x \in [0,1],\ |f(x)| \leq |f_{n_0}(x)| + 1 \leq \|f_{n_0}\|_\infty + 1$$

et f est bornée.

Pour $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que :

$$\forall p, q \in \mathbb{N},\ (p \geq n_0 \text{ et } q \geq n_0) \Longrightarrow \forall x \in [0,1],\ |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon.$$

Fixons alors $n \geq n_0$. Nous avons, pour tout $x \in [0,1]$:

$$\forall q \geq n_0,\ |f_n(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon.$$

En faisant tendre q vers l'infini (pour x fixé), nous obtenons donc $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $x \in [0,1]$, nous avons $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$. Nous avons donc démontré :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq n_0,\ \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$$

ce qui traduit que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f quand n tend vers l'infini : $\mathcal{B}([0,1],\mathbb{R})$ est complet pour $\|\ \|_\infty$.

d) L'idée est de construire une suite de fonction $(f_n)_{n\geq 0}$ qui va approcher (au sens de $\|\ \|_1$) une fonction f non continue. On peut par exemple définir une fonction affine par morceaux f_n, pour $n \geq 1$, par :

- $f_n(x) = -1$ sur $\left[-1, -\dfrac{1}{n}\right]$;
- $f_n(x) = nx$ sur $\left[-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right]$;
- $f_n(x) = 1$ sur $\left[\dfrac{1}{n}, 1\right]$.

Pour $q \geq p \geq 1$, nous avons :

$$\|f_q - f_p\|_1 = \int_{-1}^{1} |f_q(x) - f_p(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-1/p}^{1/p} |f_q(x) - f_p(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_{-1/p}^{1/p} 2\,\mathrm{d}x = \frac{4}{p}$$

puisque f_p et f_q sont majorée par 1. Pour $\varepsilon > 0$, on peut donc choisir n_0 tel que $\dfrac{4}{n_0} \leq \varepsilon$ et on aura :

$$\forall\, p, q \in \mathbb{N},\ (q \geq p \geq n_0) \Longrightarrow \|f_p - f_q\|_1 \leq \frac{4}{p} \leq \frac{4}{n_0} \leq \varepsilon.$$

Ceci traduit que $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy pour $\|\ \|_1$.

Supposons que $(f_p)_{p\geq 0}$ converge vers f au sens de $\|\ \|_1$. Fixons $\eta \in]0,1[$ et définissons :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ I_p = \int_\eta^1 |f_p(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Pour $p \geq \dfrac{1}{\eta}$, $f_p(t) = 1$ sur $[\eta, 1]$. On en déduit que I_p stationne à la valeur $I = \displaystyle\int_\eta^1 |1 - f(t)|\,\mathrm{d}t$. D'autre part, $0 \leq I_p \leq \|f_p - f\|_1$, donc I_p tend vers 0 quand p tend vers l'infini. Nous avons donc $I = 0$ et, la fonction intégrée étant continue et positive sur le segment non réduit à un point $[\eta, 1]$, $f = 1$ sur $[\eta, 1]$. Ceci étant vérifié pour tout $\eta > 0$, $f = 1$ sur $]0, 1]$.

On montrerait de manière symétrique que $f = -1$ sur $[-1, 0[$, ce qui est absurde puisque f est continue en 0.

e) Supposons que E est complet et soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série absolument convergente à termes dans E. En notant S_n la n-ième somme partielle de la série, nous avons :

$$\forall p, q \in \mathbb{N},\ p \leq q \Longrightarrow \|S_q - S_p\| = \left\|\sum_{k=p+1}^{q} u_k\right\| \leq \sum_{k=p+1}^{q} \|u_k\| \leq \sum_{k=p+1}^{+\infty} \|u_k\|.$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe n_ε tel que $\sum_{k=n_{\varepsilon+1}}^{+\infty} \|u_k\| \leq \varepsilon$, d'où :

$$\forall p, q \in \mathbb{N},\ n_\varepsilon \leq p \leq q \Longrightarrow \|S_q - S_p\| \leq \varepsilon$$

ce qui traduit que $(S_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy, donc convergente.

Supposons que toute série absolument convergente de E est convergente et soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy de E. On peut alors définir $\varphi :\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geq \varphi(n),\ \|x_p - x_q\| \leq \frac{1}{2^n}.$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| \leq \frac{1}{2^n}$$

ce qui prouve que la série de terme général $x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}$ est absolument convergente, donc convergente. On en déduit que la sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ est convergente : la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ possède donc une valeur d'adhérence et elle est convergente d'après le résultat de la question b et E est un espace de Banach.

Exercices Mines-Centrale: topologie

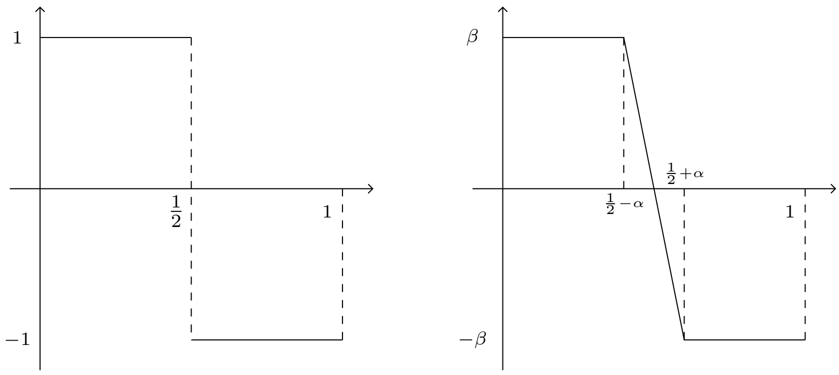
20) Si $f \in F$, on a :

$$1 = \int_0^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{1/2}^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leq \left|\int_0^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_{1/2}^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{1/2} |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_{1/2}^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \|f\|_\infty = d(0, f)$$

donc $d(0, F) \geq 1$.

On peut remarquer que l'on a $1 < \|f\|_\infty$ car, pour avoir égalité, il faudrait que $|f(t)| = \|f\|_\infty$ pour tout $t \in [0, 1]$ (c'est le cas d'égalité pour la dernière inégalité), ce qui imposerait à f d'être constante : impossible car F ne contient pas de fonction constante.

Pour montrer que $1 = d(0, F)$, il reste à trouver des éléments de F dont la norme s'approche de 1. Il suffit pour cela d'analyser les cas d'égalité : il faudrait que f soit constante sur $[0, 1/2]$, constante sur $[1/2, 1]$, avec deux constantes opposées. On pense donc à choisir des fonctions f_α qui s'approchent de cette fonction non autorisée (car non continue), comme représenté ci-dessous :



avec $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ et $\beta = \dfrac{1}{1-\alpha}$

On a $f_\alpha \in F$ pour tout α et $d(0, F) \leq d(0, f_\alpha) = \|f_\alpha\|_\infty = \beta \xrightarrow[\alpha \to 0]{} 1$, donc $d(0, F) \leq 1$. Nous avons donc $d(0, F) = 1$ et cette distance n'est pas atteinte.

La forme linéaire $\Phi :\ f \longmapsto \displaystyle\int_0^{1/2} f(t)\mathrm{d}t - \int_{1/2}^1 f(t)\mathrm{d}t$ est continue :

$$\forall f \in E,\ |\Phi(f)| \leq \|f\|_\infty$$

donc $F = \Phi^{-1}(\{1\})$ est une partie fermée de E (car $\{1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$).

21) Soient $a, b \in \overline{C}$ et $t \in [0, 1]$. Il existe deux suites $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0} \in C^{\mathbb{N}}$ qui convergent respectivement vers a et b. Comme C est convexe, chaque $c_n = (1-t)a_n + tb_n$ est élément de C et c_n converge vers $(1-t)a+tb$, donc $(1-t)a+tb \in \overline{C}$: l'adhérence de C est convexe.

Soient $a, b \in Int(C)$ et $t \in [0, 1]$. Il existe $r > 0$ telles que $B(a, r) \subset C$ et $B(b, r) \subset C$. Si $x \in B((1-t)a + tb, r)$, on peut écrire $x = (1-t)a + tb + y$ avec $||y|| < r$, puis $x = (1-t)(a+y) + t(b+y)$. Comme $a + y \in B(a, r)$ et $b + y \in B(b, r)$, on a $a + r, b + r \in C$, puis $x \in C$ car C est convexe. Nous avons donc $B((1-t)a + t - b, r) \subset C$, ce qui traduit que $(1-t)a + tb \in Int(C)$: nous avons démontré que l'intérieur de C est convexe.

22) Deux vecteurs x et y sont indépendants si et seulement si $|< x, y >| < \|x\| \times \|y\|$ (cas d'égalité pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz). On a donc :

$$\{(x, y) \in E^2, (x, y) \text{ est libre}\} = \{(x, y) \in E^2,\ \|x\| \times \|y\| - |< x, y >| > 0\}.$$

L'application $\varphi :\ (x, y) \longmapsto \|x\| \times \|y\| - |< x, y >|$ est continue (comme composée d'application continue, puisque l'application $(x, y) \longmapsto < x, y >$ est continue sur E^2), donc l'ensemble considéré est ouvert, comme image réciproque par φ de l'ouvert $]0, +\infty[$ de $\mathbb{R}$.

23) a) Les deux premières applications sont bilinéaires donc continues (les espaces sont de dimensions finies) ; l'application transposition est linéaire donc continue. Le déterminant d'une matrice est un polynôme en les coefficients de la matrice : l'application déterminant est donc continue. Enfin, la relation $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)} (\mathrm{Com}(M))^\top$ montre que les coefficients de M^{-1} sont des fractions rationnelles en les coefficients de M : l'application $M \longmapsto M^{-1}$ est donc continue.

b) $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert comme image réciproque de l'ouvert $\mathbb{K}^*$ de $\mathbb{K}$ par l'application continue $M \longmapsto \det(M)$.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $M_k = M - \frac{1}{k}I_n \xrightarrow[k \to +\infty]{} M$ et M_k est inversible à partir d'un certain rang (car M n'a qu'un nombre fini de valeur propre, donc $1/k \notin Sp(M)$ pour k assez grand) : $GL_n(\mathbb{K})$ est donc dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

c) Soit $r = \text{rg}(M)$. Il existe donc une matrice carrée inversible de taille r extraite de M. Notons $i_1, i_2, \dots, i_r$ et $j_1, j_2, \dots, j_r$ les indices de lignes et colonnes correspondant à cette extraction. L'application :

$$\varphi : \ (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \longmapsto \begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \dots & a_{i_1,j_r} \\ a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \dots & a_{i_2,j_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_r,j_1} & a_{i_r,j_2} & \dots & a_{i_r,j_r} \end{vmatrix}$$

est continue et $\varphi(M) \neq 0$. L'ensemble $\mathcal{V} = \varphi^{-1}(\mathbb{K}^*)$ est donc un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contenant M : c'est un voisinage de M et $\text{rg}(N) \ge r$ pour tout $N \in \mathcal{V}$.

d) Munissons $\mathbb{C}^n$ d'une norme $\| \ \|$ quelconque et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme subordonnée :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \ \|M\| = \sup_{X\neq 0} \frac{\|MX\|}{\|X\|}.$$

La suite (M_k) étant bornée, il existe K telle que $\|M_k\| \le K$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, si $k \in \mathbb{N}$ et si $\lambda \in \text{Sp}(M_k)$, associé au vecteur propre X, on a :

$$|\lambda| \, \|X\| = \|M_k X\| \le \|M_k\| \, \|X\| \le K\|X\|$$

donc $|\lambda| \le K$ (car $\|X\|$ est non nul). La réunion des spectres de M_k st donc bornée par K.

e) On munit une nouvelle fois $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la norme subordonnée à une norme $\| \ \|$ de $\mathbb{K}^n$. Supposons que M^k tende vers 0 et soit λ une valeur propre complexe de M, associée au vecteur propre (complexe) X. On a $\|M^k X\| \le \|M^k\| \, \|X\|$, donc $M^k X = \lambda^k X$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini, ce qui impose $|\lambda| < 1$.

Pour montrer la réciproque, on peut utiliser la décomposition de Dunford (hors programme). Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut écrire de façon unique $M = D + N$ avec $D, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, D diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$. On a alors :

$$M^k = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} N^p D^{k-p} = \sum_{p=0}^{n-1} \binom{k}{p} N^p D^{k-p}.$$

Si les valeurs propres de M (qui sont aussi celles de D) sont de modules strictement inférieurs à 1, donc pour tout $p < n$, $\binom{k}{p} D^{k-p}$ tend vers 0 ($\binom{k}{p}$ est un polynôme en k et $\|D^{k-p}\|$ tend vers 0 à une vitesse géométrique) : on en déduit que M^k tend vers 0.

Il est possible de se passer du théorème de Dunford, en utilisant le lemme :

si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et si $\varepsilon > 0$, il existe une norme $\| \ \|$ sur $\mathbb{C}^n$ telle que $\|M\| < \rho(M) + \varepsilon$, où $\rho(M) = \max\{|\lambda|, \ \lambda \in \text{Sp}(M)\}$.

Cette méthode fait l'objet d'un autre énoncé d'exercice.

Si on souhaite simplement que M^k soit bornée, la condition $\rho(M) \le 1$ est nécessaire (même preuve qu'au début du e), mais elle n'est pas suffisante. La décomposition de Jordan peut s'énoncer sous la forme : toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice diagonale par blocs où chaque bloc est de la forme $A_i = \lambda_i I_{n_i} + N_i$, les λ_i étant les valeurs propres de M. Ainsi, M^k est est bornée si et seulement si pour tout i, A_i^k est bornée. Si $|\lambda_i| < 1$, cette propriété est bien vérifiée. Par contre, pour $|\lambda_i| = 1$, il faut en plus avoir $N_i = 0$. Démontrons ce résultat.

On remarque d'abord qu'en divisant par λ_i, on se ramène à l'étude d'une matrice de la forme $I_n + N$ avec N nilpotente. Si N est nulle, la suite $(I_n + N)^k$ est bornée. Par contre, si N est non nulle, on peut choisir X tel que $NX \neq 0$ et $N^2 X = 0$. On a alors :

$$(I_n + N)^k(X) = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} N^p X = X + kNX$$

Comme $(X + kNX)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, $I_n + N$ ne l'est pas non plus.

Nous avons donc démontré que $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $\rho(M) \leq 1$ et si pour toute valeur propre de module 1, l'espace propre associé est de dimension l'ordre de multiplicité de la valeur propre.

f) Notons $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables (dans $\mathbb{K}$), $\mathcal{U}_{\mathbb{K}}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possédant n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des matrices réelles trigonalisables (sur $\mathbb{R}$)

(i) Cas de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

• Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on peut la trigonaliser :

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{1,2} & \dots & t_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

On peut alors définir :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ M_k = P \begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{1}{k} & t_{1,2} & \dots & t_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 + \frac{2}{k} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n + \frac{n}{k} \end{pmatrix} P^{-1}$$

On a $M_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} M$ et à partir d'un certain rang, M_k est diagonalisable car elle a n valeurs propres deux à deux distinctes. En effet, pour i et j indices distincts, on en peut avoir $\lambda_i + \frac{i}{k} = \lambda_j + \frac{j}{k}$ que pour au plus une valeur de k. Toute matrice ce $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est donc limite d'une suite de matrice diagonalisable : $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

• Nous allons démontrer que l'intérieur de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ est l'ensemble $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}$.

Si $M \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{U}_{\mathbb{C}}$, elle possède une valeur propre λ d'ordre au moins 2. On peut écrire $M = P \begin{pmatrix} \lambda I_2 & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} P^{-1}$ avec Δ matrice diagonale. En posant :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ M_k = P \begin{pmatrix} \lambda & 1/k & 0 \\ 0 & \lambda & \\ & 0 & \Delta \end{pmatrix} P^{-1}$$

on a $M_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} M$ avec $M_k \notin \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ pour tout k : ceci prouve que M n'est pas à l'intérieur de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$.

Il suffit ensuite de démontrer que $U_{\mathbb{C}}$ est un ouvert : on aura $U_{\mathbb{C}} \subset \overset{\circ}{D}_{\mathbb{C}}$, et donc $U_{\mathbb{C}} = \overset{\circ}{D}_{\mathbb{C}}$. Une méthode simple consiste à utiliser le discriminant : si P est un polynôme non constant, son discriminant, noté $\Delta(P)$, est le résultant de P et de P'. On a alors :

$$U_{\mathbb{C}} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ M \text{ a n valeurs propres distinctes}\} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \Delta(\chi_M) \neq 0\}.$$

Comme l'application $M \longmapsto \Delta(\chi_M)$ est polynomiale en les coefficients de M, elle est continue et $U_{\mathbb{C}}$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Si on veut éviter de passer par le discriminant, on peut démontrer que $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}$ est ouvert par caractérisation séquentielle : soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices qui converge vers $M \in \mathcal{U}_{\mathbb{C}}$. En notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres (distinctes) de M, il existe $r > 0$ tel que les boules $B(\lambda_i, r)$ soient deux à deux disjointes. Nous allons démontrer que pour k assez grand, chaque boule $B(\lambda_i, r)$ contient une valeur propre de M_k. Par l'absurde, supposons qu'il existe i tel que $\{k \in \mathbb{N},\ B(\lambda_i, r) \cap \mathrm{Sp}(M_k) = \emptyset\}$ est infini. On peut donc construire une extractrice φ telle que pour tout k, $M_{\varphi(k)}$ n'a pas de valeur propre dans $B(\lambda_i, r)$. En notant $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ les valeurs propres de M_k, nous avons donc :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \left|\chi_{M_{\varphi(k)}}(\lambda_i)\right| = \prod_{j=1}^{n} |\lambda_i - \lambda_j^{\varphi(k)}| \geq r^n$$

ce qui est absurde car $\left|\chi_{M_{\varphi(k)}}(\lambda_i)\right| = \left|\det(\lambda_i I_n - M_{\varphi(k)})\right| \xrightarrow[k\to+\infty]{} |\det(\lambda_i I_n - M)| = 0.$

Ainsi, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour $k \geq K$, M_k possède au moins une valeur propre dans chaque boule $B(\lambda_i, r)$. Comme ces n boules sont deux à deux disjointes, M_k est élément de $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}$ pour $k \geq K$.

(ii) Cas de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

• Nous allons montrer que l'adhérence de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ est l'ensemble $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$. L'inclusion $T_{\mathbb{R}} \subset \overline{\mathcal{D}_{\mathbb{R}}}$ se montre comme dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Il faut ensuite montrer que $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ est un fermé : comme $\mathcal{D}_{\mathbb{R}} \subset T$, on aura l'inclusion inverse.

La preuve est similaire à la précédente : soit $(M_k)_{k\geq n}$ une suite de matrices réelles trigonalisables qui converge vers $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on a :

$$|\chi_{M_k}(\lambda)| = \prod_{j=1}^{n} |\lambda - \lambda_j^{\varphi(k)}| \geq |\mathrm{Im}(\lambda)|^n$$

or $|\chi_{M_k}(\lambda)|$ tend vers $\chi_M(\lambda)$ quand k tend vers l'infini, donc $|\chi_M(\lambda)| \geq |\mathrm{Im}(\lambda)|^n > 0$: M n'a pas de valeur propre complexe non réelle donc χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$ et $M \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$.

• On montre enfin que $U_{\mathbb{R}} = \overset{\circ}{D}_{\mathbb{R}}$. La même preuve qu'avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ montre que si $M \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ a une valeur propre multiple, elle n'est pas intérieure à $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$. Pour montrer que $U_{\mathbb{R}}$ est ouvert, la preuve séquentielle est pratiquement la même qu'avec $\mathbb{C}$: une fois démontré que M_k a au moins une valeur propre dans chaque boule $B(\lambda_i, r)$ pour k assez grand, on a prouvé que, pour k assez grand, M_k a n valeurs propre **réelles** simples (si une des λ_i^k est non réelle, sa valeur conjuguée est aussi valeur propre de M_k et cela donne deux valeurs propres distinctes de M_k dans la même boule $B(\lambda_i, r)$, puisque les λ_i sont réelles) : M_k est bien élément de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ pour k assez grand.

g) Définissons :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{U}_p = \{z \in \mathbb{C},\ z^p = 1\},\ \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ \exists p \geq 1,\ z^p = 1\} \text{ et } \mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}.$$

Si $M \in \mathcal{A}$, M est annulé par un polynôme scindé à racines simples dont les racines sont dans $\mathbb{U}$. M est donc diagonalisable et $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{U}$. Réciproquement, si M est diagonalisable et si $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{U}$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{U}_p$ et $M^p = I_n$ (π_M est scindé à racines simples et ses racines appartiennent à $\mathbb{U}_p$, donc π_M divise $X^p - 1$). On peut ainsi, après ce qui a été fait plus haut, deviner que l'adhérence de $\mathcal{A}$ est l'ensemble des matrices dont le spectre est contenu dans $\mathcal{C}$ (car $\overline{\mathbb{U}} = \mathcal{C}$) et que son intérieur est vide.

Commençons par l'intérieur : si $M \in \mathcal{A}$, la suite $M_k = M - \frac{1}{k} I_n$ converge vers M quand k tend vers l'infini et les valeurs propres de M_k sont les $\lambda - \frac{1}{k}$ avec $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$. Ainsi, en fixant une valeur propre λ de M, λ est de module 1 et $\lambda - \frac{1}{k}$ ne peut être de module 1 que pour au plus une valeur de k. On en déduit que pour k assez grand, M_k a une valeur propre de module différent de 1, et donc $M_k \notin \mathcal{A}$: ceci prouve que $M \notin \overset{\circ}{\mathcal{A}}$, et donc que $\mathcal{A}$ est d'intérieur vide.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathcal{C}$, on peut écrire :

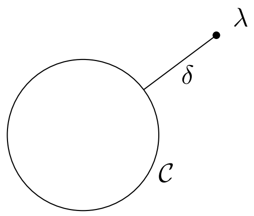
$$M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{1,2} & \dots & t_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathcal{C}$. Comme l'ensemble des racine de l'unité est dense dans le cercle unité, on peut construire des suites $(\lambda_{k,1})_{k\in\mathbb{N}}, \dots, (\lambda_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$ telles que :

- pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_{k,i} \in \mathbb{U}$;
- pour tout k, $\lambda_{k,1}, \dots, \lambda_{k,n}$ sont deux à deux distincts ;
- pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_{k,i} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \lambda_i$.

La matrice
$$M_k = P \begin{pmatrix} \lambda_{k,1} & t_{1,2} & \dots & t_{1,n} \\ 0 & \lambda_{k,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{k,n} \end{pmatrix} P^{-1}$$
est alors élément de $\mathcal{A}$ (elle est diagonalisable car elle a n valeurs propres distinctes) et converge vers M : on en déduit que $M \in \overline{\mathcal{A}}$.

Soit $M \in \overline{\mathcal{A}}$. Il existe une suite (M_k) d'élément de $\mathcal{A}$ qui converge vers M. En notant $(\lambda_{k,i})_{1\leq i\leq n}$ les valeurs propres de M_k, nous avons, pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{C}$:
$$|\chi_{M_k}(\lambda)| = \prod_{i=1}^{n} |\lambda - \lambda_{k,i}| \geq \delta^n$$
avec $\delta = d(\lambda, \mathcal{C}) > 0$.



Quand k tend vers l'infini, $\chi_{M_k}(\lambda)$ tend vers $\chi_M(\lambda)$, donc $|\chi_M(\lambda)| \geq \delta^n > 0$. Ainsi, λ n'est pas valeur propre de M et $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathcal{C}$.

24) Nous noterons $\Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice diagonale dont les λ_i sont les termes diagonaux.

a) Notons f cette application. f est bien à valeur dans $GL_n(\mathbb{R})$ et elle est continue, comme restriction du produit matriciel.

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Une analyse élémentaire montre que si $M = f(O, S)$, alors $S^2 = M^\top M$. L'existence d'un antécédent est donc assez simple : on remarque que $A = M^\top M$ est une matrice symétrique définie positive (car pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $X^\top AX = (MX)^\top (MX) = \|MX\|^2 > 0$ car M est inversible). Le théorème spectral prouve l'existence de $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = \Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$. On peut alors poser $S = P\,\Delta(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})\,P^{-1}$ et $O = MS^{-1}$. On a :

- S est symétrique (car $P^{-1} = P^\top$) et ses valeurs propres sont strictement positives : $S \in \mathcal{S}_n^{+*}(\mathbb{R})$;
- $M = OS$;
- O est orthogonale car $O^\top O = S^{-1}M^\top MS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$ (en utilisant que P est orthogonale).

Supposons que (O', S') soit un autre antécédent de M. Nous avons alors $S'^2 = A = S^2$. Il y a ici un astuce qui consiste à remarquer qu'il existe un polynôme $f \in \mathbb{R}[X]$ tel que $S = f(A)$. En effet, pour $f \in \mathbb{R}[X]$, $f(A) = f(P\Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P^{-1}) = Pf(\Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_n))P^{-1} = P\Delta(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n))P^{-1}$ donc $f(A) = S$ si et seulement si $f(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout i : un tel polynôme f existe (polynôme d'interpolation de Lagrange).

Nous pouvons ensuite dire que S' commute avec $A = S'^2$, donc avec $S = f(A)$; ainsi, S et S' commutent et sont diagonalisables : elles sont simultanément diagonalisables. Il existe donc une matrice inversible Q et des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ tels que $Q^{-1}SQ = \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $Q^{-1}S'Q = \Delta(\beta_1, \dots, \beta_n)$. Comme $S^2 = A = S'^2$, on en déduit que $\alpha_i^2 = \beta_i^2$ pour tout i, soit $\alpha_i = \beta_i$ pour tout i (les α_i et β_i sont positifs), ce qui donne $S = S'$. On a ensuite $O' = M(S')^{-1} = MS^{-1} = O$.

Nous avons ainsi montré que f était bijective et il reste à montrer que f^{-1} est continue. Travaillons séquentiellement : soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices inversibles qui converge vers M inversible. Notons $(O_k, S_k) = f^{-1}(M_k)$ et $(O, K) = f^{-1}(M)$: il faut démontrer que O_k et S_k convergent respectivement vers O et S.

La clé de la preuve consiste à utiliser la compacité de $O_n(\mathbb{R})$: la suite (O_k) converge vers O si et seulement si O est sa seule valeur d'adhérence.

Soit donc O' une valeur d'adhérence de cette suite et $\varphi :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $O_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} O'$. On a alors :

$$S_{\varphi(k)} = (O_{\varphi(k)})^\top M_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} (O')^\top M = S'.$$

La matrice S' est inversible (O' et M le sont), symétrique (les $S_{\varphi(k)}$ le sont) et positive (pour tous $X \in \mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N}$, $X^\top S_{\varphi(k)} X \geq 0$ donne $X^\top S' X \geq 0$ quand k tend vers l'infini). On en déduit que S' est symétrique définie positive et que $M = O'S'$: par injectivité de f, $O' = O$ et $S' = S$.

Ainsi, la suite (O_k) converge vers O qui est sa seule valeur d'adhérence, puis $S_k = (O_k)^\top M_k$ converge vers $O^\top M = S$: f^{-1} est continue et f est un homéomorphisme de $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{+*}(\mathbb{R})$ sur $GL_n(\mathbb{R})$.

b) Notons g la restriction de l'application exponentielle à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, ils existent $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $S = P\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1}$, ce qui prouve que

$$exp(S) = P\Delta(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})P^{-1}$$

est symétrique définie positive. L'application g est bien à valeurs dans $\mathcal{S}_n^{+*}(\mathbb{R})$ et continue, comme restriction de l'application exponentielle matricielle.

Si $T \in \mathcal{S}_n^{+*}(\mathbb{R})$, ils existent $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $T = P\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1}$. La matrice $S = P\Delta(\ln(\lambda_1), \ldots, \ln(\lambda_n))P^{-1}$ est alors symétrique et $g(S) = T$: l'application g est surjective.

Soit S' un autre antécédent de T. On a, comme dans la première question, qu'il existe $f \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f(S) = T$ (prendre un polynôme d'interpolation de Lagrange qui envoie chaque λ_i sur $\ln(\lambda_i)$. Comme T' commute avec $exp(T') = S$, T' commute également avec $T = f(S)$; on peut donc diagonaliser simultanément T et T' et on obtient une nouvelle fois que $T = T'$: g est bijective.

On prouve la continuité de g^{-1} comme dans le premier cas : soit $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{S}_n^{+*}(\mathbb{R})$ qui converge vers $T \in \mathcal{S}_n^{+*}(\mathbb{R})$; notons S_k et S les antécédents par g de T_k et T. Nous allons démontrer que la suite $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée et possède S pour unique valeur d'adhérence : elle convergera donc vers S. Munissons $\mathbb{R}^n$ de sa norme euclidienne canonique et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|M\| = \sup_{X\neq 0} \frac{\|MX\|}{\|X\|}.$$

Cette norme est une norme d'algèbre (i.e. que $\|MN\| \leq \|M\|\,\|N\|$ pour tous $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) et $\|M\| = 1$ pour $M \in O_n(\mathbb{R})$.

• La suite (T_k) est convergente, donc bornée par une constante K. On en déduit que pour tout k et pour toute valeur propre λ de T_k, $\lambda \leq K$ (si X est un vecteur propre associé, on a $\lambda\,\|X\| = \|T_k X\| \leq \|T_k\|\,\|X\| \leq K\,\|X\|$). De même, la suite (T_k^{-1}) converge vers T^{-1} donc elle est bornée par une constante K' : on en déduit que pour tout k et pour toute valeur propre λ de T_k, $\dfrac{1}{\lambda} \leq K'$. Ainsi, les valeurs propres des T_k soient contenues dans $[1/K', K]$. On en déduit que les valeurs propres des S_k sont contenues dans $[-\ln K', \ln K]$.

Pour tout k, il existe $P_k \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $T_k = P_k\Delta(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)P_k^{-1}$. Cela donne :

$$S_k = P_k\Delta(\ln(\lambda_1^k), \ldots, \ln(\lambda_n^k))P_k^{-1}$$

et

$$\|S_k\| \leq \underbrace{\|P_k\|}_{=1}\,\|\Delta(\ln(\lambda_1^k), \ldots, \ln(\lambda_n^k))\|\,\underbrace{\|P_k^{-1}\|}_{=1} = \max_{1\leq i\leq n} |\ln(\lambda_i^k)| \leq \max(|\ln\alpha|,\ |\ln\beta|)$$

ce qui prouve que (S_k) est bornée.

• Si S' est une valeur d'adhérence de (S_k), il existe une extractrice φ telle que $S_{\varphi(k)}$ converge vers S'. On a alors $T_{\varphi(k)} = g(S_{\varphi(k)}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} g(S')$, donc $g(S') = T$ et $S' = S$ par injectivité de g.

Nous avons donc démontré que la suite (S_k) était bornée et possédait S pour une unique valeur d'adhérence : elle converge donc vers S et g^{-1} est continue.

Nous avons donc démontré que $GL_n(\mathbb{R})$ était isomorphe à $O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, soit encore à $O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$. L'étude topologique de $GL_n(\mathbb{R})$ se ramène donc à celle du compact $O_n(\mathbb{R})$. Par exemple, si on sait démontrer que $O_n(\mathbb{R})$ possède deux composantes connexes par arcs, cela montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ possède aussi deux composantes connexes par arcs.

25) Notons A l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Plutôt que la caractérisation à l'aide de suites extraites, nous allons utiliser la propriété :

$$b \in A \iff \forall\varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ p \geq n \text{ et } d(x_p, b) < \varepsilon.$$

Soit $c \in \overline{A}$. Nous allons montrer que $c \in A$, ce qui prouvera que A est fermé. Fixons $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Il existe $b \in A$ tel que $d(b,c) < \varepsilon$ puis, comme $b \in A$, il existe $p \geq n$ tel que $d(x_p, b) < \varepsilon$. Nous avons donc montré, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de $p \geq n$ tel que $d(x_p, c) \leq d(x_p, b) + d(b, c) < 2\varepsilon$: c est donc élément de A.

26) Un point a d'une partie A d'un espace vectoriel normé est dit *isolé* s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \cap A = \{a\}$. Cela revient à dire que $a \in A$ et que toute suite d'élément de A qui converge vers a est stationnaire.

Notons $A = \{u \in \mathcal{L}(E),\ P(u) = 0\}$. Comme 0 est racine de P, on a bien $0 \in A$. D'autre part, 0 étant racine simple, on peut écrire $P = XQ$ avec $Q(0) = \alpha \neq 0$. Considérons une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que u_k converge vers 0. On a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u_k \circ Q(u_k) = 0.$$

Comme u_k tend vers 0, $\det(Q(u_k))$ tend vers $\det(Q(0)) = \alpha^n$ avec $n = \dim(E)$. On en déduit qu'il existe K tel que $\det(Q(u_k)) \neq 0$ pour $k \geq K$. Ainsi, $Q(u_k)$ est inversible et $u_k = 0$ pour $k \geq K$: la suite (u_k) est donc stationnaire.

La propriété est fausse dès que E est de dimension au moins 2 et 0 racine au moins double : il suffit de fixer une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E et de considérer la suite d'endomorphismes (u_k) définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ u_k(e_i) = \begin{cases} \frac{1}{k}\, e_2 & si \text{i=1} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

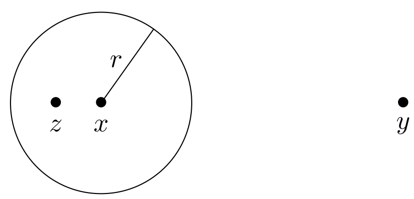
On a :

- pour tout $k \geq 1$, $u_k^2 = 0$ donc $P(u_k) = 0$;
- pour tout $k \geq 1$, $u_k \neq 0$;
- $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.

0 est donc un point non isolé de A.

27) Comme $\delta = \text{diam}(A) = \sup\{d(x,y),\ x, y \in A\}$, il existe deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de A telles que $d(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \delta$. Comme E est de dimension finie, la suite bornée $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une valeur d'adhérence (x, y) et il existe une extractrice φ telle que $x_{\varphi(n)}$ et $y_{\varphi(n)}$ convergent respectivement vers x et y. On a ainsi prouvé l'existence de $x, y \in \overline{A}$ tels que $d(x, y) = \delta$.

Si x était intérieur à A, il existerait $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$.



En particulier, on aurait $y \neq x$ et le point $z = x + \dfrac{r}{2}\dfrac{x - y}{\|x - y\|}$ serait un élément de A avec :

$$d(z, y) = \left\|(1 + \frac{r}{2\|x - y\|})(x - y)\right\| = (1 + \frac{r}{2\|x - y\|})\delta > \delta$$

ce qui est absurde. On en déduit que $x \in \text{Fr}(A)$, que $y \in \text{Fr}(A)$ (par symétrie) et que $\delta = d(x, y) \leq \text{diam}(\text{Fr}(A)) = \delta'$.

Comme $\mathrm{Fr}(A)$ est un compact, il existe $x', y' \in \mathrm{Fr}(A)$ tels que $d(x', y') = \delta'$. Comme x' et y' sont adhérents à A, il existe deux suites (x'_n) et (y'_n) d'éléments de A qui convergent respectivement vers x' et y'. Comme on a $\delta \geq d(x'_n, y'_n)$ pour tout n, on obtient $\delta \geq \delta'$ en faisant tendre n vers l'infini : une partie non vide bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie a donc même diamètre que sa frontière.

28) Supposons que nous ne sommes pas dans le second cas. Il existe alors $r > 0$ tel que $B = B(x, r) \cap A$ est fini (mais non vide car $x \in \overline{A}$). L'ensemble $\{d(x, y),\ y \in B\}$ est un ensemble fini non vide de $\mathbb{R}^+$, il admet donc un minimum ρ. Si ρ était non nul, on aurait $B(x, \rho) \cap A = \emptyset$, qui serait absurde. On a donc $\rho = 0$, i.e. $x \in A$. Si $B = \{x\}$, on pose $r' = r$. Sinon, on pose $r' = \min\{d(x, y),\ y \in B \setminus \{x\}\}$. Dans les deux cas, on a $r' > 0$ et $B(x, r') \cap A = \{x\}$.

29) a) Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si $A^n = 0$. $\mathcal{N}_n$ est donc fermé, comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue $A \longmapsto A^n$, définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même.

Soit $A \in \mathcal{N}_n$. En posant, pour $k \geq 1$, $A_k = A + \frac{1}{k} I_n$, on a $A_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} A$ et $A_k \notin \mathcal{N}_n$ pour tout $k \geq 1$ ($\frac{1}{k}$ est la seule valeur propre de A_k et une matrice nilpotente a 0 pour unique valeur propre). On en déduit que A n'est pas à l'intérieur de $\mathcal{N}_n$: $\mathcal{N}_n$ est donc d'intérieur vide.

b) Si 0 est un point adhérent à $\mathcal{C}_M$, il existe une suite de matrice (M_k) de $\mathcal{C}_M$ telle que M_k converge vers 0. On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{C},\ \chi_{M_k}(x) = \det(xI_n - M_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \det(xI_n) = x^n.$$

Comme M_k est semblable à M, on a $\chi_{M_k}(x) = \chi_M(x)$ pour tout $k \geq 1$, d'où $\forall x \in \mathbb{C},\ \chi_M(x) = x^n$. On en déduit que $\chi_M = X^n$: M est nilpotente.

Réciproquement, supposons que M est nilpotente. On peut trigonaliser M : il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}MP = T = (t_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ où $t_{i,j} = 0$ dès que $1 \leq i \leq j \leq n$. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base formée par les colonnes de P. Pour $\alpha > 0$, notons $\mathcal{B}_\alpha$ la base $(e_1, \alpha e_2, \alpha^2 e_3, \ldots, \alpha^{n-1} e_n)$ et P_α la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}_t$. On a :

$$M_\alpha = P_\alpha^{-1} M P_\alpha = Q_\alpha^{-1} T Q_\alpha$$

avec $Q_\alpha = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_\alpha} = \mathrm{diag}(1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1})$. $Q_\alpha^{-1} T Q_\alpha$ s'obtient donc en multipliant chaque colonne C_j de T pat α^{j-1} puis en divisant chaque ligne L_i par α^{i-1}. Nous avons donc :

$$P_\alpha^{-1} M P_\alpha = \left(t_{i,j}\alpha^{j-i}\right)_{1\leq i,j\leq n}.$$

On en déduit que M_α est un élément de $\mathcal{C}_M$ qui converge vers 0 quand α tend vers 0, puisque pour $t_{i,j}\alpha^{j-i} = 0$ pour $1 \leq i \leq j \leq n$ et $t_{i,j}\alpha^{j-i} \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 0$ quand $1 \leq i < j \leq n$.

Nous avons donc démontré que la matrice nulle est dans l'adhérence de $\mathcal{C}_M$ si et seulement si M est nilpotente.

30) a) Posons $u_0 = x_0$ et $u_n = x_n - x_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. On a :

$$\forall n \geq 2,\ \|u_{n+1}\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \leq K\|x_n - x_{n-1}\| = K\|u_n\|$$

et donc, par récurrence immédiate :

$$\forall n \geq 1,\ \|u_n\| \leq K^{n-1}\|u_1\|$$

Comme $K \in [0, 1[$, la série de terme général u_n est absolument convergente, donc convergente car E est de dimension finie. On en déduit que la suite (x_n) converge vers un élément $a \in E$. Comme F est fermé, $a \in F$ et l'égalité $x_{n+1} = f(x_n)$ donne, par continuité de f sur F, $f(a) = a$ par passage à la limite.

b) Comme F est non vide, on peut choisir $x_0 \in F$ et la suite définie dans le a) converge vers un point fixe a de f. L'unicité de ce point fixe est évidente, puisque si b est un autre point fixe, on a $\|b - a\| = \|f(b) - f(a)\| \leq K\|b - a\|$ et donc $a = b$ car $0 \leq K < 1$.

On peut ainsi approximer a par x_n :

$$\|a - x_n\| = \left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right\| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} K^{k-1}\|u_1\| = \frac{K^n}{1-K}\,\|f(x_0) - x_0\|$$

On peut donc choisir x_0 et calculer *a priori* n_0 tel que $\dfrac{K^{n_0}}{1-K}\,\|f(x_0)-x_0\| \leq \varepsilon$: il reste ensuite à calculer x_{n_0}.

On peut utiliser une meilleure majoration de l'erreur :

$$\|a-x_n\| = \left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right\| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} K^{k-n-1}\|u_{n+1}\| = \frac{1}{1-K}\|x_{n+1}-x_n\|$$

Une fois choisi x_0, on calcule donc les éléments x_n et on s'arrête dès que $\dfrac{1}{1-K}\|x_{n+1}-x_n\| \leq \varepsilon$: x_n est alors une approximation de a à ε près.

Dans la pratique, les choses sont un peu plus compliquées car il faut prendre également en compte les erreurs faites quand on calcule les x_n (sauf si l'on est capable de calculer de façon exactes les x_n).

31) Notons A l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Plutôt que la caractérisation à l'aide de suites extraites, nous allons utiliser la propriété :

$$b \in A \iff \forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists\, p \in \mathbb{N},\ p \geq n \text{ et } d(x_p, b) < \varepsilon.$$

Soit $c \in \overline{A}$. Nous allons montrer que $c \in A$, ce qui prouvera que A est fermé. Fixons $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Il existe $b \in A$ tel que $d(b,c) < \varepsilon$ puis, comme $b \in A$, il existe $p \geq n$ tel que $d(x_p, b) < \varepsilon$. Nous avons donc montré, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de $p \geq n$ tel que $d(x_p, c) \leq d(x_p, b) + d(b, c) < 2\varepsilon$: c est donc élément de A.

32) Soient $x, y \in A$ et $t \in [0,1]$. Pour $\varepsilon > 0$, il existe $a, b \in A$, tels que

$$d(x,a) \leq d(x,A) + \varepsilon \text{ et } d(y,b) \leq d(y,A) + \varepsilon.$$

On a alors $(1-t)a + tb \in A$ (car A est convexe), puis

$$\begin{aligned} d((1-t)x+ty, A) &\leq d((1-t)x+ty, (1-t)a+tb) = \|(1-t)(x-a)+t(y-b)\| \\ &\leq (1-t)\|x-a\| + t\|y-b\| \\ &\leq (1-t)(d(x,A)+\varepsilon) + t(d(y,A)+\varepsilon) \end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient $d((1-t)x+ty, A) \leq (1-t)d(x,A) + t\,d(y,A)$ en faisant tendre ε vers 0 : la fonction $x \longmapsto d(x,A)$ est donc convexe.

33) Soit $(M_k)_{k\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{E}_n$ qui converge vers I_n. On a $\det(M_k^2 + M_k + I_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$, donc il existe k_0 tel que $M_k^2 + M_k + I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ pour $k \geq k_0$. Comme $0 = M_k^3 - I_n = (M_k - I_n)(M_k^2 + M_k + I_n)$, on en déduit que $M_k = I_n$ pour $k \geq k_0$: I_n est un point isolé de $\mathcal{E}_n$ puisque les seules suites de $\mathcal{E}_n$ qui convergent vers I_n sont les suites stationnaires.

Exercices Mines-Centrale: applications linéaires et continuité

34) Soit $x \in \ell_1$. Pour tout $y \in c_0$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n y_n| \leq \|y\|_\infty\, |x_n|$$

donc la série de terme général $x_n y_n$ est absolument convergente. On peut donc définir l'application $\varphi(x) :\ c_0 \longrightarrow \mathbb{C}$, qui est clairement linéaire. On a ensuite :

$$\forall x \in c_0,\ |\varphi(x)(y)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n y_n| \leq \|y\|_\infty \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| = \|x\|_1\, \|y\|_\infty$$

donc $\varphi(x)$ est continue et $\|\varphi(x)\| \leq \|x\|_1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $y_n = e^{-i\theta_n}$ où θ_n est un argument de c_n (si $c_n = 0$, on choisit $y_n = 1$). Ainsi, y_n est de module 1 et vérifie $x_n y_n = |x_n|$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, considérons la suite $y^N = (y_0, y_1, \dots, y_N, 0, 0, \dots)$. On peut aussi écrire :

$$y^N = \sum_{n=0}^{N} y_n e^n$$

en notant $e^n = (\delta_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$ (tous les termes de cette suite sont nul, excepté celui d'indice n qui vaut 1). y^N est élément de c_0 et :

$$\sum_{n=0}^{N} |x_n| = |\varphi(x)(y^N)| \leq |||\varphi(x)||| \times \|y^N\|_\infty = |||\varphi(x)|||.$$

En faisant tendre N vers l'infini, on obtient $\|x\|_1 \leq |||\varphi(x)|||$: nous avons démontré que $|||\varphi(x)||| = \|x\|_1$.

Réciproquement, supposons que u est une forme linéaire continue sur c_0. On cherche $x \in \ell_1$ telle que $u = \varphi(x)$, c'est-à-dire telle que :

$$\forall y \in c_0,\ u(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n.$$

Si un tel x existe, il est unique, puisqu'on doit avoir :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = u(e^n)$$

Nous posons donc $x = (u(e^n))_{n\in\mathbb{N}}$. On a alors, pour $y \in c_0$:

$$\forall N \in \mathbb{N},\ u\left(\sum_{n=0}^{N} y_n e^n\right) = \sum_{n=0}^{N} y_n u(e^n) = \sum_{n=0}^{N} x_n y_n.$$

Quand N tend vers l'infini, $y^N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} y_n e^n$ tend vers y (au sens de $\|\ \|_1$), puisque :

$$\|y - y^N\|_1 = \|(0, 0, \dots, 0, y_{N+1}, y_{N+2}, \dots)\|_1 = \sum_{n=N+1}^{+\infty} |y_n| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

Comme u est continue, on en déduit que $u(y_N)$ converge vers $u(y)$, ce qui prouve que la série de terme général $x_n y_n$ converge et a pour somme $u(y)$. Il reste à montrer que $x \in \ell_1$ pour pouvoir dire que $u = \varphi(x)$. On reprend la définition des y_n de la partie précédente : $x_n y_n = |x_n|$ et $|y_n| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut alors écrire :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{N} |x_n| = u\left(\sum_{n=0}^{N} y_n e^n\right) \leq |||u||| \left\|\sum_{n=0}^{N} y_n e^n\right\|_\infty = |||u||| \sup_{0\leq n\leq N} |y_n| = |||u|||$$

ce qui prouve que $\sum_{n\geq 0} |x_n|$ est convergente : $x \in \ell_1$ (et on retrouve que $\|x\|_1 \leq |||u|||$). On peut donc affirmer que $u = \varphi(x)$ et φ est une bijection. Comme φ est linéaire et que $|||\varphi(x)||| = \|x\|_1$, φ est une isométrie vectorielle de $(\ell_1, \|\ \|_1)$ sur le dual topologique de c_0.

35) Si $a \in \overline{A}$, on a, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $|P(a)| \leq ||P||_{\overline{A}} = ||P||_A$, avec un cas d'égalité quand $P = 1$. On en déduit que δ_a est continue de norme égale à 1.

Supposons maintenant que $a \notin \overline{A}$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que $]a-\eta, a+\eta[\cap A = \emptyset$. ensuite, A étant borné, il existe $M \geq \eta$ tel que

$$A \subset [a - M, a - \eta] \cup [a + \eta, a + M]$$

Nous allons construire une suite (P_n) de polynômes tels que $P_n(a) = 1$ et $||P_n||_A \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui prouvera que δ_a n'est pas continue. Si nous avions $a = 0$ et $M = 1$, il suffirait de choisir $P_n = (1 - X^2)^n$. Il suffit donc de faire un bon changement de variable et de poser :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = \left(1 - \left(\frac{X-a}{M}\right)^2\right)^n.$$

Nous avons $P_n(a) = 1$ pour tout n et $||P_n||_A \leq \sup\limits_{[a+\eta,a+M]} |P_n(x)| = \sup\limits_{[\eta/M,1]} (1-x^2)^n \leq \left(1 - \dfrac{\eta^2}{M^2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

36) Les primitives de f sont les applications de la forme $g_K :\ x \longmapsto K + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ avec $K \in \mathbb{R}$. Une telle primitive appartient à E si et seulement si

$$K + \int_0^1 \left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x = 0$$

ce qui donne une unique valeur de K telle que $g_K \in E$; f possède donc une unique primitive appartenant à E, c'est l'application :

$$\varphi(f) = g :\ x \longmapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \left(\int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}u.$$

Si g ne s'annulait pas sur $[0,1]$, elle serait soit strictement positive, soit strictement négative sur $[0,1]$ (g est continue) et donc son intégrale sur $[0,1]$ serait également soit strictement positive, soit strictement négative. En fixant $a \in [0,1]$ tel que $g(a) = 0$, on peut alors écrire, pour $x \in [0,1]$:

- si $|x-a| \leq \dfrac{1}{2}$, $|g(x)| = |g(x) - g(a)| = \left|\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq |x-a|\,\|f\|_\infty \leq \dfrac{1}{2}\,\|f\|_\infty$;
- sinon, $|g(x)| = \left|\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|-\displaystyle\int_{[0,1]\setminus]a,x[} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq (1-|x-a|)\,\|f\|_\infty \leq \dfrac{1}{2}\,\|f\|_\infty$.

On en déduit que φ est continue de norme inférieure ou égale à $1/2$.

Il me semble que la norme est $1/4$, atteinte par limite quand f tend vers $x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1/2 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$ mais je ne trouve pas la seconde astuce !

37) Remarquons tout d'abord que l'additivité de f donne :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in E,\ f(nx) = nf(x)$$

puis

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in E,\ \frac{1}{n}\,f(x) = \frac{1}{n}\,f\left(n\,\frac{x}{n}\right) = f\left(\frac{x}{n}\right)$$

et enfin

$$\forall q \in \mathbb{Q},\ \forall x \in E,\ f(qx) = qf(x).$$

D'autre part, posons $K = \sup_{\|x\|\leq 1} \|f(x)\|$ et fixons $\varepsilon > 0$. Il existe un **rationnel** $\eta > 0$ tel que $K\,\eta \leq \varepsilon$ et on a :

$$\forall x \in E,\ \|x\| \leq \eta \Longrightarrow \left\|f\left(\frac{x}{\eta}\right)\right\| \leq K \Longrightarrow \|f(x)\| \leq K\eta \leq \varepsilon$$

donc f est continue en 0. Par additivité, on a $f(a+h) = f(a) + f(h) \xrightarrow[h\to 0]{} f(a)$ et f est continue en tout point.

Pour $x \in E$, l'application $\lambda \longmapsto f(\lambda x) - \lambda f(x)$ est ainsi continue sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $\mathbb{Q}$: elle est donc nulle sur $\mathbb{R}$, ce qui achève de montrer que f est linéaire.

La propriété est fausse quand le corps est $\mathbb{C}$: il suffit de considérer $E = F = \mathbb{C}$ et $f :\ z \longmapsto \overline{z}$, qui est bien additive, bornée sur la boule unité mais non $\mathbb{C}$-linéaire.

38) a) Comme f est linéaire continue, elle est lipschitzienne et il existe K tel que $\forall x \in E,\ \|f(x)\| \leq K\|x\|$. On en déduit :

$$\forall x \in B,\ \|f(x)\| \leq K$$

et donc $|||f||| \leq K$.

On a d'autre part, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$:

$$\|f(x)\| = \left\| f\left(\|x\| \frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \|x\| \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq |||f||| \, \|x\|$$

et l'inégalité est trivialement vérifiée quand $x = 0$: f est donc $|||f|||$-lipschtzienne.

$|||f|||$ est bien le rapport de Lipschitz de f.

b) Il n'y a pas de difficulté :

- pour $f, g \in \mathcal{L}_c(E)$, on a :

$$|||f+g||| = \sup_{x \in B} \|f(x) + g(x)\| \leq \sup_{x \in B} \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq \sup_{x \in B} \|f(x)\| + \sup_{x \in B} \|g(x)\| = |||f||| + |||g|||;$$

- pour $\alpha \in K$, on a :

$$|||\alpha f||| = \sup_{x \in B} \|\alpha f(x)\| = \sup_{x \in B} |\alpha| \, \|f(x)\| = |\alpha| \sup_{x \in B} \|f(x)\| = |\alpha| \, |||f|||;$$

- pour $f \in \mathcal{L}_c(E)$ telle que $|||f||| = 0$, f est 0-lipchitzienne, donc constante. Comme $f(0) = 0$, f est nulle.

- pour $f, g \in \mathcal{L}_c(E)$, on a :

$$\forall x \in E,\ \|f \circ g(x)\| \leq |||f||| \, \|g(x)\| \leq |||f||| \, |||g||| \, \|x\|$$

  donc $f \circ g$ est lipschitzienne de rapport $|||f||| \times |||g|||$: on en déduit que $|||f \circ g||| \leq |||f||| \times |||g|||$.

  c) Supposons donc que $f \circ g - g \circ f = \mathrm{Id}_E$. On montre par une récurrence immédiate que $f \circ g^n - g^n \circ f = n\, g^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

  - pour $n = 1$, on a $f \circ g^n - g^n \circ = \mathrm{Id}_E = n\,\mathrm{Id}_E$;

  - soit $n \geq 1$ et supposons la relation vraie au rang n. On a alors :

$$(f \circ g^n - g^n \circ f) \circ g = n\, g^n$$

    d'où

$$f \circ g^{n+1} - g^n \circ (g \circ f + \mathrm{Id}_E) = n\, g^n$$

    ce qui donne la relation au rang $n+1$.

  On a donc :

$$\forall n \geq 1,\ |||n g^{n-1}||| = |||f \circ g^n - g^n \circ f||| \leq 2\, |||f||| \, |||g^n|||$$

  ce qui donne, pour $n \geq 1$:

$$|||g^n||| \geq \frac{n}{2\,|||f|||} |||g^{n-1}||| \geq \frac{n(n-1)}{(2\,|||f|||)^2} |||g^{n-2}||| \geq \cdots \geq \frac{n(n-1)\ldots 1}{(2\,|||f|||)^n} |||g^0||| = \frac{n!}{(2\,|||f|||)^n} |||\mathrm{Id}_E|||.$$

  en remarquant que f est non nulle (sinon, $f \circ g - g \circ f$ serait nul) : on peut diviser par $|||f|||$. On a d'autre part

$$|||g^n||| \leq |||g|||^n,$$

  ce qui donne :

$$\forall n \geq 1, \frac{(2\,|||f||| \times |||g|||)^n}{|||\mathrm{Id}_E|||} \geq n!$$

  ce qui est absurde ($n!$ est prépondérant devant toute suite géométrique).
  Nous avons donc montré que pour tous $f, g \in \mathcal{L}_c(E)$, $f \circ g - g \circ f \neq \mathrm{Id}_E$.

39) a) L'application φ est bien définie car pour $f \in E$, la série est absolument convergente (f est bornée car continue sur le segment $[0,1]$). La linéarité de φ est ensuite évidente, par linéarité de la somme. On a ensuite :

$$\forall f \in ED,\ |\varphi(f)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(r_n)}{(-2)^n}\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|f(r_n)|}{2^n} \leq \|f\|_\infty \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2\|f\|_\infty$$

donc φ est continue et $|||\varphi||| \leq 2$.

On peut remarquer que l'inégalité précédente n'est une égalité que si $f(r_n) = (-1)^n \|f\|_\infty$ pour tout n, ce qui n'est possible que si f est nulle (si $|f|$ est constante sur $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, elle est constante sur $[0,1]$ par continuité de f et densité de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ dans $[0,1]$: ceci impose à f d'être constante et l'alternance de signe donne $f = 0$).

Pour montrer que φ est de norme 2, il faut construire une suite de fonctions qui permettent d'approcher le cas d'égalité. Pour $N \in \mathbb{N}$, on peut définir une fonction $f_N \in E$ telle que :

- $\forall n \in \{0, \dots, N\},\ f_N(r_n) = (-1)^n$;
- $\|f_N\|_\infty = 1$.

On peut par exemple choisir f_N affine par morceaux, en ajoutant $f_N(0) = 1$ et $f_N(1) = 0$ si 0 ou 1 n'est pas élément de $\{r_0, \dots, r_n\}$. On a alors :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ |||\varphi||| \geq \frac{|\varphi(f_N)|}{\|f_N\|} = \left|\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{f(r_n)}{(-2)^n}\right| \geq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} - \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{f(r_n)}{(-2)^n}\right| \geq 2\left(1 - \frac{1}{2^{N+1}}\right) - \frac{\|f\|_\infty}{2^N}$$

ce qui donne $|||\varphi||| \geq 2$ en faisant tendre N vers l'infini.

b) Pour $f \in \mathcal{H}$, comme f est non nulle, on a $1 = \varphi(f) < 2\|f\|_\infty$, donc $d(0, \mathcal{H}) \geq \frac{1}{2}$. Si on montre que $d(0, \mathcal{H}) = \frac{1}{2}$, on aura ainsi démontré que la distance de 0 à $\mathcal{H}$ n'est pas atteinte.

On a ensuite $g_N = \dfrac{f_N}{\varphi(f_N)} \in \mathcal{H}$ pour tout N et $\|g_N\| = \dfrac{\|f_N\|}{|\varphi(f_N)|}$ tend vers $1/2$ d'après le calcul précédent : on en déduit que $d(0, \mathcal{H}) \leq 2$, ce qui achève la preuve.

c) Il suffit de reprendre la preuve précédente :

- si $x \in \mathcal{H}$, $1 = \varphi(x) \leq |||\varphi|||\ \|x\|$, donc $d(0, \mathcal{H}) \geq \dfrac{1}{|||\varphi|||}$;
- si $x \in E$ avec $\varphi(x) \neq 0$, on a $\frac{x}{\varphi(x)} \in \mathcal{H}$ et donc $\left\|\dfrac{x}{\varphi(x)}\right\| \geq d(0, \mathcal{H})$, d'où

$$|\varphi(x)| \leq \frac{1}{d(0, \mathcal{H})} \|x\|$$

  Comme cette inégalité est vérifiée quand $\varphi(x) = 0$, on en déduit que $|||\varphi||| \leq \dfrac{1}{d(0, \mathcal{H})}$.

On en déduit que $d(0, \mathcal{H}) \geq \dfrac{1}{|||\varphi|||}$ et les deux preuves précédentes prouvent :

- si $d(0, \mathcal{H})$ est atteinte, il existe $x \in \mathcal{H}$ tel que $\|x\| = d(0, \mathcal{H})$, ce qui donne $|\varphi(y)| = \dfrac{1}{d(0, \mathcal{H})} = |||\varphi|||$ avec $y = \dfrac{x}{\|x\|}$;
- s'il existe y de norme 1 tel que $|\varphi(y)| = |||\varphi||| = \dfrac{1}{d(0, \mathcal{H})}$, alors $x = \dfrac{y}{\varphi(y)}$ est élément de $\mathcal{H}$ et $\|x\| = d(0, \mathcal{H})$.

Ainsi, $d(0,\mathcal{H}) = \inf_{x\in\mathcal{H}} \|x\|$ est atteinte si et seulement si $\|\varphi\| = \sup_{\|x\|=1} |\varphi(x)|$ est atteinte.

40) a) Pour $\| \ \|_\infty$:

Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nous avons :

$$\forall X = {}^t(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \|AX\|_\infty = \sup_{1\le i\le n} \left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j\right| \le \sup_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \underbrace{|x_j|}_{\le \|X\|_\infty} \le \|X\|_\infty \underbrace{\sup_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|}_{=K}.$$

Il existe d'autre part i_0 tel que $K = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|$. Nous pouvons donc définir X en posant

$$\forall j \in \{1,\dots,n\},\ x_j = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{i_0,j} \ge 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors

$$\frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|} \ge \left|\sum_{j=1}^n a_{i_0,j}x_j\right| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| = K$$

ce qui prouve que $\|A\|_\infty = K = \sup_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$.

b) Pour $\| \ \|_1$:

Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nous avons pour tout $X = {}^t(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\|AX\|_1 = \sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j\right| \le \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|\,|x_j| \le \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}|\right) |x_j| \le \underbrace{\sup_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|}_{=K} \|X\|_1$$

Comme dans le premier cas, il existe j_0 tel que $K = \sum_{i=1}^n |a_{i,j_0}|$. Nous pouvons donc définir X en posant

$$\forall i \in \{1,\dots,n\},\ x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors

$$\frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|\,|x_j| = \sum_{i=1}^n |a_{i,j_0}| = K$$

ce qui prouve que $\|A\|_1 = K = \sup_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$.

On peut remarquer que $\|A\|_1 = \|A^\top\|_\infty$.

c) Pour $\| \ \|_2$, on a besoin du théorème de réduction des matrices symétriques.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $S = A^\top A$ est symétrique dont il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $S = PDP^\top$ où D est diagonale. En notant $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ les valeurs propres de S, qui sont ici positives car S est symétrique positive, nous obtenons :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \|AX\|_2^2 = (AX)^\top (AX) = Y^\top DY = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \le \underbrace{\left(\sup_{1\le i\le n} \lambda_i\right)}_{=K} Y^\top Y = K\, X^\top X = K\,\|X\|_2^2$$

en posant $Y = P^\top X = (y_1, \dots, y_n)^\top$. Il existe i_0 tel que $\lambda_{i_0} = K$ et le vecteur Y défini par $y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = i_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ donne un cas d'égalité. Nous obtenons donc :

$$\|A\|_2 = \sqrt{K} = \sqrt{\rho(A^\top A)}$$

où ρ est le rayon spectral (maximum des modules de valeurs propres).

41) Supposons que l'image de tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ par f est un ouvert de $\mathbb{R}^p$. En particulier, $\mathrm{Im}\,(f) = f(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$: comme il contient 0, il contient une boule $B(0, r)$. En fixant une base $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq p}$ de $\mathbb{R}^p$, la famille $\left(\dfrac{r}{2\|\varepsilon_i\|}\,\varepsilon_i\right)_{1 \leq i \leq p}$ est alors une base de $\mathbb{R}^p$ contenue dans $B(0, r)$, donc dans $\mathrm{Im}\,(f)$ et f est surjective.

Supposons que f est surjective. Il existe donc une famille $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\mathcal{B}' = \big(f(e_i)\big)_{1 \leq i \leq p}$ soit la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Comme la famille $(f(e_i))_{1 \leq i \leq p}$ est libre, la famille $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ l'est également et on peut la compléter en une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$. Munissons $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ des normes $\| \ \|_\infty$ dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement (les normes sont équivalentes car les espaces sont de dimensions finies).

Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $b \in f(A)$. Il existe $a \in A$ tel que $b = f(a)$ et il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$. Si $y \in B(b, r)$, on peut l'écrire :

$$y = b + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(e_i)$$

avec $|\alpha_i| < r$ pour tout i. On a donc $y = f\big(a + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i\big) \in f(A)$ car $a + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i \in B(a, r) \subset A$. Nous avons donc démontré que $f(A)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

42) a) $T(f)$ est bien définie et continue sur $[0, 1]$ et la linéarité de T est évidente. On a ensuite :

$$\forall f \in E, \ \|T(f)\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$$

avec égalité pour $f = 1$: T est donc continue, de norme égale à 2.

b) 2 est valeur propre de T, associé au vecteur propre 1 (application constante). Soit f un vecteur propre associé à 2 et notons $E = \{x \in [0, 1], \ |f(x)| = \|f\|_\infty\}$. Nous allons démontrer que si $x \in E$, $\dfrac{x}{2} \in E$ et $\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2} \in E$. Fixons donc $x \in E$. On a :

$$\|f\|_\infty = |f(x)| = \left|\frac{f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)}{2}\right| \leq \frac{\left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \left|f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right|}{2} \leq \frac{\|f\|_\infty + \|f\|_\infty}{2} = \|f\|_\infty$$

ce qui impose que toutes ces inégalités sont des égalités. En particulier, $\left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \left|f\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)\right| = \||f\|_\infty$.

Ainsi, le minimum et le maximum de E sont respectivement 0 et 1 (car si $x > 0$, $\dfrac{x}{2} < x$ et si $x < 1$, $\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2} > x$). Nous allons ensuite montrer par récurrence sur n la propriété :

$$\mathcal{P}_n : \ \forall k \in \{0, 1, \dots, 2^n\}, \ \frac{k}{2^n} \in E.$$

- $\mathcal{P}_0$ est vérifiée car $0 \in E$ et $1 \in E$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{P}_n$ est vérifiée. Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, 2^n\}$, $\dfrac{k}{2^n} \in E$ donc $\dfrac{k}{2^{n+1}} \in E$ et $\dfrac{k}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{k + 2^n}{2^{n+1}} \in E$, ce qui donne exactement la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$.

E est donc un fermé qui contient tous les rationnels de la forme $\dfrac{k}{2^n}$: il est égal à $[0,1]$. La fonction $|f|$ est ainsi constante sur $[0,1]$, ce qui prouve que f est également constante. L'espace propre associé à la valeur propre 2 est donc de dimension 1 et engendré par la fonction constante égale à 1.

43) a) Il suffit de vérifier :

- $\|P\| \geq 0$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ avec annulation si et seulement si $P^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit si et seulement si $P = 0$.

- pour $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, on a :

$$\|P+Q\| = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n |P^{(n)}(0) + Q^{(n)}(0)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(|P^{(n)}(0)| + |Q^{(n)}(0)| \right) = \|P\| + \|Q\|$$

- pour $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\|\lambda P\| = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n |(\lambda P)^{(n)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ł} \lambda P^{(n)}(0)| = |\lambda|\, \|P\|$$

Pour la suite, il sera quelquefois plus pratique d'utiliser la formule :

$$\| \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n X^n \| = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \alpha_n n!.$$

b) • Étude de f ; on a :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X],\ \|P'\| = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n |P^{(n+1)}(0)| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} a_n |P^{(n)}(0)$$

Ainsi, si la suite $\left(\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \right)_{n \geq 1}$ est bornée par K, f est continue puisqu'on a :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X],\ \|f(P)\| \leq K \sum_{n=1}^{+\infty} a_n |P^{(n)}(0) \leq K\, \|P\|.$$

Réciproquement, si f est continue, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|f(X^n)\| \leq |||f|||\, \|X^n\|$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}*,\ \|n a_{n-1}(n-1)!)\| \leq |||f|||\, a_n\, n!$$

ce qui prouve que $\left(\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \right)_{n \geq 1}$ est bornée.

• Étude de g ; on a cette fois :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|g(X^n)\| = \|nX^n\| = n\|X^n\|$$

donc g n'est jamais continue. Plus généralement, on montre facilement que si g est un endomorphisme continu, les valeurs propres de g sont bornées par $|||g|||$ (ici, tout entier naturel est valeur propre de g).

• Étude de h ;

$$\forall P = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n X^n \in \mathbb{C}[X],\ \|XP\| = \| \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n X^{n+1} \| = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} \alpha_n (n+1)!$$

et on démontre comme pour f que h est continue si et seulement si $\left(\dfrac{(n+1)a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\geq 0}$ est bornée.

44) Nous notons $\| \ \|$ les différentes normes et nous choisissons de munir $E \times F$ de la norme $(x,y) \longmapsto \max(\|x\|, \|y\|)$.

• $(i) \Longrightarrow (ii)$ est évident.

• Supposons que (ii) est vérifiée ; en particulier, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in E \times F,\ \|(x,y) - (0,0)\| \leq \eta \Longrightarrow \|f(x,y) - f(0,0)\| \leq 1$$

soit

$$\forall (x,y) \in E \times F,\ (\|x\| \leq \eta \text{ et } \|y\| \leq \eta) \Longrightarrow \|f(x,y)\| \leq 1$$

On a alors, pour tous $x \in E \setminus \{0\}$ et $y \in F \setminus \{0\}$:

$$|f(x,y)| = \frac{\|x\|}{\eta}\,\frac{\|y\|}{\eta}\left|f\left(\eta\frac{x}{\|x\|}, \eta\frac{y}{\|y\|}\right)\right| \leq \frac{1}{\eta^2}\,\|x\|\,\|y\|$$

et cette inégalité est encore vérifiée quand x ou y est nulle : nous obtenons (iii) avec $K = \dfrac{1}{\eta^2}$.

• Supposons que (iii) est vérifiée, pour une certaine constante K. Nous avons alors, pour $x \in E$:

$$\forall y \in F,\ \|F(x)(y)\| \leq K\|x\|\,\|y\|$$

donc $F(x)$ est une application linéaire continue et $|||F(x)||| \leq K\|x\|$.
On en déduit que F, qui est linéaire de E dans $\mathcal{L}_c(F,G)$, est continue avec $|||F||| \leq K$: (iv) est vérifié.

• Supposons (iv) vérifié et considérons une suite (x_n, y_n) de $E \times F$ convergeant vers (x,y). On a :

$$\begin{aligned} |(x_n,y_n) - f(x,y)| &\leq |(x_n,y_n) - f(x_n,y)| + |(x_n,y) - f(x,y)| \\ &\leq K\|x_n\|\,\|y_n - y\| + K\|x_n - x\|\,\|y\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{aligned}$$

donc f est continue sur $E \times F$ (caractérisation séquentielle de la continuité).

45) a) Comme f est linéaire continue, elle est lipschitzienne et il existe K tel que $\forall x \in E,\ \|f(x)\| \leq K\,\|x\|$. On en déduit :

$$\forall x \in B,\ \|f(x)\| \leq K$$

et donc $|||f||| \leq K$.

On a d'autre part, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$:

$$\|f(x)\| = \left\|f\left(\|x\|\,\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \|x\|\,\left\|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq |||f|||\,\|x\|$$

et l'inégalité est trivialement vérifiée quand $x = 0$: f est donc $|||f|||$-lipschtzienne.

$|||f|||$ est donc le rapport de Lipschitz de f.

b) Il n'y a pas de difficulté :

- pour $f, g \in \mathcal{L}_c(E)$, on a :

$$|||f+g||| = \sup_{x\in B}\|f(x)+g(x)\| \leq \sup_{x\in B}\|f(x)\| + \|g(x)\| \leq \sup_{x\in B}\|f(x)\| + \sup_{x\in B}\|g(x)\| = |||f||| + |||g|||;$$

- pour $\alpha \in K$, on a :

$$|||\alpha f||| = \sup_{x\in B}\|\alpha f(x)\| = \sup_{x\in B}|\alpha|\,\|f(x)\| = |\alpha|\,\sup_{x\in B}\|f(x)\| = |\alpha|\,|||f|||;$$

- pour $f \in \mathcal{L}_c(E)$ telle que $\|\!|f|\!\| = 0$, f est 0-lipchitzienne, donc constante. Comme $f(0) = 0$, f est nulle.

- pour $f, g \in \mathcal{L}_c(E)$, on a :
$$\forall x \in E,\ \|f \circ g(x)\| \leq \|\!|f|\!\|\, \|g(x)\| \leq \|\!|f|\!\|\, \|\!|g|\!\|\, \|x\|$$
donc $f \circ g$ est lipschitzienne de rapport $\|\!|f|\!\| \times \|\!|g|\!\|$: on en déduit que $\|\!|f \circ g|\!\| \leq \|\!|f|\!\| \times \|\!|g|\!\|$.

c) Supposons donc que $f \circ g - g \circ f = \mathrm{Id}_E$. On montre par une récurrence immédiate que $f \circ g^n - g^n \circ f = n\, g^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

- pour $n = 1$, on a $f \circ g^n - g^n \circ = \mathrm{Id}_E = n\,\mathrm{Id}_E$;

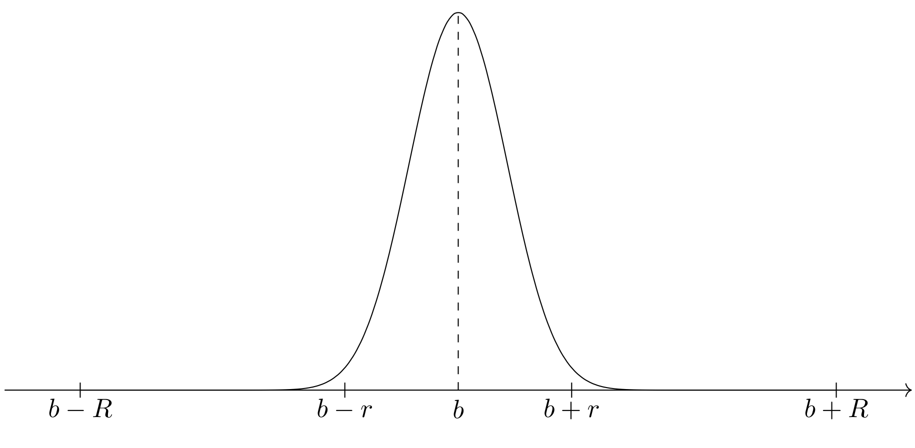
- soit $n \geq 1$ et supposons la relation vraie au rang n. On a alors :
$$(f \circ g^n - g^n \circ f) \circ g = n\, g^n$$
d'où
$$f \circ g^{n+1} - g^n \circ (g \circ f + \mathrm{Id}_E) = n\, g^n$$
ce qui donne la relation au rang $n + 1$.

On a donc :
$$\forall n \geq 1,\ \|\!|ng^{n-1}|\!\| = \|\!|f \circ g^n - g^n \circ f|\!\| \leq 2\, \|\!|f|\!\|\, \|\!|g^n|\!\|$$
ce qui donne, pour $n \geq 1$:
$$\|\!|g^n|\!\| \geq \frac{n}{2\,\|\!|f|\!\|}\, \|\!|g^{n-1}|\!\| \geq \frac{n(n-1)}{(2\,\|\!|f|\!\|)^2}\, \|\!|g^{n-2}|\!\| \geq \cdots \geq \frac{n(n-1)\ldots 1}{(2\,\|\!|f|\!\|)^n}\, \|\!|g^0|\!\| = \frac{n!}{(2\,\|\!|f|\!\|^n}\, \|\!|\mathrm{Id}_E|\!\|.$$
en remarquant que f est non nulle (sinon, $f \circ g - g \circ f$ serait nul) : on peut diviser par $\|\!|f|\!\|$. On a d'autre part
$$\|\!|g^n|\!\| \leq \|\!|g|\!\|^n,$$
ce qui donne :
$$\forall n \geq 1, \frac{(2\,\|\!|f|\!\| \times \|\!|g|\!\|)^n}{\|\!|\mathrm{Id}_E|\!\|} \geq n!$$
ce qui est absurde ($n!$ est prépondérant devant toute suite géométrique).
Nous avons donc montré que pour tous $f, g \in \mathcal{L}_c(E)$, $f \circ g - g \circ f \neq \mathrm{Id}_E$.

46) a) On montre facilement que $\|P + Q\|_A \leq \|P\|_A + \|Q\|_A$ et $\|\lambda P\|_A = |\lambda|\, \|P\|_A$ pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$, $P, Q \in E$. On a d'autre part :
$$\|P\|_A = 0 \Longleftrightarrow \forall x \in A,\ P(x) = 0 \Longleftrightarrow P = 0$$
car A est une partie infinie.

b) Si $b \in A$, on a $\forall P \in E,\ |\varphi_b(P)| = |P(b)| \leq \|P\|_A$ donc φ_b est continue.

Supposons que $b \notin A$. Comme A est fermé, il existe $r > 0$ tel que $]b - r, b + r[\cup A = \emptyset$. Comme A est borné, il existe $R > r$ tel que $A \subset [b - R, b + R]$. On a donc $A \subset [b - R, b - r] \cup [b + r, b + R]$. Pour montrer que φ_b est discontinue, nous devons trouver une suite de polynômes (P_k) telle que $\|P_k\|$ soit « petit » devant $\varphi_b(P_k)$. Autrement-dit, le graphe de P_k doit avoir une allure du type :



On peut donc penser à définir $P_k = (b+R-X)^k(X-b+R)^k$, pour $k \in \mathbb{N}$, polynôme qui admet $b+R$ et $b-R$ pour racines d'ordre k. On a, en utilisant l'inclusion de A dans $[b-R, b-r] \cup [b+r, b+R]$ et la symétrie de P_k :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P_k(b) = R^{2k} \text{ et } \|P\|_A \leq \sup_{x \in [b+r, b+R]} |P_k(x)| = P_k(b+r) = (R^2 - r^2)^k.$$

Comme $R^2 > R^2 - r^2$, $\|P\|_A$ est négligeable devant $\varphi_b(P_k)$ quand k tend vers l'infini : cela prouve que φ_b n'est pas continue (sinon, il existerait une constante K telle que $|\varphi_b(P_k)| \leq K \|P_k\|_A$ pour tout k).

c) Si les deux normes sont équivalentes, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_x \text{ est continue pour } \|\ \|_A \iff \varphi_x \text{ est continue pour } \|\ \|_B.$$

On en déduit que $x \in A \iff x \in B$, i.e. que $A = B$.

Réciproquement, si $A = B$, les normes sont égales, donc équivalentes. Les normes sont donc équivalentes si et seulement si $A = B$.

Exercices Mines-Centrale: compacité

47) L'exercice est vraiment stupide : $\mathcal{A}$ n'est pas bornée, puisque pour $M \geq 0$, la suite $u = (M, 0, 0, \dots)$ est un élément de $\mathcal{A}$ dont la norme vaut M. $\mathcal{A}$ n'est d'autre part pas fermée, puisqu'en posant

$$\forall n, N \in \mathbb{N},\ u_n^N = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} & \text{si } n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on a $u^N \xrightarrow[N \to +\infty]{} \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n \geq 0} = u$ pour $\|\ \|_\infty$ avec $u^N \in \mathcal{A}$ pour tout N et $u \notin \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ n'est donc pas compact.

48) L'application $x \longmapsto d(x, F)$ est continue (elle est 1-lipschitzienne) et K est un compact non vide, donc il existe $a \in K$ tel que $d(a, F) = \inf_{x \in K} d(x, F)$.

On peut ensuite montrer que $d(a, F)$ est également atteinte de deux façon différentes :

- on se ramène à une partie compacte : soit $y_0 \in F$ et $K' = F \cap \overline{B(a, d(a, y_0))}$. K' est fermé borné, donc compact (car E est de dimension finie). Comme K' est non vide (il contient y_0), l'application continue $y \longmapsto d(a, y)$ atteint sa borne inférieure sur K' : il existe $b \in K'$ tel que $d(a, F) = d(a, b)$. On a ensuite :

  $$\forall y \in F, d(a, y) \geq \begin{cases} d(a, b) & \text{si } y \in K' \\ d(a, y_0) \geq d(a, b) & \text{sinon (car } y_0 \notin \overline{B(a, d(a, y_0))} \text{ et } y_0 \in K') \end{cases}$$

  On a ainsi $d(a, F) = d(a, K') = d(a, b)$.

- il existe une suite $(y_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que $d(a, y_n)$ converge vers $d(a, F)$. Le suite (y_n) est alors bornée :

  $$\|y_n\| \leq \|y_n - a\| + \|a\|$$

  avec $(\|y_n - a\|)_{n \geq 0}$ bornée car convergente. Comme E est de dimension finie, on peut extraire de cette suite bornée une sous-suite convergente : il existe $b \in E$ et une extractrice φ telle que $y_{\varphi(n)}$ converge vers b. Comme F est fermé, $b \in F$ et $d(a, b) = \lim_{+\infty} d(a, y_n) = d(a, F)$.

Nous avons ainsi démontré l'existence de $a \in K$ et $b \in F$ tel que $d(K, F) = d(a, b)$.

Premier contre-exemple : dans $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa norme euclidienne, considérons les parties $F_1 = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ et $F_2 = \{(x, e^{-x}),\ x \in \mathbb{R}\}$.

- F_1 est fermée car c'est un sous-espace vectoriel (de dimension finie) ;

- F_2 est également fermée : si (x_n, y_n) est une suite d'éléments de F_2 qui converge vers (x, y), alors x_n et y_n convergent respectivement vers x et y, puis $y_n = e^{-x_n}$ donne $y = e^{-x}$ en faisant tendre n vers l'infini ; ceci prouve que $(x, y) \in F$. F étant stable par limite, il est fermé ;

- pour $a = (\alpha, 0) \in F_1$ et $b = (\beta, e^{-\beta}) \in F_2$, on a $a \neq b$, et donc $d(a, b) > 0$;

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (n, 0) \in F_1$ et $b_n = (n, e^{-n}) \in F_2$, donc $e^{-n} = d(a_n, b_n) \geq d(F_1, F_2) \geq 0$, ce qui donne $d(F_1, F_2) = 0$ quand n tend vers l'infini.

La distance entre F_1 et F_2 n'est donc pas atteinte.

Second contre-exemple : on choisit un espace E de dimension finie, un fermé non vide F de E et un point a de E tel que $d(a, F)$ ne soit pas atteinte : $K = \{a\}$ sera alors un compact non vide tel que $d(K, F)$ n'est pas atteinte.Voici un exemple classique :

$$E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \text{ muni de la norme } \| \ \|_\infty \, ;$$
$$F = \{f \in E, \ \int_0^{1/2} f(t) \,\mathrm{d}t - \int_{1/2}^1 f(t) \,\mathrm{d}t = 1\} \, ;$$
$$a = 0.$$

49) a) Chaque K_n étant non vide, il existe une suite $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_n \in K_n$ pour tout n. En particulier, x est une suite du compact K_0 : il existe donc une extractrice φ et un élément a de K_0 tels que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$. Pour tout p, on $\varphi(n) \geq \varphi(p) \geq p$ pour tout $n \geq p$. Ainsi, la suite extraite $y = (x_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ est à valeur dans K_p à partir d'un certain rang. comme K_p est compact, il est fermé et la limite a de y est élément de K_p. Nous avons ainsi montré que $a \in K_p$ pour tout p, i.e. que $a \in K$: K est non vide.

Comme les K_n sont compacts, ils sont fermés et K est fermé comme intersection de fermés. Si $x = (x_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'éléments de K, on en déduit comme ci-dessus qu'il existe une extractrice φ et un élément a de K_0 tels que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$. Comme K est fermé, $a \in K$ et nous avons montré que x possédait une valeur d'adhérence dans K : K est un compact.

b) Travaillons par contraposée : supposons que O est un ouvert de E tel que $K_n \not\in O$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut alors construire $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_n \in K_n$ et $x_n \not\in O$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme à la question a), x possède une valeur d'adhérence a qui est élément de K : comme O est un ouvert, $E \setminus O$ est fermé et $a \in E \setminus O$ (car a est limite d'une sous-suite de x constituée d'éléments de $E \setminus O$). Nous avons donc montré que $K \not\subset O$.

c) Notons $\delta(A)$ le diamètre d'une partie non vide :

$$\delta(A) = \inf_{x, y \in A} d(x, y).$$

Comme la suite $(K_n)_{n \geq 0}$ est décroissante, la suite $(\delta(K_n))_{n \geq 0}$ est décroissante et minorée par 0 : elle a donc une limite ℓ.

Comme $K \subset K_n$, on a $\delta(K) \leq \delta(K_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis $\delta(K) \leq \ell$ en faisant tendre n vers l'infini.

D'autre part, il existe deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n \in K_n, \ b_n \in K_n \text{ et } d(a_n, b_n) = \delta(K_n)$$

En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, $(x, y) \longmapsto d(x, y)$ est continue sur le compact non vide K_n^2, donc $\delta(K_n)$ est atteint. Comme K_0^2 est compact, on peut extraire de la suite $(a_n, b_n)_{n \geq 0}$ une sous-suite convergente : il existe une extractrice φ et $a, b \in K_0$ tels que $a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$ et $b_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} b$. Comme $\delta(K_{\varphi(n)} = d(a_{\varphi(n)}, b_{\varphi(n)})$, on obtient : $\ell = d(a, b)$ en faisant tendre n vers l'infini. Enfin, comme à la question a), a et b sont éléments de K, ce qui donne $\ell = d(a, b) \leqq \delta(K)$: nous avons bien démontré que le diamètre de K_n tend vers celui de K quand n tend vers l'infini.

50) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $K \times K$ est compact, il existe une extractrice φ et $(x, y) \in K^2$ tels que $a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$ et $b_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} y$. On en déduit en particulier que $a_{\varphi(n+1)} - a_{\varphi(n)}$ et $b_{\varphi(n+1)} - b_{\varphi(n)}$ tendent vers 0 quand n tend vers l'infini. Il existe donc un entier n_0 tel que :

$$d(a_{\varphi(n_0)}, a_{\varphi(n_0+1)}) < \varepsilon \text{ et } \ d(b_{\varphi(n_0)} - b_{\varphi(n_0+1)}) < \varepsilon.$$

En posant $n = \varphi(n_0+1) - \varphi(n_0)$, on a bien $n \geq 1$ et :

$$\begin{cases} d(a_n, a) \leq d(a_{n+1}, a_1) \leq \cdots \leq d(a_{n+\varphi(n_0)}, a_{\varphi(n_0)}) = d(a_{\varphi(n_0)}, a_{\varphi(n_0+1)}) < \varepsilon \\ d(b_n, b) \leq d(b_{n+1}, b_1) \leq \cdots \leq d(b_{n+\varphi(n_0)}, b_{\varphi(n_0)}) = d(b_{\varphi(n_0)}, b_{\varphi(n_0+1)}) < \varepsilon \end{cases}$$

On en déduit :

$$d(a,b) \leq d(f(a), f(b) = d(a_1, b_1) \leq \cdots \leq d(a_n, b_n) \leq d(a_n, a) + d(a,b) + d(b, b_n) < d(a,b) + 2\varepsilon.$$

Nous avons donc démontré :

$$\forall \varepsilon > 0,\ d(a,b) \leq d(f(a), f(b)) < d(a,b) + 2\varepsilon,$$

et donc $d(a,b) = d(f(a), f(b))$. Ceci étant vérifié pour tous a, b dans K, f est une isométrie de K sur $f(K)$.

Il reste à montrer que $f(K) = K$:

- f est continue (nous savons maintenant que f est une isométrie : elle est 1-lipschitzienne), donc $f(K)$ est compact, donc fermé ;
- pour $a \in K$, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un entier $n \geq 1$ tel que $d(a_n, a) < \varepsilon$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $B(a, \varepsilon)$ rencontre $f(K)$ puisque $a_n = f(a_{n-1}) \in f(K)$: a est donc élément de $\overline{f(K)} = f(K)$.

51) a) L'application $\varphi :\ K \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à x associe $d(x, f(x))$ est continue. Comme K est un compact non vide, φ atteint sa borne inférieure en un point a de K. On a alors $a = f(a)$, car dans le cas contraire, on aurait $\varphi(f(a)) = d(f(a), f(f(a))) < d(a, f(a)) = \varphi(a)$, ce qui contredirait la minimalité de $\varphi(a)$.

L'unicité du point fixe est évidente : si b était un point fixe de f distinct de a, on aurait une contradiction :

$$d(a,b) = d(f(a), f(b)) < d(a,b).$$

b) Pour tout n, on a $d(x_{n+1}, a) = d(f(x_n), f(a)) \leq d(x_n, a)$ (avec inégalité stricte si $x_n \neq a$ et égalité si $x_n = a$). La suite de terme général $d(x_n, a)$ est donc décroissante et minorée par 0 : elle converge vers $\ell \geq 0$.

Si b est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$, il existe une extractrice φ telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$. On a alors $d(x_{\varphi(n)}, a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} d(b, a)$, et donc $\ell = d(a, b)$.

Comme K est compact, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède au moins une valeur d'adhérence b, associée à l'extractrice φ. Nous avons :

$$x_{\varphi(n)+1} = f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(b)$$

donc $f(b)$ est aussi une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si $b \neq a$ (i.e. si $\ell \neq 0$), l'hypothèse nous donne :

$$\ell = d(f(b), a) = d(f(b), f(a)) < d(a,b) = \ell$$

qui est absurde : on en déduit donc que $\ell = 0$, i.e. que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

52) Travaillons par contraposée : montrons qu'une partie de K infinie et fermée n'est pas discrète. Soit donc A une telle partie. Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A deux à deux distincts. Comme cette suite est une suite de K, il existe une extractrice φ et un élément a de K tel que $x_{\varphi(n)}$ converge vers a. Comme A est fermée, $a \in A$ et on a, pour $r > 0$ quelconque, l'existence d'un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ d(x_{\varphi(n)}, a) < r.$$

La partie $A \cap B(a, r)$ contient donc une infinité d'éléments (les $x_{\varphi(n)}$, pour $n \geq n_0$, sont eux à deux distincts), ce qui prouve que A n'est pas discrète.

53) Montrons le résultat par contraposée, en supposant que U est un ouvert tel que :

$$\forall r > 0,\ V_r \not\subset U.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut donc choisir $x_n \in V_{\frac{1}{n}}$ tel que $x_n \notin U$. Comme $d(x_n, K) < \dfrac{1}{n}$, il existe $y_n \in K$ tel que $d(x_n, y_n) < \dfrac{2}{n}$. La suite $(y_n)_{n\geq 1}$ est une suite du compact K, donc il existe une extractrice φ et un $a \in K$ tel $y_{\varphi(n)}$ converge vers a. On en déduit :

$$d(x_{\varphi(n)}, a) \leq d(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) + d(y_{\varphi(n)}, a) < \frac{1}{\varphi(n)} + d(y_{\varphi(n)}, a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et $x_{\varphi(n)}$ tend vers a. Comme les $x_{\varphi(n)}$ appartiennent au fermé $E \setminus U$, $a \notin U$: on a donc $K \not\subset U$.

54) a) Les propriétés $\beta_a - \alpha_a = \dfrac{1}{3^n}$ et $\alpha_a = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{2a_i}{3^i}$ se montrent facilement par récurrence sur n.

b) Chaque K_n est compact, comme réunion de 2^n segments et la décroissance vient de la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{S}_n,\ I_{a_1,\ldots,a_n,0} \cup I_{a_1,\ldots,a_n,1} \subset I_a.$$

Comme les segments qui constituent K_n sont disjoints et de largeur $\dfrac{1}{3^n}$, K_n est de mesure $\left(\frac{2}{3}\right)^n$; K est donc de mesure nulle (comme en probabilité : $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de parties mesurables, donc la mesure de l'intersection est la limite des mesures des K_n).

c) Munissons $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ de l'ordre lexicographique. Si $a = (a_i) < (b_i) = b$, il existe $n \geq 1$ tel que $a_i = b_i$ pour tout $1 \leq i < n$ et $0 = a_n < b_n = 1$. Nous avons alors :

$$f(a) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2a_i}{3^i} + \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{2}{3^i} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2a_i}{3^i} + \frac{1}{3^n} < \sum_{i=1}^{n} \frac{2b_i}{3^i} \leq f(b)$$

donc f est strictement croissante. Ceci prouve en particulier que f est injective (l'ordre lexicographique est total).

Montrons que f est à valeurs dans K. Pour $a = (a_i) \in \{0,1\}^{N^*}$, nous avons $\sum_{i=1}^{n} \frac{2a_i}{3^i} = \alpha_{(a_1,\ldots,a_n)} \in K_n$. par décroissance des K_n, nous avons donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \geq n,\ \sum_{i=1}^{m} \frac{2a_i}{3^i} \in K_n.$$

Comme les K_n sont fermés, nous en déduisons par passage à la limite :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(a) \in K_n$$

ce qui prouve que $f(a) \in K$.

Pour $x \in K$ et $n \in \mathbb{N}$, $x \in K_n$ donc x appartient à un et un seul intervalle $I_{a^{(n)}}$ avec $a^{(n)} \in \mathcal{S}_n$. En notant $a^{(n)} = (a_1^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)})$, $I_a \cap K = I_{a_1^{(n)},\ldots,a_n^{(n)},0} \cup I_{a_1^{(n)},\ldots,a_n^{(n)},1}$, donc $a_p^{(n+1)} = a_p^{(n)}$ pour tout $1 \leq p \leq n$. On peut donc définir la suite $a \in \mathcal{S}$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \geq n,\ a_n = a_n^{(m)}.$$

Nous avons alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{i=1}^{n} \frac{2a_i}{3^i} = \alpha_{a^{(n)}} \leq x \leq \beta_{a^{(n)}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2a_i}{3^i} + \frac{1}{3^n}$$

ce qui donne $f(a) = x$ en faisant tendre n vers l'infini.

f est donc une bijection strictement croissante de f sur K. On en déduit que K et $\mathcal{S}$ ont même cardinal et K a la puissance du continu.

Remarque : la puissance du continu est le cardinal de $\mathbb{R}$. Comme l'application qui à $x \in]0,1[$ associe son développement en base 2 est injective, le cardinal de $]0,1[$ est inférieur à celui de $\mathcal{S}$. Comme il existe une bijection de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$, ceci prouve que $\mathcal{S}$ a au plus la puissance du continu. D'autre part, K est contenu dans $\mathbb{R}$, donc il a au plus la puissance du continu.

d) Si $x \in K$ et $\varepsilon > 0$, en fixant n tel que $\varepsilon > \frac{1}{3^n}$, il existe $a \in \mathcal{S}_n$ tel que $x \in I_a$: on en déduit que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ contient l'ensemble infini $I_a \cap K$ (toute suite $b \in \mathcal{S}$ telle que $a_i = b_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ vérifie $f(b) \in I_a \subset]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$). x n'est donc pas un point isolé de K.

55) Soit F un fermé de $\mathbb{R}$. Nous voulons montrer que $f(F)$ est un fermé : considérons donc une suite $(y_n)_{n\geq 0}$ de $f(F)$, qui converge vers $y \in \mathbb{R}$. Il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $y_n = f(x_n)$ pour tout n.

L'ensemble $K = \{y_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$ est alors un compact (on peut par exemple remarquer qu'il est fermé borné dans $\mathbb{R}$). La suite (x_n) étant une suite du compact $f^{-1}(K)$, il existe une extractrice φ et un $x \in K$ tel que $x_{\varphi n}$ converge vers x. On a alors, par continuité de f :

$$y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

On en déduit que $y = f(x)$; or F est fermé et les $x_{\varphi(n)}$ sont éléments de F, donc $x \in F$ et $y \in f(F)$.

Nous avons ainsi démontré que $f(F)$ était stable par limite : c'est un fermé de $\mathbb{R}$.

Par contre, l'hypothèse $f^{-1}(\{y\})$ est compact pour tout $y \in \mathbb{R}$ ne suffit pas : l'application

$$f:\ x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$$

est continue et pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{y\})$ est fini, donc compact ; par contre, le fermé $\mathbb{R}$ a pour image $]0,1]$, qui n'est pas fermé.

On pourrait imaginer qu'il faille remplacer la conclusion "$f(F)$ est fermé" par "$f(F)$ est fermé dans $f(\mathbb{R})$", comme on le voit avec la fonction

$$f:\ x \longmapsto \frac{x}{1+x^2}$$

qui est continue et pour laquelle tous les $f^{-1}(\{y\})$ sont également finis donc compacts, avec le fermé $[1, +\infty[$ qui a pour image $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$ qui n'est fermé ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

56) I_a est un idéal de $\mathcal{A}$, en tant que noyau du morphisme d'anneau $f \longmapsto f(a)$. L'élément unité $\mathbf{1}$ de $\mathcal{A}$ (i.e. la fonction constante égale à 1) n'est pas dans I_a, donc I_a est différent de $\mathcal{A}$.

Considérons un idéal I de $\mathcal{A}$ tel que $I_a \subsetneq I$. Il existe donc $f_0 \in I \setminus I_a$. Si $g \in \mathcal{A}$, notons g_1 la fonction constante égale à $\dfrac{g(a)}{f_0(a)}$. On peut alors écrire :

$$g = \underbrace{g - g_1 f_0}_{\in I_a \subset I} + \underbrace{g_1}_{\in \mathcal{A}} \underbrace{f_0}_{\in I} \in I.$$

On a donc prouvé que $I = \mathcal{A}$: les seuls idéaux contenant I_a sont I_a et $\mathcal{A}$.

Soit I un idéal maximal. S'il existe $a \in K$ tel que $I \subset I_a$, on a $I = I_a$ par maximalité de ces deux idéaux. Supposons donc qu'un tel a n'existe pas : pour tout $a \in K$, il existe $f_a \in I \setminus I_a$. Comme f_a est continue et que $f_a(a) \neq 0$, il existe $r_a > 0$ tel que :

$$\forall x \in K,\ d(x,a) < r_a \Longrightarrow f_a(x) \neq 0.$$

On a alors $K \subset \displaystyle\bigcup_{a \in K} B(a, r_a)$; les parties $B(a, r_a)$ étant ouvertes, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots a_k \in K$ tels que :

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(a_i, r_{a_i})$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $f_{a_i}^2$ est élément de I, comme produit de $f_{a_i} \in \mathcal{A}$ par $f_{a_i} \in I$, donc

$$f = \sum_{i=1}^{k} f_{a_i}^2 \in I.$$

Pour tout $x \in K$, il existe i tel que $x \in B(a_i, r_{a_i})$, donc $f(x) \geq f_{a_i}^2(x) > 0$. Ainsi, f ne s'annule pas sur K et $\mathbf{1} = \dfrac{1}{f} f \in I$ car $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{A}$ et $f \in I$. L'idéal I contient donc l'élément unité de $\mathcal{A}$, donc $I = \mathcal{A}$: c'est absurde.

Tout idéal maximal est donc de la forme I_a pour un certain $a \in K$.

57) Soit A un fermé de $K \times F$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $p(A)$ qui converge vers $y \in F$. Il existe donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K telle que $(x_n, y_n) \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme K est compact, il existe une extractrice φ et un élément $x \in K$ tels que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. On en déduit que $(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (x, y)$. Comme A est fermée, $(x, y) \in A$ et $y \in p(A)$: ceci prouve que $p(A)$ est stable par limite, donc fermé.

Soit $f : K \longrightarrow F$ et supposons que son graphe G est fermé. Nous allons montrer que f est continue en montrant que pour toute partie fermée B de F, $f^{-1}(B)$ est une partie fermée de K, c'est-à-dire de E car K est compact donc fermé. Soit donc B un fermé de F. On a :

$$f^{-1}(B) = \{x \in K,\ f(x) \in B\} = \{x \in K,\ \exists y \in B,\ y = f(x)\} = p\left((K \times B) \cap G\right)$$

Comme K et B sont fermés, $K \times B$ est un fermé de $E \times F$, puis $(K \times B) \cap G$ est un fermé de $E \times F$, comme intersection de deux fermés. On déduit de la propriété précédente que $f^{-1}(B)$ est fermé.

Soit $f : K \longrightarrow F$ continue. Si $\big((x_n, y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de G qui converge vers (x, y), on a :

- $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ avec $x_n \in K$ pour tout n, donc $x \in K$ car K est fermé ;
- $f(x_n) = y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$ donc $y = f(x)$ par continuité de f en x.

On en déduit que $(x, y) \in G$: G est stable par limite, donc fermé.

58) C est compact car c'est l'image du compact $[0, 1] \times A \times B$ par l'application continue $(t, a, b) \longmapsto (1 - t)a + tb$.

59) a) Travaillons par contraposée en supposant que K est compact, avec :

$$\forall r > 0, \exists x \in K,\ \forall \lambda \in \Lambda\ /\ \mathrm{B}(x, r) \cap K \not\subset O_\lambda.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, avec $r = 1/n$, on peut donc définir $x_n \in K$ tel que :

$$\forall \lambda \in \Lambda,\ \mathrm{B}(x_n, 1/n) \cap K \not\subset O_\lambda \qquad (1)$$

$(x_n)_{n\geq 1}$ étant une suite du compact K, il existe $x \in K$ et une extractrice φ telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.

Pour $\lambda \in \Lambda$ fixé, la propriété (1) prouve qu'il existe $(y_n)_{n\geq 1} \in K^{\mathbb{N}^*}$ telle que

$$\forall n \geq 1,\ \|y_n - x_n\| < \frac{1}{n} \text{ et } y_n \notin O_\lambda$$

On en déduit que $y_{\varphi(n)}$ converge vers x et que $x \notin O_\lambda$ (car $E \setminus O_\lambda$ est fermé, donc stable par limite). Nous avons ainsi montré qu'il existait un élément x de K n'appartenant à aucun O_λ, i.e. que $K \not\subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$.

b) Le but de la question a) est de remplacer la famille $(O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ par une famille d'ouverts plus simples : on fixe $r > 0$ donné par le a) et K est trivialement recouvert par la famille de boules $(B(x, r))_{x\in K}$; nous allons montrer qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots, x_k \in K$ tels que K soit recouvert par $B(x_1, r) \cup \cdots \cup B(x_k, r)$. Si ça n'était pas le cas, on pourrait construire par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \geq 1,\ x_n \notin \bigcup_{k=0}^{n-1} B(x_k, r).$$

Ainsi, on aurait :

$$\forall n, k \in \mathbb{N},\ n \neq k \Longrightarrow d(x_n, x_k) \geq r$$

et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'aurait pas de valeur d'adhérence : absurde car K est compact.

Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots, x_k \in K$ tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^k B(x_i, r)$. Pour chaque i, il existe ensuite, par définition de r, un $\lambda_i \in \Lambda$ tel que $B(x_i, r) \cap K \subset O_{\lambda_i}$, ce qui donne :

$$K \subset \bigcup_{i=1}^k B(x_i, r) \cap K \subset \bigcup_{i=1}^k O_{\lambda_i}.$$

c) Supposons que K ne soit pas compact. Il existe alors une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de K ne possédant aucune valeur d'adhérence dans K. Cela s'écrit :

$$\forall y \in K,\ \exists \varepsilon_y > 0,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \geq p,\ \|x_n - y\| \geq \varepsilon_y$$

La partie K est alors recouverte par l'union des boules $B(y, \varepsilon_y)$, pour y décrivant K. Si $k \in \mathbb{N}$ et $y_1, \dots, y_k \in K$, on a :

$$\forall n \geq \max(p_{y_1}, p_{y_2}, \dots, p_{y_k}),\ x_n \notin \bigcup_{i=1}^k B(y_i, \varepsilon_{y_i})$$

donc $K \not\subset \bigcup_{i=1}^k B(y_i, \varepsilon_{y_i})$.

Nous avons ainsi démontré que K est une partie compacte de E si et seulement si de tout recouvrement de K par une famille d'ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini. Cette propriété est la "bonne" définition topologique des espaces compacts.

60) a) L'application $\varphi : x \longmapsto d(x, f(x))$ est continue sur le compact K, donc elle est bornée et atteint ses bornes : il existe $a \in K$ tel que :

$$\forall x \in K,\ d(a, f(a) \leq d(x, f(x)).$$

On a alors, avec M rapport de Lipschitz de f :

$$0 \leq \varphi(a) \leq \varphi(f(a)) = d(f(a), f(f(a))) \leq M\, d(a, f(a)) = M\, \varphi(a)$$

ce qui impose $\varphi(a) = 0$ car $0 \leq M < 1$: a est un point fixe de f. Ce point fixe est unique : si $b \in K$ vérifie $f(b) = b$, on a $d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq M\, d(a, b)$, d'où $d(a, b) = 0$.

b) Soit $a \in K$. Comme K est convexe, l'application $f_n :\ x \longmapsto \dfrac{1}{n} a + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) f(x)$ est définie sur K et à valeurs dans K. Cette application est contractante, de rapport $1 - \dfrac{1}{n}$. On déduit du a) qu'elle admet un et un seul point fixe b_n. Comme K est compact, il existe une extractrice φ et $b \in K$ telle $b_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$. On a alors :

$$\frac{1}{\varphi(n)} a + \left(1 - \frac{1}{\varphi(n)}\right) f(b_{\varphi(n)}) = b_{\varphi(n)}$$

et nous obtenons $f(b) = b$ en faisant tendre n vers l'infini : f possède un point fixe.

61) a) Il existe une suite $(y_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de F telle que $d(x, y_n)$ converge vers $d(x, F)$. Comme $(y_n)_{n\geq 0}$ est une suite bornée (car $\|y_n\| \leq d(y_n, x) + \|x\|$) de l'espace vectoriel normé F qui est de dimension finie, on peut en extraire une sous-suite $(y_{\varphi(n)})$ qui converge vers un élément y de F : on a alors $d(x, y_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} d(x, y)$, d'où $d(x, y) = d(x, F)$.

b) Notons $x_0 = \dfrac{x-y}{\|x-y\|}$. Pour tout $z \in F$, $d\left(x_0, z\right) = \dfrac{||x-y-\|x-y\|z||}{\|x-y\|} \geq \dfrac{d(x,F)}{\|x-y\|} = 1$ car $y + \|x-y\|z \in F$. On en déduit que $d(x_0, F) \geq 1$. D'autre part, $0 \in F$, donc $d(x_0, F) \leq (x_0, 0) = \|x_0\| = 1$. On a donc $d(x_0, F) = 1$.

c) Nous avons démontré que pour tout sous-espace vectoriel de dimension finie F, il existe $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| = 1$ et $d(x_0, F) = 1$. Comme E est de dimension infinie, nous pouvons donc construire par récurrence une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de vecteurs unitaires de E telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ d\left(x_n, \mathrm{Vect}(x_0, \ldots, x_{n-1})\right) = 1.$$

La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est alors une suite de la boule unité fermée de E qui n'a pas de valeur d'adhérence, puisque pour tous entiers distincts n et m, $d(x_n, x_m) \geq 1$. Ceci prouve que la boule unité fermée de E n'est pas compacte.

62) L'hypothèse prouve que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers l'infini, c'est-à-dire que pour tout M, il existe $A > 0$ tel que :

$$\forall x \in E,\ ||x|| > A \Longrightarrow f(x) \geq M \qquad (1)$$

En effet, il suffit de choisir $A = R$ si $M \leq 0$ et $A = \max\left(R, \dfrac{M}{c}\right)$ si $M > 0$.

L'idée consiste à se ramener à un compact non vide K tel que le minimum de f sur K (qui existe car f est continue et K compact non vide) soit le minimum de f sur E. Il suffit pour cela que l'on ait $\forall x \in E,\ f(x) \geq \min_{y\in K} f(y)$. L'idée naturelle consiste à choisir M et à poser $K = \overline{B(0,A)}$ où A est la valeur associée à M par la propriété (1). Dans cette situation, on aura :

$$\forall x \in E \setminus K,\ f(x) \geq M$$

et il suffit de choisir M tel que $M \geq \min_{y\in K} f(y)$. Comme $K = \overline{B(0,A)}$ dépend de M, on n'a pas trop de choix et on pense à choisir $M = f(0)$ car 0 est le seul élément qui est à coup sûr dans $\overline{B(0,A)}$.

Nous pouvons maintenant écrire la preuve complète :

- si $f(0) \leq 0$, on pose $K = \overline{B(0,R)}$. Comme K est compact (E est de dimension finie), f atteint un minimum sur K en un point $x_0 \in K$. On a ensuite :

  $$\forall x \in E,\ \begin{cases} \text{si } x \notin K,\ f(x) > ||x|| \geq 0 \geq f(0) \geq f(x_0) \\ \text{sinon, } x \in K \text{ et } \ f(x) \geq f(x_0) \end{cases}$$

  donc $f(x_0)$ est aussi le minimum de f sur E.

- si $f(0) > 0$, on pose $A = \max\left(R, \dfrac{f(0)}{c}\right)$ et$K = \overline{B(0,A)}$. f atteint son minimum sur K en un point $x_0 \in K$ et on a :

  $$\forall x \in E,\ \begin{cases} \text{si } x \notin K,\ f(x) > c\,||x|| \geq f(0) \geq f(x_0) \\ \text{sinon, } x \in K \text{ et } f(x) \geq f(x_0) \end{cases}$$

  donc $f(x_0)$ est aussi le minimum de f sur E.

Exercices Mines-Centrale: connexité

63) a) (1) $\Longrightarrow$ (2) : soit B une partie à la fois ouverte et fermée de A. Il existe alors deux ouverts O_1 et O_2 de E tels que $B = A \cap O_1$ et $A \setminus B = A \cap O_2$. $A \cap O_1$ et $A \cap O_2$ sont donc disjoints et recouvrent A, donc l'un des deux est vide, i.e. soit $B = \emptyset$, soit $B = A$: les parties $\emptyset$ et A sont les seules parties à la fois ouvertes et fermées de A.

(2) $\Longrightarrow$ (3) : si $f:\ A \to \{0,1\}$ est continue, $B = f^{-1}(0) = f^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un fermé et un ouvert de A (car f est continue, $\{0\}$ est fermé et $\mathbb{R}^*$ est ouvert) : on a donc soit $B = \emptyset$ et $f = 1$, soit $B = A$ et $f = 0$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) : soient O_1 et O_2 deux ouverts de E tels que $A \cap O_1$ et $A \cap O_2$ soient disjoints et recouvrent A. On peut définir $f:\ A \longmapsto \{0,1\}$ en posant $f(x) = 0$ si $x \in O_1$ et $f(x) = 1$ si $x \in O_2$. Comme O_1 et O_2 sont ouverts, f est continue. En effet, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ avec $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $x \in A$, alors :

- si $x \in O_1$, $x_n \in O_1$ pour n assez grand et $f(x_n)$ stationne à la valeur $f(x)$;
- si $x \in O_2$, $x_n \in O_2$ pour n assez grand et $f(x_n)$ stationne à la valeur $f(x)$;

donc $f(x_n)$ converge vers $f(x)$. Par hypothèse, $f = 0$ ou $f = 1$, soit $A \cap O_2 = \emptyset$ ou $A \cap O_1 = \emptyset$.

b) Soit A une partie connexe par arcs et $f : A \longmapsto \{0,1\}$ continue. Si $x, y \in A$, il existe une application continue $\gamma : [0,1] \to A$ telle que $g(0) = x$ et $g(1) = y$. L'application $g \circ f$ est alors continue de $[0,1]$ dans $\{0,1\}$, donc elle est constante (sinon, avec le théorème des valeurs intermédiaire, il existerait $t \in [0,1]$ tel que $g \circ f(t) = 1/2$). On en déduit que $f(x) = f(g(0)) = f(g(1)) = f(y)$ et f est constante. Nous avons donc démontré que A était connexe.

c) Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie connexe de E et $\varphi : A \longrightarrow F$ une application continue. Si f est une application continue de $\varphi(A)$ dans $\{0,1\}$, l'application $f \circ \varphi$ est continue de A dans $\{0,1\}$, donc constante, ce qui prouve que f est également constante et que $\varphi(A)$ est connexe.

d) Soit $f : B \longmapsto \{0,1\}$ continue. La restriction de f à A est alors continue, donc constante. Comme f est constante sur A, elle l'est sur B car $B \subset \overline{A}$ et B est connexe.

L'idée consiste à choisir une partie A connexe par arcs telle que $\overline{A}$ ne soit pas connexe par arcs. On pose :

$$A = \{(x, \sin(1/x)),\ x > 0\}$$

A est connexe par arc mais $\overline{A} = A \cup \{(0,y), -1 \leq y \leq 1\}$ ne l'est pas. En effet, le point $(0,0)$ ne peut pas être relié continument à un point $(a, \sin(1/a))$ avec $a > 0$ par un arc (continu) γ tracé sur $\overline{A}$.

e) On peut par exemple choisir $A_n = \{(0,y),\ y \geq 0\} \cup \{(1,y),\ y \geq 0\} \cup \{(x,y),\ 0 \leq x \leq 1 \text{ et } y \geq n\}$: chaque A_n est connexe par arcs, donc connexe, la suite $(A_n)_{n \geq 0}$ est décroissante mais $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{(0,y),\ y \geq 0\} \cup \{(1,y),\ y \geq 0\}$ n'est pas connexe (l'application f définie sur A par $f(0,y) = 0$ et $f(1,y) = 1$ est continue et non constante).

f) Si f était un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$, la partie $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ serait isomorphe à $B = \mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$, ce qui est absurde car A est connexe mais B ne l'est pas.

g) Il suffit de choisir une droite et un intervalle ouvert : $A = \{(x,0),\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$ et $B = \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\}$ sont homéomorphes ($(x,0) \longmapsto (\tan x, 0)$ est un homéomorphisme de A sur B), mais $\mathbb{R}^2 \setminus A$ est connexe par arc alors que $\mathbb{R}^2 \setminus B$ a deux composantes connexes.

64) Si Γ ne rencontre par la frontière de A, alors $\Gamma \cap \mathring{A}$ et $\Gamma \cap \mathrm{Ext}(A)$ est une partition de Γ en deux ouverts de Γ : on en déduit que soit Γ ne rencontre pas $\mathring{A}$, soit Γ ne encontre pas $\mathrm{Ext}(A)$: le résultat est donc démontré par contraposée.

65) a) $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence :

- Réflexivité : pour $x \in A$, $\gamma : t \longmapsto x$ est continue et à valeur dans A.
- Symétrie : si $x \mathcal{R} y$, avec γ vérifiant les conditions imposées, alors $\widetilde{\gamma} : t \longmapsto \gamma(1-t)$ montre que $y \mathcal{R} x$.
- Transitivité : si $x \mathcal{R} y \mathcal{R} z$, avec γ_1, γ_2 continues de $[0,1]$ dans A telles que $\gamma_1(0) = x$, $\gamma_0(1) = \gamma_2(0) = y$ et $\gamma_2(1) = z$, l'application

  $$\gamma : t \longmapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_2(1-2t) & \text{si } 1/2 < t \leq 1 \end{cases}$$

  prouve que $x \mathcal{R} z$.

b) Soit $x \in A$ et C_x la classe d'équivalence de x. Si $y \in C_x$, associée à γ, on a $\gamma(t) \in C_x$ pour tout $t \in [0,1]$ (l'application $\delta : s \longmapsto \gamma(st)$ est continue, à valeur dans A avec $\delta(0) = x$ et $\delta(1) : \gamma(t)$). Tout point y de C_x peut donc être relier continument à x par un chemin tracé dans C_x : on peut donc également relier deux points y et z de C_x en passant par x : C_x est connexe par arcs.

Soit C une partie connexe par arcs telle que $C_x \subset C \subset A$. Si $y \in C$, il existe un chemin reliant x à y tracé dans C, donc dans A : ceci prouve que $y \in C_x$. C_x est ainsi maximale parmi les parties connexes par arcs contenues dans A.

66) Si $x \in O$, sa composante connexe par arcs est l'ensemble

$$C_x = \{y \in O,\ \exists\gamma :\ [0,1] \to O \text{ continue avec } \gamma(0) = x \text{ et } \gamma(1) = y\}.$$

Si $y \in C_x$, il existe $r > 0$ tel que $B(y,r) \subset O$: on en déduit que $B(y,r) \subset C_x$ (tout point de $B(y,r)$ peut être relié à x par un chemin tracé dans O, en prolongeant l'arc reliant x à y par un segment). Cela prouve que C_x est une partie ouverte.

Pour chaque composante connexe par arcs C, on peut donc choisir un point $x \in C$ tel que $x \in \mathbb{Q}^n$ (car $\mathbb{Q}^n$) est dense dans $\mathbb{R}^n$. Il existe donc une application injective de l'ensemble des composantes connexes par arcs de O dans $\mathbb{Q}^n$. Comme $\mathbb{Q}^n$ est dénombrable, O a au plus un nombre dénombrable de composantes connexes par arcs.

Si O est un ouvert, ses composantes connexes par arcs sont des intervalles ouverts disjoints, en quantité au plus dénombrable. Tout ouvert O de $\mathbb{R}$ s'écrit donc

$$O = \bigcup_{n\in N}]a_n, b_n[$$

où N est soit égal à $\mathbb{N}$, soit de la forme $\{1, 2, \ldots, n\}$ et où les $]a_n, b_n[$ sont des intervalles deux à deux disjoints.

67) Soit $f :\ A \cup B \to \{0, 1\}$ continue. Comme A et B sont connexes, f est constante sur A, égale à a, et constante sur B, égale à b. Il existe $x \in \overline{A} \cap B$: il existe alors une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers x. Comme f est continue, $a = f(x_n)$ tend vers $f(x)$, soit $b = f(x) = a$. f est donc constante sur $A \cup B$ et $A \cup B$ est connexe.

68) S'il existait un homéomorphisme f de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^n$, les espaces $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $B = \mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ seraient homéomorphes, ce qui est absurde car A n'est pas connexe par arc alors que B l'est.

69) X est connexe par arc car il est étoilé par rapport au point 0, i.e. que pour tout $f \in X$, le segment $[0, f]$ est contenu dans X. En effet, si $f \in X$ et si $t \in [0, 1]$, $tf \in X$ car si $t = 0$, $\mathrm{Ker}\,(tf) = \mathbb{R}^n \not\subset \{0\} = \mathrm{Im}\,(tf)$ et si $t \neq 0$, $\mathrm{Ker}\,(tf) = \mathrm{Ker}\,(f) \not\subset \mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(tf)$.

70) Si A est vide, B est vide : il est connexe par arcs. Sinon, fixons $a \in A$. Nous allons montrer que pour tout $b \in B$, il existe $\gamma_b : [0, 1] \to B$ continue telle que $\gamma_b(0) = a$ et $\gamma_b(1) = b$. Ceci prouvera que B est connexe par arcs. En effet, pour $b_1, b_2 \in B$, l'application $\gamma :\ [0, 1] \to B$ défini par :

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_{b_1}(1 - 2t) & \text{si } 0 \le t \le 1/2 \\ \gamma_{b_2}(2t - 1) & \text{si } 1/2 < t \le 1 \end{cases}$$

est continue (les deux courbes se raccordent par continuité en 1/2 car $\gamma_{b_1}(0) = a = \gamma_{b_2(0)}$), à valeurs dans B avec $\gamma(0) = b_1$ et $\gamma(1) = b_2$.

Soit $b \in overline A$; il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A telle que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$. L'idée consiste à relier $a = a_0$ à a_1, a_1 à a_2, et plus généralement a_n à a_{n+1} par des segments qui, mis bout à bout, permettront de relier a à b. On pose par exemple $t_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+1} = t_n + \frac{1}{2^{n+1}}$ (de sorte que t_n croit strictement vers 1) et on définit γ par :

$$\forall t \in [0, 1],\ \gamma(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n}\right) a_n + \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n}\, a_{n+1} & \text{si } t \in [0, 1[\text{ avec } t_n \le t < t_{n+1} \\ b & sit{=}1 \end{cases}.$$

- Comme A est convexe, $\gamma(t) \in A \subset B$ pour tout $t \in [0, 1[$ et $\gamma(1) = b \in B$, donc γ est à valeurs dans B ;
- γ est continue sur $[0, 1[$ (on a bien fait des raccordement par continuité en les t_n) ;
- pour $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $x_n \in B(b, \varepsilon)$ pour tout $n \ge n_0$; on a alors $[a_n, a_{n+1}] \subset B(b, \varepsilon)$ pour tout $n \ge n_0$ (la boule est convexe), soit $\gamma(t) \in B(b, \varepsilon)$ pour tout $t \in]t_{n_0}, 1]$: γ est donc également continue en 1.

71) Soit $a = f(0)$ et $A = f^{-1}(\{a\})$. Il existe $r \geq 0$ tel que $A \subset \overline{B(0,r)}$.

Comme $C = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(0,r)}$ est connexe par arcs, son image par f l'est également (f est continue). Comme f ne prend pas la valeur a sur C, on en déduit que $f(C)$ est contenu soit dans $]-\infty, a[$, soit dans $]a, +\infty[$.

Comme $\overline{B(0,r)}$ est fermé borné, il est compact et non vide : f atteint donc ses bornes m et M sur $\overline{B(0,r)}$ en deux points x_m et x_M.

- si $f(C) \subset]-\infty, a[$, pour tout $x \in C$, $f(x) < a = f(0) \leq M = f(x_M)$ et pour tout $x \in \overline{B(0,r)}$, $f(x) \leq M = f(x_M)$, donc f atteint un maximum global en x_M ;

- sinon, $f(C) \subset]a, +\infty[$, et pour tout $x \in C$, $f(x) > a = f(0) \geq m = f(x_m)$ et pour tout $x \in \overline{B(0,r)}$, $f(x) \geq m = f(x_m)$, donc f atteint un minimum global en x_m.

Remarque : le résultat ne subsiste pas quand $n = 1$ (l'application $x \longmapsto x$ est un contre-exemple évident).

72) a) Si φ est continue, H est fermé, comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue φ. Réciproquement, si H est fermé et si on fixe $a \notin H$, a n'est pas adhérent à H, donc $r = d(a, H) > 0$. Si $x \in E \setminus H$, on peut écrire $x = h + \lambda a$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On a alors :

$$\left\| \frac{1}{\lambda} x \right\| = d\left(a, -\frac{1}{\lambda} h\right) \geq r$$

et donc

$$|\varphi(x)| = |\lambda \varphi(a)| \leq \frac{|\varphi(a)|}{r} \|x\|.$$

Cette inégalité est également vérifiée pour $x \in H$: φ est continue (elle est lipchitzienne de rapport $\dfrac{|\varphi(a)|}{r}$).

b) Supposons que H est fermé. Comme φ est continue et que $\varphi(E \setminus H) = \mathbb{R}^*$ n'est pas connexe par arcs, $E \setminus H$ ne l'est pas non plus.

Supposons maintenant que H n'est pas fermé. Posons $E^+ = \{x \in E,\ \varphi(x) > 0\}$ et $E^- = \{x \in E,\ \varphi(x) < 0\}$. Ces deux parties sont convexes, donc connexes par arcs. Pour montrer que $E \setminus H = E^+ \cup E^-$ est connexe par arcs, il suffit donc de démontrer que pour un élément $a \in E^+$, il existe un chemin contenu dans $E^+ \cup E^-$ permettant de relier $a \in E^+$ à $-a \in E^-$. Fixons donc a tel que $\varphi(a) = 1$. L'hyperplan affine $\mathcal{H} = \varphi^{-1}(\{1\}) = a + H$ est également dense dans E, donc il existe une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{H}$ qui converge vers $-a$, avec $x_0 = a$. On va mettre "bout à bout" les segments $[x_k, x_{k+1}]$ pour former un chemin continu de $-a$ à a. On définit $\gamma :\ [0,1] \longrightarrow E$ en posant :

- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, γ est affine sur $I_k = \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$;

- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\gamma(1/k) = x_k$;

- $\gamma(0) = -a$.

L'application γ est alors continue sur chaque I_k, donc sur $]0,1]$, et elle est continue en 0 car x_k converge vers $-a$ quand k tend vers l'infini : pour $\varepsilon > 0$, il existe $k_0 \geq 1$ tel que $\|x_k + a\| < \varepsilon$ pour $k \geq k_0$. Si $t \in]0, 1/k_0]$, il existe $k \geq k_0$ tel que $t \in [1/(k+1), 1/k]$ et $\gamma(t) \in [x_{k+1}, x_k] \subset B(-a, \varepsilon)$ (la boule ouverte est convexe) : on a donc $\|\gamma(t) - \gamma(0)\| < \varepsilon$ pour $t \in [0, 1/k_0[$.

D'autre part, on a $\gamma(]0,1]) = \bigcup_{k \geq 1} [x_{k+1}, x_k] \subset \mathcal{H}$ ($\mathcal{H}$ est une partie convexe). Comme $\varphi(0) = -a \in E^-$, on a bien construit $\gamma :\ [0,1] \longmapsto E \setminus H$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = -a$.

73) a) Notons $\mathbb{C} = R^2 \setminus \{b\}$ est connexe par arc, donc son image par f l'est également (f est continue) : c'est donc un intervalle. Comme $a \notin f(C)$, on a soit $f(C) \subset]a, +\infty[$, soit $f(C) \subset]-\infty, a[$, donc f atteint soit un minimum global, soit un maximum global en b.

b) L'idée consiste à trouver un compact non vide K tel qu'un des deux extrema de f sur K soit aussi un extremum sur $\mathbb{R}^2$. Il suffit pour cela de choisir $r > 0$ tel que $f^{-1}(\{a\}) \subset \overline{B(0,r)} = K$ ($f^{-1}(\{a\})$ est compacte, donc bornée). Comme $f^{-1}(\{a\})$ est non vide, on a $m = \min_{x\in\mathbb{K}} f(x) \leq a \leq \max_{x\in K} f(x) = M$.

Comme dans le a), $C = \mathbb{R}^2 \setminus K$ est connexe par arc, donc $f(C)$ est un intervalle ne contenant pas a. Si $f(C) \subset]a, +\infty[$, on a $m \leq a \leq f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}2$ et m est le minimum global de f ; sinon, $f(C) \subset]-\infty, a[$ et M est le maximum global de f.

c) Il faut comprendre le mot « limite » au sens généralisé « limite finie ou infinie »(la fonction $f :\ (a, b) \longmapsto a^2 + b^2$ vérifie les hypothèses demandées et tend vers $+\infty$ quand $\|(a, b)\|$ tend vers $+\infty$).

Nous utilisons les définitions généralisées suivantes :

- $f(x)$ tend vers $\lambda \in \mathbb{R}$ quand $\|x\|$ tend vers l'infini si
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists r > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^2,\ \|x\| \geq r \Longrightarrow |f(x) - \lambda| \leq \varepsilon$$
- $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers l'infini si
$$\forall a,\ \exists r > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^2,\ \|x\| \geq r \Longrightarrow f(x) \geq a$$
- $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand $\|x\|$ tend vers l'infini si
$$\forall a,\ \exists r > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^2,\ \|x\| \geq r \Longrightarrow f(x) \leq a$$
- une valeur $\lambda \in [-\infty, +\infty]$ est valeur d'adhérence de f au voisinage de l'infini s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ telle que $\|x_n\|$ tend vers $+\infty$ et $f(x_n)$ tend vers λ quand n tend vers $+\infty$.

On montre facilement les propriétés :

- toute fonction $f :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admet une valeur d'adhérence dans $[-\infty, +\infty]$: en fixant $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^2$ qui tend vers l'infini, la suite réelle $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence dans $[-\infty, +\infty]$: cette valeur est une valeur d'adhérence de f ;
- $f(x)$ tend vers $\lambda \in [-\infty, / + \infty]$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers l'infini, $f(x_n)$ tend vers λ ;
- $f(x)$ a une limite quand x tend vers l'infini si et seulement si f possède une unique valeur d'adhérence.

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat par contraposée : supposons que f est continue et n'admet pas de limite à l'infini. Elle possède alors deux valeurs d'adhérence distinctes $\alpha < \beta$, associées à deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et (y_n) qui tendent vers l'infini. Posons $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$ et montrons que $f^{-1}(\{\gamma\})$ n'est pas borné (donc pas compact). Comme les limites de $f(x_n)$ et de $g(x_n)$ sont respectivement strictement inférieure et strictement supérieure à γ, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1,\ f(x_n) < \gamma < f(y_n)$.

Pour $r > 0$, il existe ensuite $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_2,\ \|x_n\| \geq r$ et $\|y_n\| \geq r$. En choisissant $n = \max(n_1, n_2)$,nous avons donc $f(x_n) < \gamma < f(y_n)$ et $x_n, y_n \in \mathbb{R}^2 \setminus B(0, r) = C$. Comme C est connexe par arcs, $f(C)$ est un intervalle ; comme il contient $f(x_n)$ et $f(y_n)$, il contient γ : nous avons donc montré :
$$\forall r > 0,\ \exists x \in \mathbb{R}^2,\ \|x\| \geq r \text{ et } f(x) = \gamma$$
ce qui traduit bien que $f^{-1}(\{\gamma\})$ n'est pas borné.

Exercices X-ENS

74) a) Notons $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$, avec $a_n \neq 0$. On a, pour z non nul :
$$\frac{|P(z)|}{|z|} \geq |a_n||z|^{n-1} - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\,|z|^{i-n}.$$

Comme $n-1 \geq 1$, $|a_n|\rho^{n-1} - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\,\rho^{i-n}$ tend vers $+\infty$ quand ρ tend vers $+\infty$ et il existe $R > 0$ tel que $|P(z)| \geq 2\,|z|$ pour $|z| > R$.

b) La condition est trivialement suffisante. Réciproquement, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|P_n(z)| > R$, on a par récurrence immédiate :

$$\forall k \geq n,\ |P_{n+k}(z)| > 2^k R \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$$

donc $z \notin K$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, $K_n = \{z \in \mathbb{C},\ |P_n(z)| \leq R\}$ est fermé, comme image réciproque du fermé $[0, R]$ par l'application continue $z \longmapsto |P_n(z)l$. K est donc fermé, comme intersection des fermés K_n. On a également $K \subset K_0 = \{z,\ |z| \leq R\}$, donc K est borné : c'est donc un compact de $\mathbb{C}$.

Le polynôme $P - X$ a au moins une racine complexe α et $\alpha \in K$, puisque $P_n(\alpha) = \alpha$ pour tout n : K est donc non vide.

Cette définition de K comme intersection décroissante de la suite de compacts K_n permet de tracer K

- on calcule R et on travaille dans un rectangle contenant $K_0 = \overline{B(0, R)}$;
- on fixe un entier N et, pour chaque z (discret) du rectangle, on calcule le plus petit entier $n(z) \leq N$ tel que $|P_{n(z)}(z)| > R$ (avec $n(z) = N + 1$ si cette condition n'est vérifiée par aucun $n \in \{0, \dots, N\}$).
- on affiche chaque point z du rectangle avec une couleur fonction de $n(z)$.

On trouvera des exemples de ce type de tracé sur la page `https://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Julia`.

d) Notons U_n l'ouvert $\mathbb{C} \setminus K_n$. Comme $\mathbb{C} \setminus K$ est l'intersection de la suite croissante $(U_n)_{n\geq 0}$, il suffit de montrer que chaque U_n est connexe par arc. U_0 est clairement connexe par arcs, comme complémentaire d'une boule fermée. Fixons donc $n \geq 1$ et posons $Q = P_n$. Il s'agit de montrer que $U = \{z \in \mathbb{C},\ |Q(z)| > R\}$ est connexe par arcs. Pour $a \in U$, on note C_a la composante connexe par arc de U définie par :

$$C_a = \{z \in U,\ \exists\ \gamma :\ [0,1] \longrightarrow U \text{ continue telle que } \gamma(0) = a \text{ et } \gamma(1) = z\}.$$

Nous allons montrons que chaque composante C_a est non bornée. Si ce n'était pas le cas, $H = \overline{C_a}$ serait compact, car fermé borné. Notons $M = \max_{z\in H}|Q(z)|$. Comme Q n'est pas constant, M est atteint en un point z_0 de la frontière de H (c'est le principe du maximum, dont la preuve est donnée plus bas). Si z_0 était élément de U, il existerait $r > 0$ tel que $B(z_0, r) \subset U$; cette boule contiendrait un élément $b \in C_a$ et la boule $B(z_0, r)$ serait alors contenue dans C_a, puisque tout élément z de $B(z_0, r)$ pourrait être relié à a par un chemin contenu dans U en raccordant le segment $[z, b]$ à un chemin reliant b à a. On a donc $z_0 \notin U$, i.e. $|Q(z_0)| \leq R$, ce qui est absurde car $|Q(z_0)| \geq |Q(a)| > R$.

Nous pouvons maintenant démontrer que U est connexe par arcs : si a et b sont deux éléments de U, il existe $a' \in C_a$ et $b' \in C_b$ tels que $a', b' \in U_0$. Comme U_0 est une partie de U connexe par arcs, il existe un chemin de a à b contenu dans U (on peut aussi dire que les composantes connexes par arcs de a et b ont tous les points de U_0 en commun : elles sont donc égales et U a une unique composante connexe).

Principe du maximum pour un polynôme : si H est un compact non vide de $\mathbb{C}$ et si P est un polynôme non constant, le maximum de $|P(z)|$ pour $z \in H$ est atteint en un point de la frontière de H.

Supposons que le maximum est atteint en $z_0 \in \mathrm{Int}(H)$. Nous pouvons écrire $P(z) = a_0 + \sum_{k=v}^{d} a_k(z - z_0)^k$ avec $1 \leq v \leq d$, $a_v \neq 0$. Si $a_0 = 0$, P est nul sur H et le maximum est atteint en tout point de la frontière de H (cette frontière est non vide, car H est fermé et non ouvert, puisque les seuls parties fermées et ouvertes sont $\mathbb{C}$ et $\emptyset$). Sinon, posons $b_k = \dfrac{a_k}{a_0}$ pour $k \in \{v, \dots, d\}$ et $b_v = r_0 e^{i\theta_0}$ avec $r_0 > 0$.

Fixons $R > 0$ tel que $B(z_0, R) \subset H$. Nous avons, pour tout $r \in]0, R[$:

$$\frac{|Q(z_0 + re^{-i\theta_0/v})|}{|Q(z_0)|} = \left|1 + r_0 r^v + \sum_{k=v+1}^{d} b_k r^k e^{-i\theta_0 k/v}\right| \geq 1 + r_0 r^v - \underbrace{\left|\sum_{k=v+1}^{d} b_k r^k e^{-i\theta_0 k/v}\right|}_{=O(r^{v+1})=o(r^v)}$$

donc pour r assez proche de 0, $r_0 r^v - \left|\sum_{k=v+1}^{d} b_k r^k e^{-i\theta_0 k/v}\right| > 0$ et $|Q(z_0 + re^{-i\theta_0/v})| > |Q(z_0)|$: c'est absurde.

75) a) D'après la propriété de Bolzano-Weierstraß, il existe une extractrice φ_0 telle que la sous-suite $(x_0(\varphi_0(n)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ_0. La suite $(x_1(\varphi_0(n)))_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, il existe une nouvelle extractrice φ_1 telle que $(x_1(\varphi_0(\varphi_1(n))))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ_1. Par récurrence, on construit une suite d'extractrice $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et une suite réelle $(\ell_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ x_k(\varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_k(n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_k.$$

On ne peut évidemment pas extraire une infinité de fois une sous-suite, car il ne restera en général pas un nombre infini d'indices. Plus précisément, si on voit l'extraction d'une sous-suite comme le choix d'une partie infinie de $\mathbb{N}$ (φ est entièrement déterminée par $\varphi(\mathbb{N})$), les extractions successives reviennent à passer de $\mathbb{N}$ à $\varphi_0(\mathbb{N})$, puis à $\varphi_0 \circ \varphi_1(\mathbb{N})$, $\varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \varphi_2(\mathbb{N})$, ... et en général, la suite décroissante de ces images peut "tendre" vers l'ensemble vide (ou vers un ensemble fini).

L'astuce consiste à utiliser un procédé diagonal : le premier élément conservé (i.e. $\varphi(0)$) est le premier élément défini par l'extractrice φ_0, i.e. que l'on pose $\varphi(0) = \varphi_0(0)$. Le second élément conservé (i.e. $\varphi(1)$) est le second élément défini par l'extractrice $\varphi_0 \circ \varphi_1$: on pose $\varphi(1) = \varphi_0 \circ \varphi_1(1)$, et ainsi de suite. Ainsi, on définit :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n) \end{array}$$

On a alors :

- φ est strictement croissante : pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

  $$\varphi(n+1) = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n \circ \varphi_{n+1}(n+1) = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(\varphi_{n+1}(n+1))$$

  mais $\varphi_{n+1}(n+1) \geq n+1 > n$ (on prouve (par récurrence sur n) que pour toute application $\psi :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\psi(n) \geq n$) et $\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n$ est strictement croissante, donc :

  $$\varphi(n+1) = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(\varphi_{n+1}(n+1)) > \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n) = \varphi(n)$$

- pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(x_k(\varphi(n)))_{n\geq k}$ est une sous-suite de la suite convergente $(x_k(\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_k(n)))_{n\in\mathbb{N}}$, puisque pour $n \geq k$, on a :

  $$\varphi(n) = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_k \circ \psi$$

  où $\psi :\ \ n \geq k \longmapsto \varphi_{k+1} \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$ est strictement croissante. On en déduit que la suite $(x_k(\varphi(n)))_{n\geq k}$, donc également la suite $(x_k(\varphi(n)))_{n\geq 0}$, converge vers ℓ_k.

b) Supposons que C est un compact. On définit alors la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in C^{\mathbb{N}}$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_k(n) = \begin{cases} \lambda(n) & \text{si } n \leq k \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Comme C est compact, C est borné et il existe M tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{k} \lambda(n)^2 = \|x_k\|^2 \leq M$$

donc $\sum_{n\geq 0} \lambda(n)^2$ converge (série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées).

Réciproquement, supposons que $\sum_{n\geq 0} \lambda(n)^2$ converge et fixons $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in C^{\mathbb{N}}$. Comme chaque suite $(x_k(n))_{n\geq 0}$ est bornée par λ_n, il existe une extractrice φ et une suite $(x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_{\varphi(k)}(n) \xrightarrow[k\to+\infty]{} x(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour n fixé, on a $|x_{\varphi(k)}(n)| \leq \lambda(n)$ pour tout k, donc $|x(n)| \leq \lambda(n)$ par passage à la limite : on en déduit que la suite $x = (x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est élément de C. Il reste à montrer que $x_{\varphi(k)}$ converge vers x dans E muni de $\|\ \|_2$, c'est-à-dire que $\left\|x_{\varphi(k)} - x\right\|_2^2$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini. On a alors, en remarquant que $|x_{\varphi(k)}(n) - x(n)| \leq 2\lambda(n)$:

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall N \in \mathbb{N},\ \left\|x_{\varphi(k)} - x\right\|_2^2 \leq \underbrace{\sum_{n=0}^{N} |x_{\varphi(k)}(n) - x(n)|^2}_{S_N(k)} + 4 \sum_{n=N+1}^{+\infty} \lambda(n)^2.$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \lambda(n)^2 \leq \varepsilon$. Comme chaque $x_{\varphi(k)}(n)$ tend vers $x(n)$, le terme $S_N(k)$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini : il existe donc k_0 tel que $S_N(k) \leq \varepsilon$ pour $k \geq k_0$ et on a :

$$\forall k \geq k_0,\ \left\|x_{\varphi(k)} - x\right\|_2^2 \leq 5\,\varepsilon$$

Nous avons donc construit une sous-suite de (x_k) qui converge vers un élément x de C : C est compact.

76) Soit $f \in A$ tel que $Z \subset Z_f$. Comme $\mathcal{I}$ est fermé, il suffit de démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{I}$ tel que $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$. Soit donc $\varepsilon > 0$. Considérons l'ensemble :

$$H = \left\{x \in K,\ |f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Si H est vide, la fonction $g = 0$ convient. Sinon, pour $x \in H$, x n'est pas élément de Z (car $x \notin Z_f$) : il existe donc un élément g_x de $\mathcal{I}$ tel que $g_x(x) \neq 0$. g_x étant continue, il existe un réel $\eta_x > 0$ tel que g_x ne s'annule sur la partie $B(x,\eta_x) \cap K$. Les parties $B(x,\eta_x)$, pour x décrivant H, forment alors un recouvrement ouvert de H : comme H est une partie compacte (f est continue, donc H est un fermé du compact K), il est possible d'en extraire un sous-recouvrement fini. Il existe ainsi un entier $n \geq 1$ et une famille $x_1, \ldots, x_n$ d'éléments de H tels que

$$H \subset \bigcup_{1\leq i\leq n} B(x_i, \eta_{x_i})$$

La fonction $h = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} g_{x_i}^2$ est alors un élément de $\mathcal{I}$ qui est strictempent positive sur H : comme H est compact et h continue, h atteint son minimum m sur H, qui est donc strictement positif. Considérons la fonction $g = \dfrac{\lambda h}{1+\lambda h}\, f$, où $\lambda = \dfrac{\|f\|_\infty}{\varepsilon\, m}$. Cet élément est solution du problème :

- g est élément de $\mathcal{I}$;
- pour $x \notin H$, $|g(x) - f(x)| \leq |g(x)| + |f(x)| \leq 2\,|f(x)| \leq \varepsilon$;
- pour $x \in H$, $|g(x) - f(x)| = \dfrac{|f(x)|}{\lambda g(x)} \leq \dfrac{\|f\|_\infty}{\lambda\, m} = \varepsilon$.

77) Il reste à montrer que G est stable par inverse, puisque G est déjà une partie non vide du groupe $GL_n(\mathbb{C})$ stable par produit. Soit $A \in G$. Nous voulons démontrer que $A^{-1} \in G$, c'est-à-dire que I_n appartient à l'image de G par l'application $f :\ M \longmapsto AM$. Comme G est compact et f continue, $f(G)$ est compact, donc fermé : nous allons montrer que $I_n \in \overline{f(G)} = f(G)$.

La suite (A^k) est une suite du compact G, donc il existe une extractrice φ et un élément $B \in G \subset GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A^{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} B$. Comme l'application $M \longmapsto M^{-1}$ est continue sur $GL_n(\mathbb{C})$, on a également $A^{-\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} B^{-1}$, puis

$$A^{\varphi(k+1)-\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} I_n$$

Comme $\varphi(k+1) - \varphi(k) \geq 1$, I_n est limite d'une suite d'éléments de $f(G)$ et $I_n \in \overline{f(G)} = f(G)$, ce qui traduit que $A^{-1} \in G$.

Remarque : on peut se passer de l'application f en écrivant que

$$M_k = A^{\varphi(k+1)-\varphi(k)-1} = A^{-1}\, A^{\varphi(k+1)-\varphi(k)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} A^{-1}$$

puis en remarquant que $M_k \in G$ (avec un cas particulier si $\varphi(k+1)-\varphi(k)-1=0$: $I_n \in G$ car I_n est la limite de la suite $\left(A^{\varphi(k+1)-\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \in G^{\mathbb{N}}$, avec G fermé), on a prouvé que A^{-1} était élément de $\overline{G}$, donc de G.

78) Commençons par démontrer la propriété préposée par l'indication. Soit $\varepsilon > 0$ et supposons que n_0 n'existe pas. On a donc :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ \|u_n - a\| \geq \varepsilon \text{ et } \|u_n - b\| \geq \varepsilon.$$

Il existe donc une extractrice φ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|u_{\varphi(n)} - a\| \geq \varepsilon \text{ et } \|u_{\varphi(n)} - b\| \geq \varepsilon.$$

Comme K est compact, on peut extraire une sous-suite convergente de la suite $(u_{\varphi(n)})$: il existe une extractrice ψ et un élément $c \in K$ tel que $u_{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$; on a $\|c-a\| \geq \varepsilon$ et $\|c-b\| \geq \varepsilon$, donc c est une valeur d'adhérence de (u_n) distincte de a et b : c'est absurde.

Soit φ une extractrice telle que $u_{\varphi(n)}$ converge vers a. Comme f est continue en a, $u_{\varphi(n)+1} = f(u_{\varphi(n)})$ converge vers $f(a)$; on en déduit que $f(a) \in \{a, b\}$, puisque (u_n) n'a que deux valeurs d'adhérence.

Supposons que $f(a) = a$ et fixons $\varepsilon > 0$ tel que $B(a,\varepsilon) \cap B(b,\varepsilon) = \emptyset$. Par continuité de f en a, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in K,\ d(x,a) < \eta \Longrightarrow d(f(x),a) < \varepsilon.$$

Posons $\varepsilon_0 = \min(\eta, \varepsilon)$. D'après la propriété démontrée plus haut, il existe n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ u_n \in B(a,\varepsilon_0) \cup B(b,\varepsilon_0).$$

On peut ensuite choisir p tel que $u_p \in B(a,\varepsilon_0)$ et $p \geq n_0$ (on prend p de la forme $\varphi(n)$ pour un n assez grand). On a alors :

$$u_{p+1} \in B(a,\varepsilon) \text{ et } u_{p+1} \in B(a,\varepsilon_0) \cup B(b,\varepsilon_0)$$

donc $u_{p+1} \in B(a,\varepsilon_0)$ car $B(a,\varepsilon) \cap B(b,\varepsilon_0) = \emptyset$. Par récurrence, on a donc $u_k \in B(a,\varepsilon_0)$ pour tout $k \geq p$, donc $u_k \notin B(b,\varepsilon_0)$ pour tout $k \geq p$: ceci contredit que b est une valeur d'adhérence de (u_n). Nous avons donc démontré par l'absurde que $f(a) = b$ (et par symétrie que $f(b) = a$).

Nous pouvons reprendre la preuve précédente : on fixe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a,\varepsilon) \cap B(b,\varepsilon) = \emptyset$ puis on fixe $\eta > 0$ (continuité de f en a et en b) tel que :

$$\forall x \in K,\ \left(d(x,a) < \eta \Longrightarrow d(f(x),b) < \varepsilon\right) \text{ et } \left(d(x,b) < \eta \Longrightarrow d(f(x),a) < \varepsilon\right).$$

Avec $\varepsilon_0 = \min(\eta, \varepsilon)$, il existe n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0,\ u_n \in B(a,\varepsilon_0) \cup B(b,\varepsilon_0).$$

Ainsi, si $n \geq n_0$, on a soit $u_n \in B(a,\varepsilon_0)$ et $u_{n+1} \in B(b,\varepsilon_0)$, soit $u_n \in B(b,\varepsilon_0)$ et $u_{n+1} \in B(a,\varepsilon_0)$. Si on fixe p_0 pair tel que $p_0 \geq n_0$, on peut (quitte à échanger a et b), supposer que $u_{p_0} \in B(a,\varepsilon_0)$. On a alors $u_{p_0+2k} \in B(a,\varepsilon_0)$ et $u_{p_0+2k+1} \in B(b,\varepsilon_0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La suite $(u_{2k})_{k\geq 0}$ n'admet donc pas b pour valeur d'adhérence : on en déduit qu'elle converge vers a (dans un compact, une suite qui possède au plus une valeur d'adhérence est convergente). De même, $(u_{2k+1})_{k\geq 0}$ converge vers b.

Remarque : a) on peut démontrer le résultat utilisé ci-dessus : supposons que $x = (x_k)_{k\geq 0}$ soit une suite d'un compact K qui ne converge pas ; comme K est compact, elle possède une valeur d'adhérence a ; comme elle ne converge pas vers a, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \geq n,\ d(a, x_n) \geq \varepsilon.$$

On peut donc extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ d(a, x_{\varphi(n)}) \geq \varepsilon.$$

Cette sous-suite possède alors une valeur d'adhérence b, qui est aussi une valeur d'adhérence de x, qui est différente de a, puisque $d(a,b) \geq \varepsilon > 0$.

b) On peut généraliser ce résultat et démontrer que si $(u_n)_{n\geq 0}$ possède un nombre fini k de valeurs d'adhérences, alors pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, la suite $(u_{i+kn})_{n\geq 0}$ converge vers une limite $\ell_i \in K$, avec :

$$f(\ell_0) = \ell_1,\ f(\ell_1) = \ell_2,\ \ldots, f(\ell_{k-2}) = \ell_{k-1} \text{ et } f(\ell_{k-1}) = \ell_1.$$

En notant $(\ell_i)_{0\leq i \leq -1}$ les k valeurs d'adhérence de u. On montre comme ci-dessus qu'il existe une application $\sigma : [\![0, k-1]\!] \longrightarrow [\![0, k-1]\!]$ telle que $f(\ell_i) = \ell_{\sigma(i)}$. On définit ensuite $\varepsilon > 0$ tel que les boules $B(\ell_i, \varepsilon)$ soient deux à deux disjointes, puis $\eta > 0$ tel que :

$$\forall i \in [\![0, k-1]\!],\ \forall x \in K,\ d(x, \ell_i) < \eta \Longrightarrow d(f(x), \ell_{\sigma(i)}) < \varepsilon.$$

Avec $\varepsilon_0 = \min(\varepsilon, \eta)$, il existe n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ u_n \in \bigcup_{i=0}^{k-1} B(\ell_i, \varepsilon_0).$$

On choisit ensuite p_0 multiple de k tel que $p_0 \geq n_0$ et, quitte à changer l'ordre des ℓ_i, on suppose que $u_{p_0} \in B(\ell_0, \varepsilon_0)$. On a ensuite $u_{p_0+k} \in B(\ell_{\sigma^k(i)}, \varepsilon_0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si les entiers $0, \sigma(0), \ldots, \sigma^{k-1}(0)$ ne sont pas deux à deux distincts, il existe $0 \leq j_1 < j_2 \leq k-1$ tels que $\sigma^{j_1}(0) = \sigma^{j_2}(0)$ et on a :

$$\forall n \geq p_0 + j_1,\ u_n \in \bigcup_{j_1 \leq j \leq j_2 - 1} B(\ell_{\sigma(j)(0)}, \varepsilon_0).$$

Comme $j_2 - j_1 < k$, il existe $i \in [\![0, k-1]\!] \setminus \{\sigma(j_1), \ldots, \sigma(j_2 - 1)\}$ et on a $u_n \notin B(\ell_i, \varepsilon_0)$ pour tout $n \geq p_0 + j_1$: c'est impossible car ℓ_i est une valeur d'adhérence de u.

Nous avons donc montré que, quitte à renuméroter les ℓ_i, on a $f(\ell_0) = \ell_1, \ldots, f(\ell_{k-2}) = \ell_{k-1},\ f(\ell_{k-1}) = \ell_1$. On a ensuite comme dans le cas particulier :

$$\forall i \in [\![0, k-1]\!],\ u_{i+kn} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell_i$$

puisque $u_{i+kn} \in B(\ell_i, \varepsilon_0)$ pour n assez grand.

79) a) $A = \left\{ \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$ est une partie infinie, bornée et discrète de $\mathbb{R}$, puisque :

$$\forall n \geq 1,\ B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \cap A = \left\{ \frac{1}{n} \right\}.$$

b) Soit A une partie discrète d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. Sans perte de généralité, on peut supposer que $E = \mathbb{R}^n$. Pour chaque $x \in A$, il existe $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \cap A = \{x\}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on peut donc choisir pour tout $x \in A$ un élément $q_x \in \mathbb{Q}^n$ tel que $d(x, q_x) < \dfrac{r_x}{2}$. L'application $x \longmapsto q_x$ est alors injective de A dans $\mathbb{Q}^n$; en effet, si x et y sont deux éléments de A tels que $q_x = q_y$, on a (en supposant par symétrie que $r_x \leq r_y$) :

$$d(x,y) \leq d(x, q_x) + d(q_y, y) < \frac{r_x}{2} + \frac{r_y}{2} \leq r_y$$

soit $x \in B(y, r_y) \cap A = \{y\}$ et $x = y$.

Comme $\mathbb{Q}^n$ est dénombrable, on en déduit que A est au plus dénombrable.

c) Soit E l'ensemble des applications bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme ; pour tout $a \in \mathbb{R}$, notons f_a l'indicatrice de la partie $\{a\}$. L'ensemble $A = \{f_a,\ a \in \mathbb{R}\}$ est une partie de E qui a la puissance du continu tout en étant discrète, puisque $d(f_a, f_b) = 1$ pour a, b réels distincts.

80) a) Montrons le résultat par contraposée : on suppose donc que Z est compact. Il est en particulier borné, donc il existe $r \geq 0$ tel que Z est contenu dans la boule fermée $\overline{B(0,r)}$. Comme $U = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(0,r)}$ est connexe par arcs (car $n \geq 2$), son image par f l'est également. Comme $0 \notin f(U)$, on en déduit que $f(U) \subset]0, +\infty[$ oui $f(U) \subset]-\infty, 0[$. Enfin,

f est continue donc bornée sur le compact $\overline{B(0,r)}$: il existe donc $M \geq 0$ tel que $f(\overline{B(0,r)}) \subset [-M, M]$. On a donc soit $f(\mathbb{R}^n) \subset]-\infty, M]$, soit $f(\mathbb{R}^n) \subset [-M, +\infty[$ et f n'est pas surjective.

b) Quitte à faire une translation, nous pouvons supposer que $x_0 = 0$, pour simplifier l'écriture. Comme Z est compact, il est borné et il existe $r > 0$ tel que $Z \subset \overline{B(0,r)}$. On pose $R = 2r$ et, comme vu précédemment, f est soit strictement positive, soit strictement négative sur $U = \mathbb{R}^n \setminus B(0,R)$. Si elle était strictement négative, on aurait, en choisissant u vecteur unitaire quelconque, $f(Ru) < 0$ et $f(-Ru) < 0$, et donc $0 = f(0) \leq \dfrac{f(Ru) + f(-Ru)}{2} < 0$ par convexité de f : ce serait absurde. f est donc strictement positive sur U.

On peut alors considérer le compact $\{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| = R\} \subset U$. Comme f est continue, f est bornée sur K et atteint ses bornes : on peut définir $m = \min\limits_{\|x\|=R} f(x) > 0$. On a alors, pour u tel que $\|u\| \geq R$:

$$\frac{R}{\|u\|}\, u = \left(1 - \frac{R}{\|u\|}\right) 0 + \frac{R}{\|u\|}\, u$$

donc par convexité de f :

$$f\left(\frac{R}{\|u\|} u\right) \leq \left(1 - \frac{R}{\|u\|}\right) f(0) + \frac{R}{\|u\|} f(u) = \frac{R}{\|u\|} f(u)$$

Comme $\dfrac{R}{\|u\|} u$ est de norme R, on obtient :

$$\frac{m}{R}\, \|u\| \leq f(u) \text{ pour tout } u \text{ tel que } \|u\| \geq R$$

et donc $f(u)$ tend vers $+\infty$ quand $\|u\|$ tend vers $+\infty$.

81) a) Supposons que la sphère $S(a,r)$ soient compacte et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de la boule unité fermée B. Si la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ stationne à 0, elle converge vers 0 et admet donc une valeur d'adhérence dans B. Sinon, on peut extraire une sous-suite $(y_n) = (x_{\varphi(n)})$ telle que $y_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = a + r\, \frac{y_n}{\|y_n\|} \text{ et } \alpha_n = \|y_n\|.$$

La suite $(\alpha_n, z_n)_{n\geq 0}$ est alors une suite du compacte $[0,1] \times S(a,r)$, donc il existe une extractrice ψ et $(\alpha, z) \in [0,1] \times S(a,r)$ telle que $(\alpha_{\psi(n)}, z_{\psi(n)})$ converge vers (α, z). On a alors :

$$y_{\psi(n)} = \alpha_{\varphi(n)} \left(z_{\varphi(n)} - a\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha\ (z-a) = x$$

x est donc valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$ et $x \in B$ (car B est fermée). B est donc compacte, ce qui contredit que E est de dimension infinie.

b) On commence par fixer $r > 0$ tel que K soit contenu dans la boule ouverte $B(a,r)$ (c'est possible car K est borné). L'idée consiste à “projeter” K sur la sphère $S(a,r)$: pour $x \in K$, on pose $f(x) = a + r\, \dfrac{x-a}{\|x-a\|}$. L'application f est définie et continue sur K (car $a \notin K$) et à valeur dans $S(a,r)$. Comme K est compact et que $S(a,r)$ ne l'est pas, on a $f(K) \neq S(a,r)$ (car l'image d'un compact par une application continue est un compact). On peut donc choisir $y \in S(a,r) \setminus f(K)$ et la demi droite issue de a et dirigée par le vecteur $u = \dfrac{a-y}{\|a-y\|}$ ne rencontre pas K (si elle la rencontrait en x, on aurait $y = f(x)$).

c) Soit $R > 0$ tel que $K \subset B(0,R)$ (K est borné). La partie $C = E \setminus B(0,R)$ est connexe par arc (car E n'est pas de dimension 1). Il suffit donc de montrer que tout point $a \in E \setminus K$ peut être continument relié à un point de C par un chemin ne rencontrant pas K pour prouver que $E \setminus K$ est connexe par arcs. Ceci est une conséquence directe de la question b) : si $a \in E \setminus K$, il existe u unitaire tel que la demi-droite $a + \mathbb{R}^+ u$ ne rencontre pas K. Pour $s \geq 0$ assez grand, on a $\|a + su\| \geq R$ et le segment $[a, a+su]$ relie le point a au point $a + su \in C$ sans rencontrer K.

82) On sait que $GL_2(\mathbb{R})$ possède deux composantes connexes par arcs : $GL_2^+(\mathbb{R})$ et $GL_2^-(\mathbb{R})$. On peut rappeler une démonstration qui est élémentaire en dimension 2 : soit $M \in GL_2^+(\mathbb{R})$. La méthode de Gram-Schmidt appliquée aux colonnes (C_1, C_2) de M donne une base orthonormale directe (e_1, e_2). On peut donc écrire :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R},\ \gamma > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}$$

L'application γ définie par :

$$\forall t \in [0,1],\ \gamma(t) = \begin{pmatrix} (1-t)\alpha + t & (1-t)\beta \\ 0 & (1-t)\gamma + t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(1-t)\theta & -\sin(1-t)\theta \\ \sin(1-t)\theta & \cos(1-t)\theta \end{pmatrix}$$

est continue de $[0,1]$ dans $GL_2^+(\mathbb{R})$ et vérifie $\gamma(0) = M$ et $\gamma(1) = I_2$: $GL_2(\mathbb{R})$ est donc connexe par arcs. $GL_2^-(\mathbb{R})$ est alors également connexe par arcs, comme image de $GL_2^+(\mathbb{R})$ par l'application continue $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$.

Les parties $\mathcal{C}_M^+ = \{P^{-1}MP,\ P \in GL_2^+(\mathbb{R})\}$ et $\mathcal{C}_M^- = \{P^{-1}MP,\ P \in GL_2^-(\mathbb{R})\}$ sont alors connexes par arcs (comme image d'un connexe par arc par l'application continue $P \longmapsto P^{-1}MP$). $\mathcal{C}_M$ sera donc connexe par arcs si et seulement s'il est possible de connecter un élément de $\mathcal{C}_M^+$ à un élément de $\mathcal{C}_M^-$.

Nous allons utiliser quelques propriétés élémentaires pour simplifier le problème :

- si M' est semblable à M, $\mathcal{C}_{M'} = \mathcal{C}_M$; on peut donc remplacer M par une matrice semblable.
- si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_M = \alpha I_2 + \mathcal{C}_{M-\alpha I_2}$ (translation) ; $\mathcal{C}_M$ est donc connexe par arcs si et seulement $\mathcal{C}_{M-\alpha I_2}$ l'est : on peut donc remplacer M par $M - \alpha I_2$;
- si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\mathcal{C}_{\alpha M} = \alpha \mathcal{C}_M$; $\mathcal{C}_M$ est donc connexe par arcs si et seulement $\mathcal{C}_{\alpha M}$ l'est (car l'application $A \longmapsto \alpha A$ est continue ainsi que sa réciproque : c'est un homéomorphisme) : on peut donc remplacer M par αM.

Distinguons donc selon la diagonalisabilité de M.

• Si M est diagonalisable, on peut se ramener avec les 3 règles précédentes au cas où $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Nous devons donc démontrer que M (qui est élément de $\mathcal{C}_M^+$) et $M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (qui est élément de $\mathcal{C}_M^-$) sont connectées dans C_M. Il faut donc trouver une application :

$$t \longmapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$$

avec a, b, c, d continues sur $[0,1]$ vérifiant :

- $\gamma(0) = M$, $\gamma(1) = M'$;
- $\forall t \in [0,1]$, $\gamma(t)$ est semblable à M.

La seconde condition s'écrit $\chi_{\gamma(t)} = X(X-1)$, soit $a + d = 1$ et $ad - bc = 0$. Comme a doit passer de la valeur 1 à la valeur 0, on peut deviner que l'on peut choisir $a(t) = 1 - t$; ceci donne ensuite $d(t) = t$ et $t(1-t) = b(t)c(t)$: il suffit de choisir $b(t) = c(t) = \sqrt{t(1-t)}$. Nous pouvons donc définir :

$$\gamma :\ t \longmapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} 1-t & \sqrt{t(1-t)} \\ \sqrt{t(1-t)} & t \end{pmatrix}$$

et nous avons bien une application continue de $[0,1]$ dans $\mathcal{C}_M$ qui permet de connecter $\mathcal{C}_M^+$ et $\mathcal{C}_M^-$: $\mathcal{C}_M$ est connexe par arcs.

On peut en fait faire une preuve beaucoup rapide, en remarquant que si M est diagonalisable, $\mathcal{C}_M^+ = \mathcal{C}_M^-$. En effet, si (e_1, e_2) est une base de vecteurs propres, $(-e_1, e_2)$ est également une base de vecteurs propres. Il existe donc $P \in GL_2^+(\mathbb{R})$

telle que $P^{-1}MP = (PQ)^{-1}M(PQ)$ avec $Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a donc $P^{-1}MP \in \mathcal{C}_M^+ \cap \mathcal{C}_M^-$. Ceci prouve que $\mathcal{C}_M = \mathcal{C}_M^+$ est connexe par arcs.

• Supposons maintenant que M n'est pas diagonalisable mais qu'elle a une valeur propre réelle (double) ; on peut cette fois se ramener à $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Supposons par l'absurde qu'il existe $\gamma : \ t \longmapsto \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$ continue de $[0,1]$ dans $\mathcal{C}_M$ telle que :

$$\begin{cases} \gamma(0) = M \in \mathcal{C}_M^+ \\ \gamma(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} M \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_M^- \end{cases}$$

On a en particulier :

$c(0) = 0$ et $b(0) = 1$;

$b(0) = 0$ et $c(0) = 1$;

pour tout $t \in [0,1]$, $a(t) + d(t) = 0$ et $a(t)d(t) = b(t)c(t)$, soit $a(t) = -d(t)$ et $-a^2(t) = b(t)c(t)$.

Comme $b - c$ est continue et vaut 1 en 0 et -1 en 1, il existe t_0 tel que $b(t_0) = c(t_0)$. On a alors $-a^2(t_0) = b2(t_0)$, donc $a(t_0) = b(t_0)$ et $\gamma(t_0) = 0$: c'est absurde car $\gamma(t_0)$ doit être semblable à M.

• Supposons maintenant que M n'a pas de valeurs propres réelles : elle a donc deux valeurs propres non réelles conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}^{+*}$). Si e_1 est un vecteur propre complexe de M associé à $\alpha - i\beta$, on pose $\varepsilon_1 = Re(e_1)$ et $\varepsilon_2 = Im(e_1)$. $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est alors une base de $\mathbb{R}^2$ telle que $M\varepsilon_1 = \alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2$ et $M\varepsilon_2 = -\beta\varepsilon_1 + \alpha\varepsilon_2$. M est donc semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ et, en divisant par $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, qui est bien non nul, on peut se ramener au cas où $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Supposons comme précédemment qu'il existe $\gamma : \ t \longmapsto \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$ continue de $[0,1]$ dans $\mathcal{C}_M$ telle que :

$$\begin{cases} \gamma(0) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_M^+ \\ \gamma(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} M \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_M^- \end{cases}$$

Comme $c(0) = -c(1)$ avec c continue, il existe t_0 tel que $c(t_0) = 0$: c'est absurde car $\gamma(t_0)$ est triangulaire et semblable (sur $\mathbb{R}$) à M, alors que M n'est pas trigonalisable (sur $\mathbb{R}$).

83) a) Nous allons montrer que S_d est ouvert dans U_d en utilisant la caractérisation séquentielle. L'idée est que si une suite (P_n) de polynômes normalisés de degré d converge vers P, alors les racines de P_n convergent vers les racines de P. La preuve est ici facilitée par le fait que P a d racines simples.

Soit $P \in S_d$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (U_d[X])^{\mathbb{N}}$ tels que $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} P$. Autrement dit, en notant :

$$P = a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ P_n = a_{0,n} + a_{1,n}X + \cdots + a_{d,n}X^d$$

nous avons $a_{i,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a_i$ pour tout i et nous devons démontrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P_n \in S_d$ pour tout $n \geq n_0$.

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ les d racines (réelles simples) de P. Il existe $r > 0$ tel que les boules $B_i = \{z \in \mathbb{C},\ |z - \lambda_i| < r\}$ soient deux à deux disjointes. Nous allons montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, P_n possède (au moins) une racine dans chaque B_i. Comme P_n est de degré d, cela montrera que P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ et que chaque boule B_i contient une et une seule racine de P_n (toujours pour $n \geq n_0$) ; enfin, si P_n avait une racine complexe λ non réelle, la boule B_i contenant λ contiendrait également la racine conjuguée $\overline{\lambda}$. Ainsi, $P_n \in S_d$ pour $n \geq n_0$.

Travaillons par l'absurde : supposons qu'il existe une infinité de valeurs de n telles que P_n ne possède pas une racine dans chaque B_i. Comme il y a un nombre fini de valeurs de i, il existe $j \in \{1, \ldots, d\}$ tel que P_n n'a pas de racine dans B_j pour une infinité de valeurs de n. On peut alors construire une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{\varphi(n)}$ n'a pas de racine dans B_j. On peut factoriser $P_{\varphi(n)}$ sur $\mathbb{C}$:

$$P_{\varphi(n)} = \prod_{i=1}^{d} (X - \lambda_{i,\varphi(n)})$$

et nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|P_{\varphi(n)}(\lambda_j)\right| = \prod_{i=1}^{d} |\lambda_j - \lambda_{i,\varphi(n)}| \geq r^d > 0$$

car $\lambda_{i,\varphi(n)} \notin B_j$ pour tout i et pour tout n. Ceci est absurde car

$$P_{\varphi(n)}(\lambda_j) = \sum_{i=0}^{d} a_{i,\varphi(n)} \lambda_j^i \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{i=0}^{d} a_i \lambda_j^i = P(\lambda_j) = 0$$

b) Remarquons que U_d étant un fermé de $\mathbb{R}_d[X]$ (c'est un hyperplan affine), l'adhérence de S_d relativement à U_d est aussi son adhérence dans $\mathbb{R}_d[X]$. Si (P_n) est une suite d'éléments de S_d qui converge vers $P \in \mathbb{R}_d[X]$, le même type d'argument que précédemment prouve que P est scindé sur $\mathbb{R}$: sinon, en notant $\lambda = a + ib$ une racine non réelle de P et en factorisant les P_n, on aurait :

$$|P_n(\lambda)| = \prod_{i=1}^{d} |\lambda - \lambda_{i,n}| \geq |b|^d$$

ce qui contredirait $P_n(\lambda) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P(\lambda) = 0$ car $b \neq 0$. P est donc de degré d, normalisé et est scindé sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement, soit $P \in U_d[X]$ et scindé sur $\mathbb{R}$: $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{d}(X - \lambda_i)$. On peut facilement construire d suites réelles $(\lambda_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$, …, $(\lambda_{d,n})_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout n, $\lambda_{1,n}, \ldots, \lambda_{d,n}$ soient distincts deux à deux avec pour tout i, $\lambda_{i,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda_i$. On peut par exemple poser :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall i \in \{1, \ldots, d\},\ \lambda_{i,n} = \lambda_i + \frac{\alpha}{d+1}\,\frac{i}{n+1}$$

en choisissant $\alpha = \min\{|\lambda_i - \lambda_j|,\ 1 \leq i, j \leq d,\ \lambda_i \neq \lambda_j\}$. La convergence de $\lambda_{i,n}$ vers λ_i est évidente et pour $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leq i, j \leq d$ distincts, on a :

- si $\lambda_i = \lambda_j$: $|\lambda_{i,n} - \lambda_{j,n}| = \dfrac{\alpha}{d+1}\,\dfrac{|i-j|}{n+1} > 0$;
- si $\lambda_i \neq \lambda_j$: $|\lambda_{i,n} - \lambda_{j,n}| \geq |\lambda_i - \lambda_j| - \dfrac{\alpha}{d+1}\,\dfrac{|i-j|}{n+1} \geq \alpha - \dfrac{\alpha}{d+1}\, d > 0$.

La suite $\displaystyle\left(\prod_{i=1}^{d}(X - \lambda_{i,n})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une suite d'éléments de S_d qui converge vers P. L'adhérence de S_d est donc l'ensemble des polynômes normalisés de degré d scindés (sur $\mathbb{R}$).

Remarque : plus généralement, nous pouvons démontrer la propriété

> *Si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes complexes normalisés de degré d qui converge vers un polynôme P à racines simples $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$, alors on peut classer les racines des polynômes P_n en $(\lambda_{1,n}, \ldots, \lambda_{d,n})$ avec*
>
> $$\forall i \in \{1, \ldots, d\},\ \lambda_{i,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda_i.$$

Ce résultat est encore vrai quand P n'est pas à racines simples, mais la preuve est alors plus compliquée. Il faut en effet montrer que si les racines distinctes de P sont $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ avec λ_i d'ordre n_i et si $r>0$ est fixé de sorte que les boules $B_i=\{z\in\mathbb{C},\ |z-\lambda_i|<r\}$ soient deux à deux disjointes, alors il existe n_0 tel que pour tout $n\geq n_0$, P_n a exactement n_i racines dans B_i.

84) a) Soit $h\in\mathcal{H}$. Le théorème de continuité s'applique à $f*h$:

- pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t\longmapsto f(x-t)h(t)$ est continue par morceaux et sommable sur $\mathbb{R}$ (elle est à support compact) ;
- pour tout $t\in\mathbb{R}$, $x\longmapsto f(x-t)h(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$;
- pour $t,x\in\mathbb{R}$, $|f(x-t)h(t)|\leq ||f||_\infty|h(t)|=\varphi(t)$ avec φ continue par morceaux et sommable sur R.

$f*h$ est donc continue sur $\mathbb{R}$. Si f est nulle en dehors de $[-a,a]$ et h nulle en dehors de $[-b,b]$, $f*h$ est nulle en dehors de $[-(a+b),a+b]$, donc $f*h\in E$.

Comme $\mathcal{H}$ est un espace vectoriel et $h\longmapsto f*h$ est linéaire de $\mathcal{H}$ dans E, $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de E.

b) Notons $\mathcal{T}'=\{f_a,\ a\in\mathbb{R}\}$. Si on montre que $\mathcal{T}'\subset\overline{\mathcal{C}}$, on aura $\mathcal{T}=\operatorname{Vect}(\mathcal{T}')\subset\overline{\mathcal{C}}$ car, $\mathcal{C}$ étant un sev, $\overline{\mathcal{C}}$ en est un également.

Pour $a\in\mathbb{R}$, il faut donc montrer que $f_a\in\overline{\mathcal{C}}$. On a :

$$f*h(x)=\int_{\mathbb{R}}f(t)h(x-t)\,\mathrm{d}t=\int_{\mathbb{R}}f(x-t)h(t)\,\mathrm{d}t=h*f(x)$$

Si on veut que $f*h(x)$ soit proche de $f(x+a)$, il faut que h soit nul quand t n'est pas proche de $-a$ et que h soit “grand” quand t est proche de $-a$. On peut donc penser à définir h_n par :

- $h_n(t)=0$ si $t<-a-\frac{1}{n}$ ou $t>-a+\frac{1}{n}$;
- $h_n(t)=\frac{n}{2}$ si $-a-\frac{1}{n}\leq t\leq -a+\frac{1}{n}$.

h_n est en escalier, positive et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}h_n(t)\,\mathrm{d}t=1$.Comme f est continue à support compact, elle est uniformément continue. En effet, si f est nulle en dehors de $[a,b]$, elle est uniformément continue sur $[a,b]$ (théorème de Heine). Pour $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que :

$$\forall x,y\in[a,b],\ |x-y|\leq\eta\Longrightarrow|f(x)-f(y)|\leq\varepsilon.$$

Si $x\leq y\in\mathbb{R}$ avec $|y-x|\leq\eta$, il suffit de distinguer les cas :

- si $x\notin[a,b]$ et $y\notin[a,b]$, $|f(x)-f(y)|=0\leq\varepsilon$;
- si $x<a$ et $y\in[a,b]$, $|f(x)-f(y)|=|0-f(y)|=|f(a)-f(y)|\leq\varepsilon$ car $|y-a|\leq|y-x|\leq\eta$;
- si $x\in[a,b]$ et $y>b$, $|f(x)-f(y)|=|f(x)-0|=|f(x)-f(b)|\leq\varepsilon$ car $|x-b|\leq|y-x|\leq\eta$;
- si $x,y\in[a,b]$, $|f(x)-f(y)|\leq\varepsilon$.

Pour $\varepsilon>0$, il existe donc $\eta>0$ tel que :

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\ |x-y|\leq\eta\Longrightarrow|f(x)-f(y)|\leq\varepsilon.$$

Pour $n\geq\dfrac{2}{\eta}$ et $x\in\mathbb{R}$, nous avons :

$$\begin{aligned}|f*h_n(x)-f_a(x)| &= \left|\int_{-a-1/n}^{-a+1/n}(f(x-t)-f(a+x))\,h_n(t)\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leq \int_{-a-1/n}^{-a+1/n}\underbrace{|f(x-t)-f(a+x)|}_{\leq\varepsilon}h_n(t)\,\mathrm{d}t\\ &\leq \varepsilon\int_{\mathbb{R}}h_n(t)\,\mathrm{d}t=\varepsilon\end{aligned}$$

$f * h_n$ converge donc uniformément vers f_a quand n tend vers l'infini : $f_a \in \overline{\mathcal{C}}$.

c) $f * h$ ne dépend pas des valeurs prises par h en ses points de discontinuité. Nous pouvons donc nous restreindre à des fonctions h de la forme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{1}_{]a_i,b_i[}$ où $\mathbf{1}_A$ est l'indicatrice de la partie A, avec $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. Par linéarité, nous pouvons nous contenter de démontrer que $f * h \in \overline{\mathcal{C}}$ pour h de la forme $\mathbf{1}_{]a,b[}$ avec $a < b$: cela prouvera que $\mathcal{T} \subset \overline{\mathcal{C}}$, et donc que $\overline{\mathcal{T}} \subset \overline{\mathcal{C}}$.

Pour $a < b$ et $h = \mathbf{1}_{]a,b[}$, nous avons :

$$f * h(x) = \int_a^b f(x-t)\,\mathrm{d}t$$

Nous allons approximer cette intégrale par une somme de Riemann ; pour $n \in \mathbb{N}^*$, définissons :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x - \underbrace{(a + \frac{i}{n}(b-a))}_{=a_i}\right)$$

soit

$$g_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f_{-a_i} \in \mathcal{T}$$

Pour $\varepsilon > 0$, on choisit une nouvelle fois $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x-y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

On a, pour $n \geq \dfrac{b-a}{\eta}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f * h(x) - g_n(x)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \underbrace{|f(x-t) - f(x-a_i)|}_{\varepsilon}\,\mathrm{d}t(b-a)\varepsilon$$

car pour $t \in [a_i, a_{i+1}]$, $|x - t - (x - a - i)| = |a_i - t| \leq |a_{i+1} - a_i| = \dfrac{b-a}{n} \leq \eta$. Ainsi, g_n converge uniformément vers $f * h$: $f * h \in \overline{\mathcal{T}}$.

85) a) Soit $m \geq n+1$ et $x \in C_{m+1}$. On peut donc écrire $x = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i x_i$ avec $(x_i)1 \leq i \leq m+1 \in X^{m+1}$, $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq m+1} \in (\mathbb{R}^+)^{m+1}$ et $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$. Si l'un des α_i est nul, $x \in C_m$. Sinon, la famille $(x_i - x_{m+1})_{1 \leq i \leq m}$ est liée (elle contient m vecteurs et $m > n$). Il existe donc des réels non tous nuls $\beta_1, \ldots, \beta_m$ tels que $\sum_{1 \leq i \leq m} \beta_i (x_i - x_{m+1}) = 0$, ce qui donne, en posant $\beta_{m+1} = -\sum_{1 \leq i \leq m} \beta_i$:

$$\sum_{i=1}^{m+1} \beta_i x_i = 0$$

On en déduit :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ x = \sum_{i=1}^{n+1} \underbrace{(\alpha_i - \alpha\beta_i)}_{=\gamma_i} x_i.$$

La somme des γ_i est nulle et nous allons démontrer que l'on peut choisir α de sorte que tous les γ_i soient positifs et que l'un d'entre soit nul : cela prouvera que $x \in C_m$.

Comme les β_i sont non tous nuls et de somme nulle, l'ensemble $I = \{i,\ \beta_i > 0\}$ et non vide. On peut donc choisir $\alpha = \min\limits_{i \in I} \dfrac{\alpha_i}{\beta_i}$: ont aura bien $\beta_i \geq 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et $\beta_i = 0$ pour au moins un élément i de I.

b) Le a) prouve que $C = C_{n+1}$. Soient alors $A = \{(\alpha_i) \in [0,1]^{n+1},\ \sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1\} \times K^{n+1}$ et $f :\ A \longrightarrow E$ qui à $((\alpha_i)_{1 \leq i \leq n+1}, (x_i)_{1 \leq i \leq n+1})$ associe $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i$. A est un compact de $\mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1}$ (c'est un produit de compacts) et f est continue : on en déduit que $C = f(A)$ est un compact de E.

c) Commençons par démontrer la propriété proposée : supposons que (x_n) converge vers x.

La partie $A = \left\{\frac{1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ est fermée (son complémentaire est une réunion d'intervalles ouverts) et bornée : elle est donc compact (on est ici en dimension finie). D'autre part, l'application $f :\ A \longrightarrow E$ qui associe x à 0 et x_n à $\frac{1}{n+1}$ est continue en chaque $\frac{1}{n+1}$ (ces points sont des points isolés de A) et elle également en 0. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d(x, x_n) < \varepsilon$ pour $n \geq n_0$. En posant $\eta = \frac{1}{n_0+1}$, on a pour $t \in A$ tel que $d(0, t) < \eta$:

- si $t = 0$, $d(f(t), f(0)) = 0 < \varepsilon$;
- si $t = \frac{1}{n+1}$, $n \geq n_0$ et $d(f(t), f(0)) = d(x_n, x) < \varepsilon$.

L'ensemble K est donc compact, comme image d'un compact par une application continue.

Choisissons l'espace $E = \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ (ensemble des suites réelles bornées), muni de $\|\ \|_\infty$ et notons, pour $n \in \mathbb{N}$, x_n la suite donc tous les termes sont nuls, sauf celui d'indice n, qui est égal à 2^{-n}. La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers la suite nulle, donc $K = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ est un compact de E. L'enveloppe convexe C de K est alors contenue dans l'espace $\mathbb{R}[X]$ (ensemble des suites réelles à support fini) et nous allons construire une suite $(y_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de C qui converge vers $y \in E \setminus \mathbb{R}[X]$: ceci prouvera que C n'est pas fermé, donc qu'il n'est pas compact. Il suffit pour cela de poser :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = \frac{1}{2^n}\, 0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}}\, x_k \in C$$

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^{2k+1}}, \ldots, \frac{1}{2^{2(n-1)+1}}, 0, 0, \ldots\right)$$

donc y_n converge pour $\|\ \|_\infty$ vers $y = \left(\dfrac{1}{2^{2k+1}}\right)_{k\geq 0} \in E \setminus C$, puisque :

$$\|y - y_n\|_\infty = \frac{1}{2^{2n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$