

Mathématiques 1

Présentation du sujet

Le sujet de Maths 1 de la filière PSI 2022 a pour objectif la démonstration d'un résultat de géométrie dans un espace euclidien. Pour cela, plusieurs résultats intermédiaires sont démontrés, notamment sur les matrices nilpotentes et sur les variables aléatoires discrètes.

Le problème est constitué de quatre parties largement indépendantes :

- une première partie vise à faire démontrer des propriétés sur les matrices nilpotentes ;
- une deuxième partie permet de mettre en évidence des propriétés algébriques de l'ensemble des matrices colonnes ne comportant que des 1 et des -1, puis propose l'étude d'une loi de probabilité sur l'ensemble $\{-1, 1\}$;
- une troisième partie demande aux candidats de rédiger des programmes en Python en lien avec les matrices ;
- une quatrième et dernière partie entre dans le cœur de la preuve du résultat visé par le sujet.

Il était attendu des candidats qu'ils maîtrisent bien leur cours d'algèbre linéaire pour traiter ce problème : propriétés de la trace ou du déterminant, manipulations de matrices et de leurs puissances, définition d'une valeur propre par exemple. Une bonne maîtrise des raisonnements élémentaires de probabilités était également indispensable : indépendance ou incompatibilité d'événements, propriétés de l'espérance et de la variance. Enfin, quelques autres chapitres (espaces euclidiens, études de fonctions) rentraient également en jeu.

Analyse globale des résultats

La première partie a été abordée presque entièrement par tous les candidats, et certaines questions ont été très bien traitées. En revanche, le cours n'est pas toujours bien appris et certains résultats, pourtant très importants, ne sont parfois pas cités correctement (propriétés de la trace ou formule du binôme de Newton par exemple).

La deuxième partie a aussi été très largement étudiée mais avec moins de succès. Dans la première sous-partie (résultats algébriques), de nombreuses idées intéressantes ont été proposées, mais la rigueur mathématique était parfois absente dans les explications. Dans les sous-parties suivantes, les premières questions sur les variables de Rademacher ont été très bien réussies mais les dernières, plus théoriques, n'ont été correctement traitées que par peu de candidats.

La troisième partie, consacrée à l'algorithmique, a été globalement bien réussie par les candidats qui s'y sont lancés et la syntaxe Python est dans l'ensemble bien maîtrisée.

La dernière partie a été moins abordée par les candidats, sans doute à cause de sa position dans le problème, mais aussi peut-être parce qu'elle nécessitait de combiner habilement plusieurs résultats d'analyse, d'algèbre et de probabilités.

Concernant la présentation des copies, une majorité est assez clairement présentée, avec des questions numérotées correctement, traitées dans l'ordre et des résultats encadrés. Ceux qui dérogent à ces règles de base font tout de suite mauvaise impression et prennent le risque d'être moins bien compris par les correcteurs.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Le jury souhaite insister sur un certain nombre de points qui ont souvent posé problèmes aux candidats :

- Les candidats doivent faire un effort de présentation des copies, numéroté les questions, les traiter dans l'ordre (quitte à laisser des blancs pour y revenir) et encadrer leurs résultats.
- L'utilisation des abréviations doit être limitée : si certaines (CNS, SSI...) sont très couramment utilisées, d'autres (FPT pour formule des probabilités totales...) le sont nettement moins. De même, l'emploi d'abréviations telles que $\forall$, $\iff$ doit être modéré dans des explications, et ces symboles ne doivent figurer que dans des assertions ne contenant que des symboles mathématiques.
- Un raisonnement doit être articulé avec des mots clés (considérons, or, donc, car, en effet) : les hypothèses et les objectifs doivent être clairement identifiés.
- Lorsqu'une égalité entre deux ensembles est demandée et qu'un raisonnement par « double inclusion », est choisi, il est important de bien démontrer les deux inclusions, ou à défaut, de signaler que l'une d'entre elles est évidente si tel est le cas.
- Pour démontrer une équivalence entre deux propriétés, on peut raisonner directement par équivalence, ou raisonner par double implication. Mais montrer une seule implication ne suffit pas.
- Dans la **Q 1.**, il était demandé de démontrer que l'application trace était linéaire. Il n'était donc pas suffisant d'écrire que « la trace est clairement linéaire » : un minimum de rédaction était attendu.
- Dans la **Q 2.**, 4 points précis sont attendus pour démontrer qu'une application est un produit scalaire. En particulier, la positivité ne consiste pas à démontrer que $\text{tr}(A^\top B) \geq 0$. Rappelons par ailleurs que la trace d'un produit n'est en général pas égale au produit des traces ! Enfin, il est important de faire la différence entre un produit scalaire et une norme.
- Lorsqu'un résultat précédemment démontré est utilisé, il est important de le signaler. De même, le lemme des coalitions, proposé dans le préambule, devait être rappelé par tout candidat qui souhaitait l'utiliser.
- Dans la **Q 4.**, de nombreux candidats ont oublié de démontrer que 0 était la seule valeur propre.
- Dans la **Q 7.** : l'utilisation de la formule du binôme de Newton nécessite de préciser que les deux matrices M et N commutent. Par ailleurs, dans cette dernière formule, l'indice de sommation commence à 0 et non pas à 1.
- Dans la **Q 8.**, les deux matrices M et N ne commutaient pas. Le développement de $(M + N)^2$ n'est donc pas $M^2 + 2MN + N^2$.
- Dans la **Q 10.**, plusieurs méthodes de résolution étaient possibles. Lorsque le théorème spectral était utilisé, il ne fallait pas oublier d'en préciser toutes les hypothèses.
- Dans la **Q 12.** : il était attendu qu'un minimum d'explications accompagnent l'exemple proposé par le candidat. C'est d'autant plus préjudiciable lorsque le correcteur constatait que le déterminant n'était pas nul !
- Dans la **Q 21.** : le déterminant n'est pas une combinaison linéaire de ses coefficients !
- Dans la **Q 22.** : attention, en général, la variance d'un produit n'est pas égale au produit des variances.
- Dans la **Q 26.** : si deux vecteurs C et C' sont liés, il n'y a pas forcément d'égalité de la forme $C' = aC$. Il faut penser au cas où un des vecteurs est nul pour être exhaustif.

- Dans la **Q 32.**, la formule donnant l'expression d'une somme géométrique est parfois erronée, et il serait apprécié que le mot « géométrique » apparaisse.
- Dans la **Q 35.**, certains candidats pensent que le résultat doit être entier et utilisent à tort la commande `//`.
- Dans la **Q 37.**, il ne suffit pas de dire que la famille est orthogonale pour conclure qu'elle est libre ! Il est important de préciser que ses vecteurs doivent être non nuls (ce qui est le cas si la famille est orthonormale).
- Dans la **Q 41.**, il était attendu que les candidats donnent précisément les hypothèses de l'inégalité de Markov. Par ailleurs, il ne fallait pas oublier de traiter le cas où $t = 0$.

Conclusion

Le sujet était plutôt long mais la progressivité du texte et la diversité des chapitres mathématiques nécessaires (probabilités, réduction, algorithmes...), ont permis à tous les candidats de traiter de nombreuses questions et de mettre en évidence leurs compétences. Quelques lacunes sur des notions de base ont malheureusement aussi été repérées.

De nombreux candidats ont su montrer leur maîtrise du langage mathématique en général, et plus spécifiquement des points qui étaient nécessaires pour aborder les diverses parties de ce problème : le langage des probabilités ; la diagonalisation des matrices, l'algorithmique... Quelques candidats ont même abordé avec succès les questions plus difficiles qui parsemaient le sujet, et les correcteurs tiennent à les en féliciter.

Les correcteurs ont constaté cette année une bonne maîtrise de la rédaction (logique, double implication, clarté des calculs entrepris...). Une partie non négligeable des copies propose une rédaction très agréable à lire en mêlant rigueur, justesse et clarté. Les correcteurs encouragent par ailleurs vivement les candidats à utiliser un brouillon et à ne pas commencer systématiquement la rédaction aussitôt l'énoncé lu. De nombreuses erreurs grossières pourraient ainsi être évitées.