
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Index des démonstrations rédigées

Chapitre 16 — Équations différentielles

[46.5]	14-05	[76]	14-03	[107]	14-06
[69.2]	14-08	[77]	14-04	[112]	rms095-260
[70.1]	14-09	[83]	14-10	[113]	rms095-264
[73]	14-01	[88]	14-09	[121.2]	rms135-767
[75]	14-02	[93.4]	14-07		

Applications du cours

Exercice 1

14-01

Une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ est une solution de l'équation différentielle

$$\forall t > 0, \quad t^2 x''(t) - 2x(t) = \frac{3}{t}$$

si, et seulement si, la fonction g définie par $g(t) = tf'(t) + f(t)$ est une solution de l'équation différentielle

$$\forall t > 0, \quad ty'(t) - 2y(t) = \frac{3}{t}.$$

Les solutions f sont les fonctions de la forme

$$f(t) = \frac{K_1}{t} + K_2 t^2 - \frac{\ln t}{t}.$$

Exercice 2

14-02

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. La fonction définie par $x(t) = t^\lambda z(t)$ est solution de

$$\forall t > 0, \quad t^2 x''(t) + tx'(t) + (t^2 - \lambda^2)x(t) = 0 \quad (B_\lambda)$$

si, et seulement si,

$$\forall t > 0, \quad tz''(t) + (2\lambda + 1)z'(t) + tz(t) = 0. \quad (B'_\lambda)$$

2. Si $\lambda = -1/2$, les solutions de (B_λ) sont les fonctions de la forme

$$x(t) = K_1 \frac{\cos t}{\sqrt{t}} + K_2 \frac{\sin t}{\sqrt{t}}.$$

3. Si $\lambda = 1/2$, les solutions de (B'_λ) sont les fonctions de la forme

$$z(t) = K_1 \frac{\cos t}{t} + K_2 \frac{\sin t}{t}.$$

Exercice 3

14-03

1. Une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de

$$t^2 x''(t) + 3tx'(t) + 4x(t) = t + 4$$

si, et seulement si, la fonction g définie par $g(s) = f(e^s)$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de

$$y''(s) + 2y'(s) + 4y(s) = e^s + 4.$$

2. Les solutions f sont les fonctions de la forme

$$K_1 \frac{\cos(\sqrt{3} \ln t)}{t} + K_2 \frac{\sin(\sqrt{3} \ln t)}{t} + \left(1 + \frac{t}{7}\right).$$

Exercice 4

14-04

1. La fonction f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$(1 + t^2)^2 x''(t) + 2(t - 1)(1 + t^2)x'(t) + x(t) = 0$$

si, et seulement si, la fonction g définie par $g(\theta) = f(\tan \theta)$ est une solution de

$$\forall \theta \in]-\pi/2, \pi/2[, \quad y''(\theta) - 2y'(\theta) + y(\theta) = 0.$$

2. Les solutions f sont les fonctions de la forme

$$e^{\text{Arctan } t} (K_1 + K_2 \text{Arctan } t).$$

Exercice 5

14-05

Le triplet de fonctions (x, y, z) est une solution du système

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = 10x - 5y + 7z \\ z' = 4x - 2y + 2z \end{cases}$$

si, et seulement si, il existe trois réels K_1, K_2 et K_3 tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 e^{-t} \\ K_2 + K_3 t \\ K_3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

14-06

1. Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sont semblables et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\exp(tA) = \frac{e^{3t}}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 2te^{3t} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{e^t}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Les plans stables par A sont $[y - z = 0]$ et $[y + z = 0]$.

3. La trajectoire de la solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = AX(t)$$

telle que $X'(0) = (1, 1, 1)^T$ est contenue dans le plan $[y - z = 0]$.

Exercice 7

14-07

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Si $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$, alors X est aussi un vecteur propre de $\exp(A)$, associé à la valeur propre e^λ .

2. Si $Q^{-1}AQ = T$, alors $Q^{-1} \cdot \exp(A) \cdot Q = \exp(T)$.

3. Si le polynôme caractéristique de A est scindé, alors le polynôme caractéristique de $\exp(A)$ est scindé lui aussi. En déduire l'égalité suivante.

$$\det[\exp(A)] = \exp(\text{tr } A)$$

(NB : cette égalité est vraie pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, même lorsque le polynôme caractéristique χ_A n'est pas scindé.)

Exercice 8

14-08

Le wronskien de l'équation

$$(1 + t^2)x''(t) - 2tx'(t) - 2\frac{1 - t^2}{1 + t^2}x(t) = 0$$

est proportionnel à $(1 + t^2)$; les solutions sont les fonctions de la forme

$$(1 + t^2)(K_1 + K_2 \text{Arctan } t).$$

Exercice 9**14-09**

1. Le wronskien de l'équation différentielle

$$(1+t^2)x''(t) + 4tx'(t) + 2x(t) = 0 \quad (\text{H})$$

est proportionnel à $1/(1+t^2)^2$ et les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme

$$\frac{K_1 + K_2 t}{1+t^2}.$$

2. L'équation différentielle

$$(1+t^2)x''(t) + 4tx'(t) + 2x(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad (\text{E})$$

admet

$$\frac{t \operatorname{Arctan} t}{1+t^2} - \frac{\ln(1+t^2)}{2(1+t^2)}$$

pour solution particulière.

Exercice 10**14-10**

1. L'équation différentielle

$$t^2 x''(t) - 2tx'(t) + 2x(t) = t - 2$$

admet la matrice

$$\begin{pmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{pmatrix}$$

pour matrice fondamentale.

2. Par variation des constantes, la solution générale sur $I =]0, +\infty[$ a pour expression :

$$-(1+t \ln t) + K_1 t + K_2 t^2.$$

Exercice 11**Gronwall**

1. Soient f et g , deux fonctions continues et positives sur l'intervalle $[a, +\infty[$. On suppose qu'il existe une constante $K \geq 0$ telle que

$$\forall x \geq a, \quad 0 \leq f(x) \leq K + \int_a^x g(t)f(t) dt.$$

Démontrer que

$$\forall x \geq a, \quad 0 \leq f(x) \leq K \exp \int_a^x g(t) dt.$$

2. Soit $q \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On suppose que cette fonction q tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et que sa dérivée q' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Démontrer que toutes les solutions de l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad y''(x) + [1 + q(x)]y(x) = 0 \quad (*)$$

sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.**Exercices posés en colle et aux oraux****Exercice 12****mt24-QT1**

Résoudre le système différentiel suivant.

$$\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = -x + 3y \end{cases}$$

Exercice 13**rms095-260**

On considère l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) + q(t)x(t) = 0 \quad (*)$$

où q est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Si f est une solution non nulle de $(*)$ sur $[a, b]$, alors f s'annule un nombre fini de fois sur $[a, b]$.

2. Soient f et g , deux solutions non nulles de $(*)$ sur $\mathbb{R}$. On suppose que deux réels a et b sont deux zéros consécutifs de f (avec $a < b$). Alors la fonction g admet un, et un seul, zéro dans $[a, b]$.

Exercice 14**rms095-264**

On considère l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) + x(t) = f(t) \quad (*)$$

où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.1. La fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \int_0^t f(s)e^{-(t-s)} ds$$

est une solution de $(*)$.

2. Si l'équation différentielle $(*)$ admet une solution périodique, de période $T > 0$, alors la fonction f est périodique, de période T .

3. On suppose que f est périodique, de période $T > 0$.

3.a. L'équation $(*)$ admet au plus une solution périodique de période T .

3.b. L'équation $(*)$ admet-elle une solution périodique ?

Exercice 15**rms120-391**

On considère l'endomorphisme

$$D = [f \mapsto f']$$

de l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Existe-t-il un endomorphisme T de E tel que $T \circ T = D$?

Exercice 16**rms120-549**

1. Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\Re \alpha > 0$ et $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$f'(t) + \alpha f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Démontrer que f tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

2. Soit $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$, une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$g''(t) + g'(t) + g(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Démontrer que g tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

Exercice 17**rms128-717**

Soient a et b , deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle

$$\forall t \in I, \quad x^p(t)(x'(t) + a(t)x(t)) = b(t) \quad (E)$$

et un couple $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

Démontrer qu'il existe un intervalle ouvert I_0 contenant t_0 pour lequel l'équation (E) admet une, et une seule, solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur I_0 et telle que $x(t_0) = x_0$.

Exercice 18**rms128-726**

Soient A et B , deux variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, qui suivent toutes deux la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

Calculer la probabilité pour que toutes les solutions de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) + (A(\omega) - 1)x'(t) + B(\omega)x(t) = 0 \quad (E_\omega)$$

tendent vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

Exercice 19**rms130-566**

1. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, une application dérivable. On suppose que

$$\forall x \in [0, 1], \quad (f(x), f'(x)) \neq (0, 0).$$

Démontrer que l'ensemble des zéros de f est fini.

2. Soit $q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue. On considère une fonction $f \in \mathcal{C}^2([0, 1])$, non identiquement nulle, qui vérifie l'équation différentielle

$$\forall x \in [0, 1], \quad y''(x) + q(x)y(x) = 0.$$

Démontrer que f n'a qu'un nombre fini de zéros.

Exercice 20**rms130-600**

Soit $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On considère une solution f de l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad y''(x) + (1 + u(x))y(x) = 0$$

et on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = f(x) + \int_0^x \sin(x-t)u(t)f(t) dt.$$

1. Former une équation différentielle linéaire vérifiée par g .

2. Démontrer qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |f(x)| \leq x + \int_0^x |u(t)f(t)| dt.$$

3. Démontrer que la fonction f est bornée.

Exercice 21**rms130-601**

Soit $q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On considère l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad y''(x) + q(x)y(x) = 0. \quad (E)$$

1. On suppose que f est une solution bornée de (E). Démontrer que sa dérivée f' tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

2. Démontrer que (E) admet des solutions non bornées.

Exercice 22**rms130-740**

Soit $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, une application dérivable.

1. Démontrer que l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = M(x)^\top \cdot M(x)$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.

2. Soit $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, une application continue à valeurs dans l'espace des matrices antisymétriques et $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad M'(x) = A(x)M(x).$$

On suppose que $M(0) \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad M(x) \in \text{SO}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 23**rms130-1172**

Soient I , un intervalle de $\mathbb{R}$ et u , une application de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$) de I dans $\mathbb{R}$. Pour toute application $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$, on pose

$$L_u(f) = f' + uf.$$

1. Démontrer que L_u est linéaire. Calculer $L_u \circ L_u$.

2. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 2xy' + (1 + x^2)y = 0.$$

Exercice 24**rms130-1269**

Résoudre le système différentiel suivant.

$$\begin{cases} x' = & y - z \\ y' = 2x + y + z \\ z' = -2x - y - z \end{cases}$$

Exercice 25**rms130-1395**

On considère l'équation différentielle

$$\forall t > 0, \quad t^2 x''(t) - 2tx'(t) + 2x(t) = 0. \quad (H)$$

1. Donner une base de l'espace des solutions de (H). On cherchera des solutions de la forme $[t \mapsto t^r]$.

2. Résoudre l'équation différentielle

$$\forall t > 0, \quad t^2 x''(t) - 2tx'(t) + 2x(t) = 1 + t^2. \quad (E)$$

Exercice 26**rms130-1399**

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de

$$\frac{1}{x+i}.$$

2. En déduire les solutions de l'équation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + \frac{1}{2(x+i)}y(x) = 0. \quad (E)$$

3. Démontrer que l'intégrale

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. Démontrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée sous forme intégrale.

5. En déduire que f est une solution de l'équation (E).

6. Démontrer que l'application

$$J = \left[\alpha \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} \sin t}{\sqrt{t}} dt \right]$$

est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Exprimer J en fonction de f et en déduire le signe de J .

Exercice 27**rms130-1401**

1. Résoudre l'équation différentielle

$$\forall t < 1, \quad (1-t)x'(t) - x(t) = \frac{1}{1-t}.$$

2. Démontrer que les solutions de (E) sont développables en série entière au voisinage de 0.

3. Comment trouver les coefficients du développement en série entière d'une solution de (E)?

Exercice 28**rms130-1402**

1. Démontrer que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/t}}{t} = 0.$$

En déduire l'existence de l'application h définie par

$$\forall x > 0, \quad h(x) = \int_0^x \frac{e^{-1/t}}{t} dt.$$

2. Démontrer que $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ est une solution de l'équation différentielle

$$\forall x > 0, \quad x^2 y'(x) + y(x) = x \quad (E)$$

si, et seulement si, il existe un réel λ tel que

$$\forall x > 0, \quad y(x) = e^{1/x}h(x) + \lambda e^{1/x}.$$

3. En effectuant le changement de variable $t = \frac{x}{1+xu}$, démontrer que

$$\forall x > 0, \quad e^{1/x}h(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+xu} du.$$

4. Démontrer que l'application g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+xu} du$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 29**rms132-527**

Soit E , l'espace vectoriel des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $f(0) = f'(0) = 0$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose

$$N(f) = \|f + 2f' + f''\|_\infty.$$

- Démontrer que N est une norme sur E .
- Soit $f \in E$. Exprimer f en fonction de $g = f + 2f' + f''$.
- Démontrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty \leq \alpha N(f).$$

4. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N sont-elles équivalentes?

Exercice 30**rms132-633**

Soit f , une fonction à valeurs réelles, continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On note S , l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + f(x)y(x) = 0.$$

1. Pour y_1 et y_2 dans S , on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad w(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x).$$

Que dire de w ?

2. Démontrer que S contient des fonctions non bornées.

Exercice 31**rms132-1028**

Soit $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une application de classe $\mathcal{C}^1$. (Pour alléger les notations, on notera A_t au lieu de $A(t)$.)

1. On suppose qu'il existe une application

$$S : \mathbb{R} \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$$

de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S_t^{-1}A_tS_t = A_0.$$

Démontrer qu'il existe une application continue

$$B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad A_t' = B_tA_t - A_tB_t.$$

2. Réciproquement, on suppose qu'il existe une application continue $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad A_t' = B_tA_t - A_tB_t.$$

Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la matrice $A(t)$ est semblable à $A(0)$.

Exercice 32**rms132-1122**

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier sans calcul que A est diagonalisable. Donner une base de vecteurs propres.
2. Résoudre le système différentiel suivant.

$$\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$$

Exercice 33**rms132-1155**

On note E , l'espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ telles que $f(0) = 0$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose

$$N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N'(f) = \|f + f'\|_\infty.$$

1. Démontrer que N et N' sont des normes sur E .
2. Vérifier que

$$\forall x \in [0, 1], \quad e^x f(x) = \int_0^x e^t (f(t) + f'(t)) dt.$$

3. Démontrer qu'il existe deux réels a et b strictement positifs tels que

$$\forall f \in E, \quad aN'(f) \leq N(f) \leq bN'(f).$$

Exercice 34**rms132-1165**

On cherche à résoudre l'équation

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt \quad (E)$$

où l'inconnue f est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + cy = 0.$$

(On discutera sur $c \in \mathbb{R}$.)

2. Soit f , une solution de (E) autre que la fonction identiquement nulle. On pose

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt.$$

Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et que

$$\forall M \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(M) - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(M) = 0.$$

3. Soit f , une solution de (E). Calculer $f(0)$ et

$$f''(x)f(y) - f(x)f''(y).$$

4. En déduire les solutions de (E).

Exercice 35**rms132-1175**

On considère l'équation différentielle

$$(x^2 - 1)y''(x) - (x + 1)y'(x) + y(x) = 0. \quad (E)$$

1. Déterminer les solutions polynomiales de (E).
2. Déterminer une équation différentielle (E') vérifiée par $z(x) = y(x)/x$.
3. Calculer les réels a , b et c tels que

$$\frac{2 - 4X^2}{X(X^2 - 1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X - 1} + \frac{c}{X + 1}.$$

4. En déduire les solutions de (E'), puis les solutions de (E).

Exercice 36**rms132-1176**

1. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable?

2. Démontrer que la matrice A est semblable à une matrice triangulaire. (On donnera une matrice de passage convenable.)
3. Résoudre le système différentiel suivant.

$$\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$$

Exercice 37**rms132-1177**

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = y - z \\ y' = -x + z \\ z' = x - y \end{cases} \quad (S)$$

avec les conditions $x(0) = 1$ et $y(0) = z(0) = 0$.

1. Discuter l'existence et l'unicité des solutions de (S).
2. On suppose que (x, y, z) est une solution de (S). Démontrer que les fonctions $x + y + z$ et $x^2 + y^2 + z^2$ sont constantes. Que peut-on en déduire pour la trajectoire?
3. Résoudre le système (S).

Exercice 38**rms132-1220**

Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on définit $T(f)$ en posant $T(f)(0) = f(0)$ et

$$\forall x \neq 0, \quad T(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

1. Démontrer que $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et que

$$\forall x > 0, \quad x[T(f)]'(x) + T(f)(x) = f(x).$$

2. Démontrer que $T(f)$ est continue en 0. En déduire que T est bien un endomorphisme de E .
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, une valeur propre de T .
- 3.a. Démontrer que $\lambda \neq 0$.
- 3.b. Démontrer qu'un vecteur propre de T associé à une valeur propre λ est une solution de l'équation différentielle suivante.

$$\forall x > 0, \quad y'(x) = \frac{1 - \lambda}{\lambda x} y(x)$$

En déduire que le spectre de T est contenu dans $]0, 1]$.

Exercice 39**rms134-1479**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, une fonction deux fois dérivable et majorée. On suppose qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f''(t) \geq \alpha^2 f(t). \quad (*)$$

1. La fonction f est convexe.
2. La dérivée f' est négative.
3. La fonction f tend vers une limite finie en $+\infty$. (Préciser laquelle.)
4. La dérivée f' tend vers une limite finie en $+\infty$. (Préciser laquelle.)
5. La fonction $\alpha^2 f^2 - (f')^2$ est négative.
6. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$f(t) \leq f(0)e^{-\alpha t}.$$

Exercice 40**rms134-1522**

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

1. On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + f'(x) = e^{-x}.$$

Démontrer que f tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

2. Plus généralement, on suppose que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + f'(x) = 0.$$

Démontrer que f tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

Exercice 41**rms135-767**

Trouver les fonctions dérivables $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = f(1/x). \quad (*)$$

Exercice 42**rms135-784**

Soit $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, une application continue de période $T > 0$. Démontrer qu'il existe un nombre complexe $\lambda \neq 0$ et une application $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et non identiquement nulle telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = A(t)X(t) \quad \text{et} \quad X(t+T) = X(t).$$

Exercice 43**rms135-962**

On considère l'équation différentielle

$$x(1-x)y''(x) + (1-3x)y'(x) - y(x) = 0 \quad (E)$$

1. Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.
2. Résoudre (E) sur un intervalle I sans singularité.
3. Peut-on raccorder les solutions de part et d'autre d'une singularité?

Exercice 44**rms135-963**

On considère l'équation différentielle suivante.

$$x^2 y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 2(1+x) \quad (E)$$

1. Déterminer les solutions de l'équation homogène (H) associée à (E) qui sont de la forme $y(x) = x^\alpha$.
2. En déduire les solutions de (E) sur $I_+ =]0, +\infty[$ et sur $I_- =]-\infty, 0[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}$?

Exercice 45**rms135-964**

1. On considère l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = Ax(t) \quad (H)$$

où $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Démontrer que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A si, et seulement si, il existe un vecteur *non nul* $x_\lambda \in \mathbb{R}^3$ tel que la fonction

$$f_\lambda = [t \mapsto e^{\lambda t} x_\lambda]$$

soit une solution de l'équation (H).

2. Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{a,b,c}(t) = \begin{pmatrix} be^t + ce^{-t} \\ 2a - be^t \\ a + ce^{-t} \end{pmatrix}$$

et $F = \{f_{a,b,c}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

- 2.a. Démontrer que F est un espace vectoriel. Préciser sa dimension.
- 2.b. Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall f \in F, \forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = Mf(t).$$

Quel est le spectre de M ?

Exercice 46**rms135-1151**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice diagonalisable telle que $\text{tr } A > 0$. On suppose qu'il existe une fonction $x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = Ax(t) \quad \text{et que} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0.$$

Démontrer qu'il existe une forme linéaire $\ell \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ non nulle telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \ell(x(t)) = 0.$$

Exercice 47**rms135-1575**

On considère l'équation différentielle suivante.

$$\forall t \in I =]0, +\infty[, \quad t^2 x''(t) + tx'(t) + x(t) = \frac{1}{t} + t \quad (E)$$

1. Que prévoit le Théorème de Cauchy-Lipschitz pour l'équation (E)?
2. Soient $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $g = [x \mapsto f(e^x)]$. Démontrer que f est solution de (E) sur I si, et seulement si, g est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle du second ordre (qu'on déterminera).
3. Résoudre l'équation (E).

Exercice 48**rms135-1577**

1. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que A est diagonalisable en explicitant une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

2. On considère le système différentiel suivant.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = AX(t) \quad (S_1)$$

Démontrer que $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ est une solution de (S_1) si, et seulement si, $U = P^{-1}X$ est une solution du système différentiel

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) = DY(t). \quad (\Delta_1)$$

En déduire les solutions de (S_1) .

3. On considère le système différentiel suivant.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X''(t) = AX(t) \quad (S_2)$$

3. a. Résoudre le système (S_2) .

3. b. Soit E , l'ensemble des solutions bornées sur $\mathbb{R}$ de (S_2) . Démontrer que E est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

Solution 1

14-01

On résout ici une équation différentielle du second ordre en résolvant successivement deux équations du premier ordre. Je vous propose deux autres méthodes pour résoudre cette équation et nous verrons enfin comment on peut réussir à décomposer une équation du second ordre en deux équations du premier ordre (au moins dans le cas d'une équation à coefficients constants).

On note $I =]0, +\infty[$.

Considérons une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. La fonction g définie par

$$\forall t \in I, \quad g(t) = tf'(t) + f(t)$$

est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (car f et f' sont de classe $\mathcal{C}^1$ et on effectue des opérations sur les fonctions qui conserve le caractère $\mathcal{C}^1$). De plus,

$$\forall t \in I, \quad g'(t) = tf''(t) + 2f'(t)$$

et par conséquent

$$\forall t \in I, \quad tg'(t) - 2g(t) = t^2f''(t) - 2f(t).$$

Il est alors clair que

$$\forall t \in I, \quad tg'(t) - 2g(t) = \frac{3}{t} \iff t^2f''(t) - 2f(t) = \frac{3}{t}.$$

Nous allons maintenant résoudre l'équation en g .

Dans un premier temps, nous allons calculer la fonction g .

Une fonction $y \in \mathcal{C}^1(I)$ est solution de $ty'(t) - 2y(t) = 0$ sur I si, et seulement si, il existe une constante K telle que

$$\forall t \in I, \quad y(t) = Kt^2.$$

On cherche ensuite une solution particulière de la forme $K(t)t^2$ où la fonction K est supposée de classe $\mathcal{C}^1$. On trouve alors

$$\forall t \in I, \quad t \cdot K'(t) \cdot t^2 = \frac{3}{t}, \quad \text{soit} \quad K'(t) = \frac{3}{t^4} = \frac{d}{dt} \left(\frac{-1}{t^3} \right).$$

La solution générale est donc

$$\forall t \in I, \quad g(t) = \frac{-1}{t^3} \cdot t^2 + Kt^2 = \underbrace{\frac{-1}{t}}_{\text{SP}} + \underbrace{Kt^2}_{\text{EH}}.$$

Dans un second temps, nous calculons la fonction f , solution de l'équation différentielle suivante.

$$\forall t \in I, \quad tx'(t) + x(t) = g(t) = \frac{-1}{t} + Kt^2.$$

Bien entendu, la méthode est exactement la même !

Une fonction $x \in \mathcal{C}^1(I)$ est solution de l'équation homogène $tx'(t) + x(t) = 0$ sur I si, et seulement si, il existe une constante C telle que

$$\forall t \in I, \quad x(t) = \frac{C}{t}.$$

On cherche maintenant une solution particulière de la forme $\frac{C(t)}{t}$ où la fonction C est de classe $\mathcal{C}^1$. On trouve alors

$$\frac{-1}{t} + Kt^2 = t \cdot \frac{C'(t)}{t} = C'(t).$$

La solution générale est donc

$$\forall t \in I, \quad f(t) = \frac{1}{t} \cdot \left(-\ln t + \frac{K}{3}t^3 \right) + \frac{C}{t} = \underbrace{\frac{C}{t} + K_2t^2}_{\text{SP}} - \underbrace{\frac{\ln t}{t}}_{\text{EH}}.$$

▮ Comme d'habitude, on a tiré parti du fait que la constante K était quelconque pour remplacer le facteur constant K_3 par le facteur constant K_2 , ce qui allège un peu l'expression de la solution générale.

✦ **Première variante.**

Si on cherche les solutions de l'équation homogène sous la forme $x(t) = t^\alpha$, on aboutit rapidement à

$$\forall t \in I, \quad [\alpha(\alpha - 1) - 2]t^\alpha = 0$$

et donc à $(\alpha + 1)(\alpha - 2) = 0$.

▮ Le détail des calculs (s'ils sont bien menés) rend la réciproque inutile.

Il reste alors à appliquer la méthode de variations des constantes pour en déduire la solution générale de l'équation complète. Vérifiez que vous savez faire sans hésitation!

✦ **Deuxième variante.**

Avec $t = e^u$, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $K_1 e^{-u} + K_2 e^{2u}$. C'est trop beau pour passer à côté! Nous allons changer de variable en posant $t = e^u$.

On considère une fonction $f \in \mathcal{C}^2(I)$ et on lui associe la fonction φ définie par

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \varphi(u) = f(\underbrace{e^u}_{\in I}) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \forall t \in I, \quad f(t) = \varphi(\ln t).$$

D'après les compositions de fonctions :

$$\varphi : \mathbb{R} \xrightarrow{\exp} I \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad \quad f : I \xrightarrow{\ln} \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$$

la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I .

Comme

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(u) = e^u f'(e^u) \quad \text{et} \quad \varphi''(u) = e^u f'(e^u) + e^{2u} f''(e^u)$$

alors

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \varphi''(u) - \varphi'(u) - 2\varphi(u) = (e^u)^2 f''(e^u) - 2f(e^u)$$

et comme $\exp$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur I , on en déduit que

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \varphi''(u) - \varphi'(u) - 2\varphi(u) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall t \in I, \quad t^2 f''(t) - 2f(t) = 0.$$

On a ainsi traduit l'équation homogène en une équation homogène à coefficients constants, dont la résolution est simplissime.

▮ **À propos des équations à coefficients constants.**

Nous venons de voir trois méthodes de résolution, toutes trois partant d'une astuce calculatoire : la décomposition magique en deux équations du premier ordre ; la recherche de solutions d'un type très particulier ; un changement de variable miraculeux.

Je vais maintenant relier la première et la troisième astuce, histoire de vous indiquer ce qui se trame en coulisses.

✦ On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et l'endomorphisme $D \in L(E)$ défini par

$$\forall f \in E, \quad D(f) = f'.$$

L'espace des solutions de l'équation homogène apparaît alors comme le noyau d'un endomorphisme :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad f''(u) - f'(u) - 2f(u) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (D^2 - D - 2I_E)(f) = 0_E.$$

Cet endomorphisme est appelé un **opérateur différentiel**.

✦ Comme cet endomorphisme est un polynôme en D , on factorise ce polynôme pour décomposer l'endomorphisme :

$$D^2 - D - 2I_E = (D + I_E) \circ (D - 2I_E) = (D - 2I_E) \circ (D + I_E).$$

Cela nous permet de caractériser le noyau de cet endomorphisme en deux étapes.

$$\begin{aligned} f \in \text{Ker}(D^2 - D - 2I_E) &\Longleftrightarrow (D^2 - D - 2I_E)(f) = 0_E \\ &\Longleftrightarrow (D - 2I_E)[(D + I_E)(f)] = 0_E \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} g \in \text{Ker}(D - 2I_E) \\ (D + I_E)(f) = g \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} \forall u \in \mathbb{R}, & g'(u) - 2g(u) = 0 \\ \forall u \in \mathbb{R}, & f'(u) + f(u) = g(u) \end{cases} \end{aligned}$$

Comme on le voit sur cet exemple simple, il est naturel de ramener la résolution d'une équation du second ordre à la résolution successive de deux équations du premier ordre.

✦ Ça ne veut pas dire que ce procédé soit toujours simple à mettre en œuvre, ni même qu'il soit toujours possible de le mettre en œuvre!

Solution 2**14-02****1. Changement d'inconnue**

- Soit $I =]0, +\infty[$. Pour tout $t \in I$, le réel t^λ est défini et strictement positif. Par conséquent,

$$x(t) = t^\lambda z(t) \iff z(t) = t^{-\lambda} x(t)$$

et la fonction x est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I si, et seulement si, la fonction z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I .

- Pour tout $t > 0$, avec $x(t) = t^\lambda z(t)$, on a

$$\begin{aligned} x'(t) &= \lambda \frac{x(t)}{t} + t^\lambda z'(t) \\ x''(t) &= \lambda(\lambda - 1) \frac{x(t)}{t^2} + 2\lambda t^{\lambda-1} z'(t) + t^\lambda z''(t). \end{aligned}$$

▮ Il est judicieux de penser à utiliser la formule de Leibniz pour calculer la dérivée seconde de ce produit.

Par conséquent, pour tout $t > 0$, l'expression

$$t^2 x''(t) + t x'(t) + (t^2 - \lambda^2) x(t)$$

est égale à

$$t^{\lambda+2} z''(t) + (2\lambda + 1) t^{\lambda+1} z'(t) + t^{\lambda+2} z(t).$$

On peut factoriser par $t^{\lambda+1} > 0$ et en déduire que

$$\forall t > 0, \quad t^2 x''(t) + t x'(t) + (t^2 - \lambda^2) x(t) = 0 \quad (B_\lambda)$$

si, et seulement si,

$$\forall t > 0, \quad t z''(t) + (2\lambda + 1) z'(t) + t z(t) = 0. \quad (B'_\lambda)$$

▮ Ce si, et seulement si, est capital pour la suite!

2. Résolution dans le cas $\lambda = -1/2$

- Pour $\lambda = -1/2$, sur l'intervalle I où t ne s'annule pas, l'équation (B'_λ) devient une équation à coefficients constants :

$$\forall t > 0, \quad z''(t) + z(t) = 0.$$

Par conséquent, z est une solution de (B'_λ) si, et seulement si, il existe deux constantes A et B telles que

$$\forall t > 0, \quad z(t) = A \cos t + B \sin t.$$

On en déduit que x est une solution (B_λ) si, et seulement si, il existe deux constantes A et B telles que

$$\forall t > 0, \quad x(t) = t^{-1/2} z(t) = A \frac{\cos t}{\sqrt{t}} + B \frac{\sin t}{\sqrt{t}}.$$

3. Résolution dans le cas $\lambda = 1/2$

- Le paramètre λ est élevé au carré dans l'équation (B_λ) . Par conséquent, les solutions de $(B_{-\lambda})$ sont aussi les solutions de (B_λ) : même équation, mêmes solutions!

- D'après la première partie, une fonction z est solution de $(B'_{1/2})$ si, et seulement si, $x(t) = \sqrt{t} \cdot z(t)$ est solution de $(B_{1/2})$.

D'après ce qui précède, x est une solution de $(B_{1/2})$ si, et seulement si, il existe deux constantes A et B telles que

$$\forall t > 0, \quad x(t) = A \frac{\cos t}{\sqrt{t}} + B \frac{\sin t}{\sqrt{t}}.$$

Donc z est une solution de $(B'_{1/2})$ si, et seulement si, il existe deux constantes A et B telles que

$$\forall t > 0, \quad z(t) = \frac{x(t)}{\sqrt{t}} = A \frac{\cos t}{t} + B \frac{\sin t}{t}.$$

▮ On peut résumer la démarche que nous venons de suivre par un diagramme.

$$(B'_{-1/2}) \longrightarrow (B_{-1/2}) = (B_{1/2}) \longrightarrow (B'_{1/2})$$

Solution 3

14-03

1. Changement de variable

- La fonction $[s \mapsto e^s]$ réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Sa réciproque $[t \mapsto \ln t]$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Par conséquent, si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, alors la composée g définie par

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto e^s \longmapsto f(e^s) = g(s) \end{aligned}$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et, réciproquement, si g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, alors la composée f définie par

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \ln t \longmapsto g(\ln t) = f(t) \end{aligned}$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Si $g(s) = f(e^s)$ où f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors

$$\begin{aligned} \forall s \in \mathbb{R}, \quad g'(s) &= e^s f'(e^s), \\ g''(s) &= e^s f'(e^s) + e^{2s} f''(e^s) \end{aligned}$$

si bien que, pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$g''(s) + 2g'(s) + 4g(s) = (e^s)^2 f''(e^s) + 3e^s f'(e^s) + 4f(e^s).$$

On en déduit que

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad g''(s) + 2g'(s) + 4g(s) = e^s + 4$$

si, et seulement si,

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad (e^s)^2 f''(e^s) + 3e^s f'(e^s) + 4f(e^s) = e^s + 4.$$

Comme $[s \mapsto e^s = t]$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, cette dernière équation équivaut à

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad t^2 f''(t) + 3t f'(t) + 4f(t) = t + 4.$$

2.

- L'équation différentielle vérifiée par f est linéaire, mais on ne connaît pas de méthode simple pour la résoudre. Au contraire, l'équation différentielle vérifiée par la fonction auxiliaire g est linéaire et à coefficients constants : on connaît donc une recette pour résoudre cette équation.*

Résolution de l'équation auxiliaire

- Les racines de l'équation caractéristique sont $-1 \pm i\sqrt{3}$, donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad y_H(s) = e^{-s}(K_1 \cos \sqrt{3}s + K_2 \sin \sqrt{3}s).$$

- Le second membre est la superposition d'une exponentielle et d'une constante.

Comme $[s \mapsto e^s]$ n'est pas une solution de l'équation homogène, on sait qu'il existe une solution particulière de

$$y''(s) + 2y'(s) + 4y(s) = e^s$$

de la forme $y_1(s) = \lambda e^s$. En substituant, on trouve $\lambda = 1/7$.

De même, comme $[s \mapsto 4]$ n'est pas une solution de l'équation homogène, on sait qu'il existe une solution particulière de

$$y''(s) + 2y'(s) + 4y(s) = 4$$

de la forme $y_2(s) = \mu$. En substituant, on trouve $\mu = 1$.

D'après le principe de superposition, une fonction y est solution de l'équation complète

$$y''(s) + 2y'(s) + 4y(s) = e^s + 4$$

si, et seulement si, il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que

$$\begin{aligned} \forall s \in \mathbb{R}, \quad y(s) &= y_H(s) + y_1(s) + y_2(s) \\ &= e^{-s}(K_1 \cos \sqrt{3}s + K_2 \sin \sqrt{3}s) + \frac{e^s}{7} + 1. \end{aligned}$$

Résolution

- D'après la première partie, une fonction f est solution de l'équation

$$\forall t > 0, \quad t^2 x''(t) + 3tx'(t) + 4x(t) = t + 4 \quad (*)$$

si, et seulement si, la fonction $g = [s \mapsto f(e^s)]$ est une solution de l'équation auxiliaire.

- On en déduit que f est solution de $(*)$ si, et seulement si, il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que

$$\begin{aligned} \forall t > 0, \quad f(t) &= y(\ln t) \\ &= e^{-\ln t} [K_1 \cos(\sqrt{3} \ln t) + K_2 \sin(\sqrt{3} \ln t)] + \frac{e^s}{7} + 1 \\ &= K_1 \frac{\cos(\sqrt{3} \ln t)}{t} + K_2 \frac{\sin(\sqrt{3} \ln t)}{t} + \frac{t}{7} + 1. \end{aligned}$$

Solution 4**14-04****1. Changement de variable**

- La fonction $[\theta \mapsto \tan \theta]$ réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^\infty$ de

$$I =]-\pi/2, \pi/2[$$

sur $\mathbb{R}$ et sa réciproque $[t \mapsto \text{Arctan } t]$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

- Par conséquent, si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, alors la composée g définie par

$$\begin{aligned} I &\longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta &\longmapsto \tan \theta \longmapsto f(\tan \theta) = g(\theta) \end{aligned}$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et, réciproquement, si g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I , alors la composée f définie par

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \text{Arctan } t \longmapsto g(\text{Arctan } t) = f(t) \end{aligned}$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $g(\theta) = f(\tan \theta)$, alors

$$\begin{aligned} \forall \theta \in I, \quad g'(\theta) &= (1 + \tan^2 \theta) f'(\tan \theta) \\ g''(\theta) &= 2 \tan \theta (1 + \tan^2 \theta) f'(\tan \theta) + (1 + \tan^2 \theta)^2 f''(\tan \theta) \end{aligned}$$

et par conséquent l'expression

$$g''(\theta) - 2g'(\theta) + g(\theta)$$

est égale à

$$(1 + \tan^2 \theta)^2 f''(\tan \theta) + 2(1 + \tan^2 \theta)(\tan \theta - 1) f'(\tan \theta) + f(\tan \theta).$$

On a déjà remarqué que le changement de variable $t = \tan \theta$ réalisait une bijection entre l'intervalle I et l'intervalle $\mathbb{R}$, donc l'équation différentielle

$$\forall \theta \in I, \quad g''(\theta) - 2g'(\theta) + g(\theta) = 0$$

équivalait à l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (1 + t^2)^2 f''(t) + 2(1 + t^2)(t - 1) f'(t) + f(t) = 0. \quad (*)$$

2. Résolution de l'équation auxiliaire

- L'équation différentielle $y''(\theta) - 2y'(\theta) + y(\theta) = 0$ est linéaire, homogène et à coefficients constants. Son équation caractéristique est

$$X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2 = 0$$

donc g est solution de cette équation différentielle si, et seulement si, il existe deux constantes A et B telles que

$$\forall \theta \in I, \quad g(\theta) = (A\theta + B)e^\theta.$$

Résolution

- D'après ce qui précède, une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ est solution de l'équation différentielle $(*)$ si, et seulement si, il existe deux constantes A et B telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = (A \cdot \text{Arctan } t + B)e^{\text{Arctan } t}.$$

Solution 5**14-05**

Le système étudié se traduit sous la forme $X'(t) = A.X(t)$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

et se résout habituellement en trigonalisant la matrice A .

✎ Nous allons présenter trois méthodes :

- la première est une trigonalisation rapide, le but étant de résoudre au plus vite le système différentiel ;
- la seconde est une trigonalisation poussée, le but étant d'obtenir la **forme normale de Jordan** de A (ce qui fait passer la résolution du système différentiel au second plan) ;
- la troisième méthode se donne pour but de calculer la matrice $\exp(tA)$ le plus vite possible.

✎ **Analyse de la matrice A**

On vérifie sans peine que

- le polynôme caractéristique de A est le polynôme $X^2(X + 1)$;
- le sous-espace propre $\text{Ker}(A + I_3)$ est la droite dirigée par $(1, -1, -2)$;
- le sous-espace propre $\text{Ker } A$ est la droite dirigée par $(1, 2, 0)$.

Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres ($1 + 1 = 2$) est strictement inférieure à la dimension de l'espace (3), la matrice A n'est pas diagonalisable.

Comme le polynôme caractéristique de A est scindé, cette matrice est trigonalisable. En tenant compte de son spectre et des multiplicités respectives de ses deux valeurs propres, la matrice A est donc semblable à une matrice T de la forme

$$\begin{pmatrix} -1 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

✎ Plus précisément, puisqu'on a caractérisé les deux sous-espaces propres, dès que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & * \\ -1 & 2 & * \\ -2 & 0 & * \end{pmatrix}$$

est inversible, on a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En effet, la première (resp. deuxième) colonne de P est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1 (resp. 0), ce qui détermine les deux premières colonnes de $P^{-1}AP$.

D'autre part, les matrices A et $P^{-1}AP$ sont semblables, donc leurs traces sont égales, c'est pourquoi le troisième coefficient diagonal de $P^{-1}AP$ est égal à 0.

Il ne reste plus qu'à choisir la troisième colonne de P .

✎ **Première méthode**

Quelle que soit la manière de compléter la matrice P , on sait que la matrice $P^{-1}AP$ sera nécessairement triangulaire et cela suffit pour rendre facile la résolution du système différentiel. On n'a donc plus qu'une seule contrainte : choisir une troisième colonne telle que la matrice P soit inversible.

Le choix le plus simple est ici

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

✎ Quels sont les autres choix possibles ? En fait, il suffit que la troisième colonne n'appartienne pas au plan engendré par les deux premières colonnes.

On peut trouver les coefficients d'une équation cartésienne de ce plan en calculant le produit vectoriel des deux premières colonnes. Il suffira alors de choisir une colonne qui ne vérifie pas cette équation cartésienne.

Mais on peut aussi comprendre qu'en choisissant une colonne au hasard dans $\mathbb{R}^3$, la probabilité pour que cette colonne appartienne à un plan vectoriel donné est extrêmement faible : si on a un tempérament joueur, on pourra choisir la troisième colonne au hasard.

Pour déterminer la troisième colonne de $P^{-1}AP$, on revient à la définition de la matrice d'une application linéaire :

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En posant

$$Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t),$$

la résolution du système $X'(t) = A.X(t)$ équivaut à la résolution du système

$$Y'(t) = (P^{-1}AP).Y(t),$$

c'est-à-dire du système

$$\begin{cases} u' = -u - 2w \\ v' = 4w \\ w' = 0 \end{cases}.$$

Le triplet (u, v, w) est donc une solution si, et seulement si, il existe trois constantes réelles K_1, K_2, K_3 telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u(t) = K_1 e^{-t} - 2K_3, \\ v(t) = K_2 + 4K_3 t, \\ w(t) = K_3. \end{cases}$$

On en déduit que le triplet (x, y, z) est une solution du système initial si, et seulement si, il existe trois constantes réelles K_1, K_2 et K_3 telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K_1 e^{-t} - 2K_3 \\ K_2 + 4K_3 t \\ K_3 \end{pmatrix}.$$

• Deuxième méthode

D'après un théorème de Camille Jordan (1838-1922), la matrice A est semblable à la matrice

$$T = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est à la fois diagonale par blocs et triangulaire.

Analysons cette matrice T : en considérant qu'elle représente l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par $A = \mathcal{M}_{\text{can}}(f)$ dans une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, il faut que :

Première colonne • ε_1 soit un vecteur propre de f associé à -1 ;

Deuxième colonne • ε_2 soit un vecteur propre de f associé à 0 , c'est-à-dire un vecteur du noyau de f ;

Troisième colonne • $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2$ et donc que ε_3 appartienne au noyau de f^2 sans appartenir au noyau de f (il faut que $\varepsilon_2 \neq 0$, c'est un vecteur de base).

On voit clairement que le rang de la matrice

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

est égal à 1. Chaque ligne de cette matrice nous donne donc une équation cartésienne du noyau de A^2 :

$$\text{Ker } A^2 = [2x - y + z = 0].$$

On choisit un vecteur dans $\text{Ker } A^2$ mais pas dans $\text{Ker } A$, c'est-à-dire pas proportionnel à $(1, 2, 0)$: prenons par exemple $\varepsilon_3 = (0, 1, 1)$ et posons alors

$$\varepsilon_2 = f(\varepsilon_3) = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

▮ Quel que soit le choix de $\varepsilon_3 \in \text{Ker } f^2$, le vecteur $f(\varepsilon_3)$ appartient au noyau de f et est donc proportionnel à $(1, 2, 0)$ (pas forcément égal à $(1, 2, 0)$ comme c'est le cas ici) : en posant $\varepsilon_2 = f(\varepsilon_3)$, on est sûr que ε_2 sera un vecteur propre de A associé à 0. La seule contrainte à respecter est donc de choisir ε_3 dans $\text{Ker } f^2 \setminus \text{Ker } f$ (pour que $\varepsilon_2 \neq 0$!).

En posant cette fois

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on obtient

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le système triangulaire qui s'en déduit n'est pas plus simple que le précédent système triangulaire — pas plus compliqué non plus!

$$\begin{cases} u' = -u \\ v' = w \\ w' = 0 \end{cases}$$

• Variante de la deuxième méthode

Comme le polynôme $(X+1)X^2$ est un polynôme annulateur de A et que les facteurs $(X+1)$ et X^2 sont premiers entre eux, on déduit du Théorème de décomposition des noyaux que

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(A+I) \oplus \text{Ker } A^2.$$

Les deux sous-espaces $\text{Ker}(A+I)$ et $\text{Ker } A^2$ sont stables par A (ce sont tous les deux le noyau d'un polynôme en A). Par conséquent, en choisissant une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à cette décomposition en somme directe, on trouvera une matrice semblable à A et diagonale par blocs.

On choisit $\varepsilon_1 = (1, -1, -2)$ comme vecteur directeur de la droite $\text{Ker}(A+I)$ (c'est le choix qui *me* paraît le plus simple — mais c'est une question de goût).

Il reste à choisir une base de $\text{Ker } A^2 = [2x - y + z = 0]$: le plus simple est de choisir pour commencer un vecteur de $\text{Ker } A$ (= vecteur propre associé à 0)

$$\varepsilon_2 = (1, 2, 0)$$

et de compléter ensuite comme on veut :

$$\varepsilon_3 = (1, 1, -1).$$

Par choix de ε_2 , on a $f(\varepsilon_2) = 0$ et comme ε_3 appartient au sous-espace stable $\text{Ker } A^2 = \text{Vect}(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$, il existe deux scalaires a et b tels que

$$f(\varepsilon_3) = a \cdot \varepsilon_2 + b \cdot \varepsilon_3.$$

Effectivement,

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3.$$

Bref, dans cette nouvelle base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, la matrice de f est

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on peut terminer la résolution comme plus haut.

▮ J'ai déjà expliqué plus haut pourquoi on savait (avant de faire les calculs!) que b serait nul et que $f(\varepsilon_3)$ serait proportionnel à ε_2 . Une seconde lecture ne peut pas faire de mal!

• Troisième méthode

Pour calculer $\exp(tA)$, il faut calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour aller vite, il faut éviter de changer de base.

On connaît un polynôme annulateur de A : $(X+1)X^2$, qui nous donne la relation

$$A^3 = -A^2.$$

▮ C'est le polynôme caractéristique, mais c'est aussi le polynôme minimal : pourquoi?

On en déduit par récurrence que

$$\forall n \geq 2, \quad A^n = (-1)^n A^2$$

et donc que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot A^n = I_3 + t \cdot A + \left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \right) \cdot A^2 \\ &= I_3 + t \cdot A + (e^{-t} - 1 + t) \cdot A^2 \\ &= (I_3 - A^2) + t \cdot (A + A^2) + e^{-t} \cdot A^2. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = (I_3 - A^2) \cdot X(0) + t \cdot (A + A^2) \cdot X(0) + e^{-t} \cdot A^2 \cdot X(0)$$

ce qui nous donne la solution du système différentiel associée à la condition initiale

$$(t_0 = 0, X_0 = X(0)).$$

Solution 6

14-06

1. Trigonalisation de A

La matrice A est triangulaire par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & * & * \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique P_0 est donc égal au produit de $(X - 3)$ et du polynôme caractéristique du bloc

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comme $\text{tr } B = 4 = 1 + 3$ et que $\det B = 3 = 1 \times 3$, les valeurs propres de B sont 1 et 3 et donc

$$P_0 = (X - 3)^2(X - 1).$$

La dimension d'un sous-espace propre est comprise entre 1 et la multiplicité de la valeur propre associée. Ainsi, le sous-espace propre associé à une valeur propre simple est toujours une droite vectorielle.

Le sous-espace propre $\text{Ker}(A - I_3)$ est donc une droite et comme

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

on peut remarquer que $C_2 - C_3 = 0$ et en déduire que

$$\text{Ker}(A - I_3) = \mathbb{R} \cdot \varepsilon_1 \quad \text{où} \quad \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La dimension d'un sous-espace caractéristique est toujours égale à la multiplicité de la valeur propre associée.

Le sous-espace caractéristique $\text{Ker}(A - 3I_3)^2$ est un plan et comme le rang de la matrice

$$A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est égal à 2, le sous-espace propre $\text{Ker}(A - 3I_3)$ est une droite vectorielle :

$$\text{Ker}(A - 3I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

▮ Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres est strictement inférieure à la dimension de l'espace, la matrice A n'est pas diagonalisable.

Comme son polynôme caractéristique est scindé, elle est néanmoins trigonalisable.

La matrice

$$(A - 3I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

nous donne une équation cartésienne du sous-espace caractéristique :

$$\text{Ker}(A - 3I_3)^2 = [y - z = 0].$$

▮ Si un vecteur du sous-espace caractéristique $\text{Ker}(A - \lambda I_n)^m$ est un vecteur propre de A , c'est nécessairement un vecteur propre associé à λ .

Choisissons un vecteur ε_3 dans ce sous-espace caractéristique, en veillant à ce que ce vecteur ne soit pas un vecteur propre de A : ce vecteur doit vérifier l'équation cartésienne sans être proportionnel au vecteur $(1, 0, 0)$. Le vecteur

$$\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

convient à l'évidence.

Posons maintenant

$$\varepsilon_2 = (A - 3I_3)\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

▮ Par hypothèse, $\varepsilon_3 \in \text{Ker}(A - 3I_3)^2$ et $(A - 3I_3)\varepsilon_3 \neq 0$.

On en déduit que $(A - 3I_3)\varepsilon_2 = (A - 3I_3)^2\varepsilon_3 = 0$ et donc que

$$\varepsilon_2 \in \text{Ker}(A - 3I_3) \subset \text{Ker}(A - 3I_3)^2.$$

▮ On aurait pu remarquer que ε_3 appartenait au sous-espace caractéristique $\text{Ker}(A - 3I_3)^2$ et que ce sous-espace est stable par A (en tant que noyau d'un polynôme en A) pour en déduire que ε_2 appartenait aussi à ce sous-espace caractéristique.

Comme ε_2 est un vecteur propre et que ε_3 n'est pas un vecteur propre, ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels. Par conséquent, le couple $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une famille libre de deux vecteurs dans le sous-espace caractéristique $\text{Ker}(A - 3I_3)^2$. Comme ce sous-espace est un plan, on en déduit que $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de ce plan.

▮ Le raisonnement qui précède ne dépend pas du vecteur ε_3 choisi, il est strictement théorique.

▮ D'après le Théorème de décomposition des noyaux, comme $\chi_A = (X - 3)^2(X - 1)$ est un polynôme annulateur de A (Théorème de Cayley-Hamilton) et que les facteurs $(X - 3)^2$ et $(X - 1)$ sont premiers entre eux,

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(A - I_3) \oplus \text{Ker}(A - 3I_3)^2.$$

Par conséquent, en concaténant la "famille" (ε_1) , qui est une base du sous-espace propre $\text{Ker}(A - I_3)$, avec la famille $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$, qui est une base du sous-espace caractéristique $\text{Ker}(A - 3I_3)^2$, on obtient une base

$$\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$$

de $\mathbb{R}^3$.

▮ Récapitulons ce qu'on a décidé pour construire la base $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned} A\varepsilon_1 &= \varepsilon_1 && \text{(vecteur propre associé à 1)} \\ A\varepsilon_2 &= 3 \cdot \varepsilon_2 && \text{(vecteur propre associé à 3)} \\ A\varepsilon_3 &= 3\varepsilon_3 + \varepsilon_2 && \text{(définition du vecteur } \varepsilon_2) \end{aligned}$$

Notons enfin f , l'endomorphisme représenté par la matrice A dans la base canonique.

Dans la base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, la matrice de f est

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Comme A et J représente le même endomorphisme f dans deux bases différentes, ces deux matrices sont semblables.

✎ La matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ s'obtient en écrivant en colonnes les vecteurs de $\mathcal{B}$.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'après la formule de changement de base,

$$J = P^{-1}AP.$$

On va voir par la suite que la connaissance de la matrice P est inutile.

• Puissances de A avec le polynôme minimal

✎ La connaissance d'un polynôme annulateur scindé permet de calculer assez facilement les puissances d'une matrice. Méthode à maîtriser !

On sait que le polynôme minimal de A divise le polynôme caractéristique de A (Théorème de Cayley-Hamilton) et que ces deux polynômes unitaires ont mêmes racines. Il n'y a donc que deux candidats possibles : $\mu = (X-3)(X-1)$ et $\mu = (X-3)^2(X-1)$.

Comme A n'est pas diagonalisable, son polynôme minimal n'est pas scindé à racines simples, donc $\mu = (X-3)^2(X-1) = P_0$.

• Comme P_0 est un polynôme annulateur de degré 3, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple (Q_k, R_k) de polynômes tels que

$$X^k = P_0 Q_k + R_k \quad \text{avec} \quad \deg R_k \leq 2. \quad (1)$$

Il existe donc trois réels a_k, b_k et c_k tels que

$$R_k = a_k X^2 + b_k X + c_k.$$

On obtient deux relations en substituant les racines de P_0 à X dans la division euclidienne (1).

$$\begin{cases} a_k + b_k + c_k = 1 \\ 9a_k + 3b_k + c_k = 3^k \end{cases}$$

Comme P_0 possède une racine double, on dérive (1) :

$$kX^{k-1} = P'_0 Q_k + P_0 Q'_k + R'_k \quad \text{avec} \quad R'_k = 2a_k X + b_k$$

et en substituant la racine double à X dans cette égalité, on obtient une troisième relation.

$$6a_k + b_k = k3^{k-1}$$

• Il s'agit donc de résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} a_k + b_k + c_k = 1 \\ 8a_k + 2b_k = 3^k - 1 \\ 6a_k + b_k = k3^{k-1} \end{cases}$$

(On a effectué $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$.)

Il faut remarquer que a_k et b_k vérifient un système 2×2 , qu'on peut résoudre avec les formules de Cramer. Avec un peu de concentration, on trouve :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k &= \frac{-1}{4}(3^k - 2k \cdot 3^{k-1} - 1), \\ b_k &= \frac{-1}{4}(-6 \cdot 3^k + 8k \cdot 3^{k-1} + 6), \\ c_k &= \frac{-1}{4}(5 \cdot 3^k - 6k \cdot 3^{k-1} - 9). \end{aligned}$$

• Comme $P_0(A) = 0_3$, on en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = \frac{-3^k}{4}[A^2 - 6A + 5I_3] + \frac{k3^{k-1}}{2}[A^2 - 4A + 3I_3] + \frac{1}{4}[A^2 - 6A + 9I_3]$$

ce qu'il vaut mieux écrire

$$A^k = \frac{-3^k}{4}(A - I_3)(A - 5I_3) + \frac{k3^{k-1}}{2}(A - I_3)(A - 3I_3) + \frac{1}{4}(A - 3I_3)^2$$

pour simplifier le calcul des produits matriciels.

▮ *Le calcul de A^2 n'est pas très compliqué, mais il faut ensuite calculer simplifier trois polynômes en A . Les matrices $(A - I_3)$, $(A - 3I_3)$ et $(A - 3I_3)^2$ ont déjà été calculées et comme elles ne sont pas inversibles, les produits sont plus faciles à calculer.*

• Puissances de A avec l'identité de Bézout

On a appliqué plus haut le Théorème de décomposition des noyaux :

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(A - 3I_3)^2 \oplus \text{Ker}(A - I_3). \quad (2)$$

▮ *La résolution de l'équation de Bézout va nous permettre de calculer les projections associées à cette décomposition en somme directe, puis d'en déduire les puissances de A .*

• Les facteurs $P_1 = (X - 3)^2$ et $P_2 = (X - 1)$ étant premiers entre eux, les polynômes $Q_1 = (X - 1)$ et $Q_2 = (X - 3)^2$ sont premiers dans leur ensemble. On peut alors vérifier (avec la méthode habituelle) que

$$\frac{1}{4}(5 - X)Q_1 + \frac{1}{4}Q_2 = 1.$$

Les projections associées à la décomposition (2) sont donc

$$\Pi_1 = \frac{1}{4}(5I_3 - A)(A - I_3) \quad \text{et} \quad \Pi_2 = \frac{1}{4}(A - 3I_3)^2. \quad (3)$$

▮ *Il faut suivre les indices pour s'y retrouver : la projection Π_1 envoie sur le sous-espace caractéristique $\text{Ker}(A - 3I_3)^2 = \text{Ker } P_1(A)$ et la projection Π_2 envoie sur le sous-espace propre $\text{Ker}(A - I_3) = \text{Ker } P_2(A)$.*

On remarquera qu'on a déjà croisé ces deux matrices !

• Sur le sous-espace propre $\text{Ker}(A - I_3) = \text{Im } \Pi_2$, l'application $(A - I_3)$ est identiquement nulle. Par conséquent,

$$(A - I_3) \times \Pi_2 = 0_3 \quad \text{c'est-à-dire} \quad A \times \Pi_2 = \Pi_2. \quad (4)$$

De même, sur le sous-espace caractéristique $\text{Ker}(A - 3I_3)^2 = \text{Im } \Pi_1$, l'application $(A - 3I_3)^2$ est identiquement nulle :

$$(A - 3I_3)^2 \times \Pi_1 = 0_3. \quad (5)$$

D'après le cours, en restriction à ce sous-espace, la matrice A est la somme d'une homothétie et d'une matrice nilpotente. En effet, en posant

$$N = (A - 3I_3) \times \Pi_1,$$

on a

$$A \times \Pi_1 = 3\Pi_1 + N$$

mais aussi

$$(A - 3I_3)N = 0_3 \quad \text{c'est-à-dire} \quad AN = 3N.$$

Comme $P_0(A) = 0_3$, on peut vérifier que

$$N = \frac{1}{4}(A - 3I_3)(5I_3 - A)(A - I_3) = \frac{1}{2}(A - 3I_3)(A - I_3) \quad (6)$$

et donc que

$$N^2 = \frac{1}{4}(A - 3I_3)^2(A - I_3)^2 = 0_3.$$

• Bref :

$$A\Pi_1 = 3\Pi_1 + N, \quad A\Pi_2 = \Pi_2, \quad AN = 3N$$

et on démontre par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad A^k \Pi_1 = 3^k \Pi_1 + k 3^{k-1} N \quad \text{et} \quad A^k \Pi_2 = \Pi_2.$$

Comme $\Pi_1 + \Pi_2 = I_3$, on en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad A^k = 3^k \Pi_1 + k 3^{k-1} N + \Pi_2.$$

Comme $\Pi_1 + \Pi_2 = I_3$, cette relation est vraie aussi pour $k = 0$.

En revenant à (3) et (6),

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = \frac{3^k}{4} (5I_3 - A)(A - I_3) + \frac{k 3^{k-1}}{2} (A - 3I_3)(A - I_3) + \frac{1}{4} (A - 3I_3)^2.$$

♣ Exponentielle de tA

Par définition, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \cdot A^k.$$

Ayant calculé les puissances de A , on a fait le plus difficile! Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\exp(tA) = \frac{-e^{3t}}{4} (A - I_3)(A - 5I_3) + \frac{te^{3t}}{2} (A - I_3)(A - 3I_3) + \frac{e^t}{4} (A - 3I_3)^2$$

avec

$$(A - I_3)(A - 5I_3) = -2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (A - I_3)(A - 3I_3) = 4 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(La matrice $(A - 3I_3)^2$ a été calculée plus haut.)

2. Soit $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Le vecteur (x, y, z) appartient au plan d'équation $[ax + by + cz = 0]$ si, et seulement si,

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

♣ Mais oui, mais oui! C'est bien un produit scalaire!

Ce plan est donc stable par A si, et seulement si, l'équation précédente entraîne que

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Cela signifie que le noyau de la forme linéaire représentée par la matrice ligne

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} A$$

contient le noyau de la forme linéaire représentée par la matrice ligne $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ et donc qu'il existe une constante de proportionnalité $\lambda \in \mathbb{R}$ (éventuellement nulle) telle que

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} A = \lambda \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$$

ou encore que la colonne $(a, b, c)^T$ est un vecteur propre de A^T .

♣ Les matrices A et A^T ont mêmes valeurs propres : 1 et 3.

Calculons les sous-espaces propres de A^T .

$$\begin{aligned} \text{Ker}(A^T - I_3) &= \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \text{Ker}(A^T - 3I_3) &= \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les plans stables par A sont donc les plans d'équation

$$[0 \cdot x + 1 \cdot y - 1 \cdot z = 0] = [y - z = 0] \quad \text{et} \quad [0 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z = 0] = [y + z = 0].$$

3. Comme la matrice A est inversible (car $0 \notin \text{Sp}(A)$), la condition $X'(0) = (1, 1, 1)^\top$ peut aussi s'écrire

$$X(0) = A^{-1}X'(0) = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in [y - z = 0].$$

Pour une équation différentielle à coefficients constants, on sait que la solution du problème de Cauchy associé à la condition initiale ($t = 0, X(0) = (1/3, 1, 1)^\top$) est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \exp(tA)X(0).$$

Version pédestre

On vérifie directement sur l'expression de $\exp(tA)$ que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \exp(tA) = e^t \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et on en déduit immédiatement que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} X(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} X(0) = 0$$

c'est-à-dire que la trajectoire décrite par $X(t)$ est contenue dans le plan $[y - z = 0]$.

Version aquiline

Le calcul de $\exp(tA)$ avec le polynôme minimal nous a montré que la matrice $\exp(tA)$ était un polynôme en A (avec des coefficients qui dépendent de t).

Comme le plan $[y - z = 0]$ est stable par A , il est stable par n'importe quel polynôme en A et en particulier par $\exp(tA)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Et comme le vecteur position initiale $X(0)$ appartient à ce plan, le vecteur $X(t) = \exp(tA)X(0)$ appartient encore à ce plan pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Solution 7

14-07

1. Par hypothèse,

$$AX = \lambda X.$$

On en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k X = \lambda^k X$$

et donc que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \left(\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} A^k \right) \cdot X = \left(\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \lambda^k \right) \cdot X. \quad (*)$$

• Premier **rappel de topologie** : on considère une norme $\|\cdot\|$ sur l'espace $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et on suppose que $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente de scalaires qui tend vers le scalaire ℓ .

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|u_k \cdot X - \ell \cdot X\| = |u_k - \ell| \cdot \|X\|.$$

Cette norme tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$, donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k \cdot X = \ell \cdot X.$$

▮ Nous démontrerons que toutes les applications linéaires sur un espace vectoriel de dimension finie sont continues. Or l'application $[\lambda \mapsto \lambda \cdot X]$ est linéaire ! Donc elle est continue et le résultat que nous avons démontré par le calcul des normes n'est donc qu'un cas d'application du Théorème de composition des limites.

Deuxième **rappel de topologie** : on suppose que l'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est muni de la norme $\|\cdot\|$ subordonnée à la norme $\|\cdot\|$ précédemment choisie sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et on suppose que $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente de matrices qui tend vers la matrice L .

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \|M_k \cdot X - L \cdot X\| = \|(M_k - L) \cdot X\| \leq \|M_k - L\| \|X\|.$$

Par encadrement, cette norme tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$, donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} M_k.X = L.X.$$

▮ Comme $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont tous les deux des espaces vectoriels de dimension FINIE, toutes les normes existant sur ces deux espaces sont équivalentes.

En supposant que la suite des matrices converge vers la matrice L pour la norme subordonnée à la norme choisie sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on suppose en fait que cette suite converge vers L pour une norme quelconque sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Par ailleurs, l'application $[M \mapsto MX]$ est linéaire! Comme précédemment, elle est continue et le résultat que nous avons démontré par le calcul des normes n'est qu'un nouveau cas d'application du Théorème de composition des limites.

♣ On peut alors déduire de $(*)$ que

$$\exp(A).X = e^\lambda.X$$

et comme $X \neq 0$ (par hypothèse, X est un vecteur propre de A), on en déduit que X est aussi un vecteur propre de $\exp(A)$ associé à e^λ .

2. Supposons que les deux matrices A et T soient semblables. Il existe donc une matrice inversible Q telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad Q^{-1}A^kQ = T^k.$$

On en déduit que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad Q^{-1} \left(\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} A^k \right) Q = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} T^k.$$

Par définition, le second membre tend vers $\exp(T)$ et

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} A^k = \exp(A).$$

L'application $\Phi = [M \mapsto Q^{-1}MQ]$ est LINÉAIRE sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, espace vectoriel DE DIMENSION FINIE, donc elle est continue (voir les remarques précédentes). D'après le Théorème de composition des limites,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \Phi \left(\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} A^k \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \Phi(A^k)$$

c'est-à-dire

$$Q^{-1}.\exp(A).Q = \exp(T).$$

3. Si le polynôme caractéristique de A est scindé, alors A est trigonalisable. Elle est donc semblable à une matrice de la forme

$$T = \begin{pmatrix} u_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & u_n \end{pmatrix}.$$

On sait alors que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad T^k = \begin{pmatrix} u_1^k & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & u_n^k \end{pmatrix}$$

et on en déduit que (combinaison linéaire, puis passage à la limite coefficient par coefficient)

$$\exp(T) = \begin{pmatrix} e^{u_1} & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & e^{u_n} \end{pmatrix}.$$

D'après la question précédente, la matrice $\exp(A)$ est semblable à $\exp(T)$. Ces deux matrices ont donc le même polynôme caractéristique, donc le polynôme caractéristique de $\exp(A)$ est scindé :

$$\chi_{\exp(A)} = \prod_{k=1}^n (X - e^{u_k}).$$

✎ On peut être plus précis en considérant la multiplicité des valeurs propres de A .
Si le polynôme caractéristique de A s'écrit sous la forme

$$\chi_A = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{m_k},$$

alors

$$\chi_{\exp(A)} = \prod_{k=1}^r (X - e^{\lambda_k})^{m_k}.$$

Si les valeurs propres de A sont réelles, alors on peut en déduire les multiplicités des valeurs propres de $\exp(A)$.

En revanche, si les valeurs propres de A sont complexes, on risque des surprises : la fonction $\exp$ n'est pas injective sur $\mathbb{C}$ (elle est $2i\pi$ -périodique, je n'avais pas besoin de le rappeler), donc il se peut que $\exp(A)$ ait moins de valeurs propres que A ...

♣ Comme les matrices T et $\exp(T)$ sont triangulaires, on sait que

$$\operatorname{tr} T = \sum_{k=1}^n u_k \quad \text{et} \quad \det(\exp T) = \prod_{k=1}^n e^{u_k}.$$

Comme T et A sont semblables et que $\exp(T)$ et $\exp(A)$ sont semblables, on en déduit que

$$\det(\exp A) = \det(\exp T) = \exp(\operatorname{tr} T) = \exp(\operatorname{tr} A).$$

Solution 8

14-08

✎ Pour résoudre l'équation, on peut commencer par chercher une solution polynomiale (on détermine d'abord le degré, puis les coefficients) et compléter la résolution au moyen des techniques usuelles.

Variante : on peut aussi chercher les solutions sous forme de sommes de séries entières. C'est possible (au vu des solutions fournies par l'énoncé), mais très peu pratique.

L'équation étudiée équivaut à l'équation résoluble du premier ordre

$$\forall t \in I = \mathbb{R}, \quad X'(t) = A(t)X(t) \quad (\text{R})$$

en posant

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} & \frac{2t}{1+t^2} \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'une équation homogène dont les coefficients (= les quatre coefficients de $A(t)$) sont des fonctions continues de $t \in \mathbb{R}$. L'inconnue X est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, espace de dimension 2.

L'ensemble S_R des solutions de (R) est donc un sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'espace $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ et l'ensemble Σ_H des solutions de

$$(1+t^2)x''(t) - 2tx'(t) - 2\frac{1-t^2}{1+t^2} = 0 \quad (\text{H})$$

est un sous-espace de dimension 2 de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. (La deuxième composante de $X(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et comme elle est égale à $x'(t)$, on en déduit que $x(t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$.)

D'après le cours, le wronskien de l'équation est proportionnel à

$$\exp \int^t \operatorname{tr} A(s) \, ds = \exp \int^t \frac{2s}{1+s^2} \, ds = \exp \ln(1+t^2) = (1+t^2).$$

✎ Pour la suite, la forme résoluble de l'équation ne nous sera d'aucune utilité.

♣ Comme le facteur $(1+t^2)$ ne s'annule jamais, l'équation étudiée est équivalente à

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (1+2t^2+t^4)x''(t) - (2t+2t^3)x'(t) + (2t^2-2)x(t) = 0.$$

▮ Sous cette forme, tous les coefficients sont des polynômes en t , ce qui va nous permettre de chercher les solutions sous forme polynomiale ou comme sommes de séries entières.

Cherchons pour le moment une solution polynomiale de degré d . Comme il s'agit d'une équation linéaire et homogène, $x(t)$ est une solution si, et seulement si, $\lambda \cdot x(t)$ est solution et on peut donc se borner à chercher une solution polynomiale unitaire de degré d .

$$x(t) = t^d + \dots \quad x'(t) = dt^{d-1} + \dots \quad x''(t) = d(d-1)t^{d-2} + \dots$$

L'équation fait apparaître trois termes polynomiaux, dont le coefficient dominant est évident.

$$\begin{aligned} (2t^2 - 2)x(t) &= 2t^{d+2} + \dots \\ -(2t + 2t^3)x'(t) &= -2dt^{d+2} + \dots \\ (1 + t^2)^2 x''(t) &= d(d-1)t^{d+2} + \dots \end{aligned}$$

En sommant ces trois termes, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (d-2)(d-1)t^{d+2} + \dots = 0.$$

Il faut donc en particulier que le coefficient de t^{d+2} soit nul, donc $d = 1$ ou $d = 2$.

► Si $x(t) = t + a$ (pour $d = 1$), l'équation nous donne

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 2at^2 - 4t - 2a = 0$$

ce qui est impossible (à cause du terme de degré 1).

► Si $x(t) = t^2 + at + b$ (pour $d = 2$), l'équation nous donne cette fois

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 2(b-1)t^2 - 4at + 2(1-b) = 0$$

ce qui est possible pour $a = 0$ et $b = 1$.

► Conclusion intermédiaire (toujours en tenant compte du fait qu'on résout ici une équation linéaire et homogène) : les solutions polynomiales sont les fonctions proportionnelles à $[t \mapsto 1 + t^2]$.

✦ On a vu en cours que la connaissance d'une solution de l'équation homogène (ici : $K \cdot (1 + t^2)$) permettait en théorie de trouver la solution générale.

✦ **En faisant varier la constante**

On cherche une solution sous la forme $x(t) = K(t) \cdot (1 + t^2)$. On a donc

$$x'(t) = K'(t) \cdot (1 + t^2) + \dots \quad \text{et} \quad x''(t) = K''(t) \cdot (1 + t^2) + 4K'(t) \cdot t + \dots$$

(les quantités mentionnées vont nécessairement disparaître lors de la substitution dans l'équation, je peux donc me permettre de ne pas les écrire) et donc

$$(1 + t^2)K''(t) + 2tK'(t) = 0$$

(après quelques simplifications).

On reconnaît une équation du premier ordre d'inconnue $L(t) = K'(t)$, qu'on peut résoudre sans difficulté : $L(t) \propto \frac{1}{1+t^2}$, puis $K(t) \propto \text{Arctan } t$ et enfin $x(t) \propto (1 + t^2) \text{Arctan } t$.

Conclusion finale : Comme Σ_H est un plan vectoriel, on en déduit que $x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une solution de (H) si, et seulement si, il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = K_1 \cdot (1 + t^2) + K_2 \cdot (1 + t^2) \text{Arctan } t.$$

✦ **Avec le wronskien**

Il existe une solution de la forme $K(t) \cdot (1 + t^2)$ avec

$$K'(t) = \frac{W_0(t)}{(1 + t^2)^2} = \frac{1}{1 + t^2}$$

c'est-à-dire avec $K(t) = \text{Arctan } t$.

On conclut comme plus haut.

▮ En théorie, la méthode de variation des constantes équivaut à l'utilisation du wronskien : ce sont les mêmes calculs ! En pratique, la méthode qui exprime $K'(t)$ en fonction du wronskien donne parfois de très bonnes surprises (c'est le cas ici, mais ce n'est pas toujours vrai).

✱ Nous allons maintenant chercher les solutions de (H) comme somme d'une **série entière**. On suppose donc qu'il existe une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et un réel $R > 0$ tels que

$$\forall t \in]-R, R[, \quad x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

Comme $R > 0$, la fonction x est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et on obtient ses dérivées en dérivant terme à terme autant de fois que nécessaire.

$$\forall t \in]-R, R[, \quad x'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} \quad x''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

On agit alors avec calme et méthode, en écrivant petit et lisiblement à partir du haut d'une grande feuille...

$$\begin{aligned} (1+t^2)^2 x''(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} + \sum_{n=2}^{+\infty} 2n(n-1) a_n t^n + \sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3) a_{n-2} t^{n-2} \\ -2t(1+t^2)x'(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} -2n a_n t^n + \sum_{n=3}^{+\infty} -2(n-2) a_{n-2} t^n \\ 2(t^2-1)x(t) &= \sum_{n=2}^{+\infty} 2a_{n-2} t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} -2a_n t^n \end{aligned}$$

On voit alors qu'il faut traiter à part les termes dont le degré est compris entre 0 et 3...

L'équation devient alors : $\forall t \in]-R, R[$,

$$\begin{aligned} 2(a_2 - a_0) + 2(3a_3 - 2a_1)t + 2(6a_4 - a_2 + a_0)t^2 + 4(5a_5 + a_3)t^3 \\ + \sum_{n=4}^{+\infty} [(n+1)(n+2)a_{n+2} + 2[(n-1)^2 - 2]a_n + (n-4)(n-3)a_{n-2}] t^n = 0. \end{aligned}$$

Comme $R > 0$, par unicité du développement en série entière, on en déduit que

$$a_2 = a_0, \quad 3a_3 = 2a_1, \quad 6a_4 = a_2 - a_0, \quad 5a_5 + a_3 = 0$$

et aussi

$$\forall n \geq 4, \quad (n+1)(n+2)a_{n+2} + 2[(n-1)^2 - 2]a_n + (n-4)(n-3)a_{n-2} = 0. \quad (*)$$

La relation de récurrence sépare les coefficients en deux sous-suites : la suite des coefficients d'indice pair et la suite des coefficients d'indice impair.

Concernant les indices pairs, on peut choisir a_0 de manière arbitraire. Ensuite, on a nécessairement $a_2 = a_0$, puis $a_4 = a_2 - a_0 = 0$ et $a_6 = 0$ puisque (relation $(*)$) pour $n = 4$

$$30a_6 + 14a_4 + 0 \cdot a_2 = 0.$$

Concernant les indices impairs, on peut choisir a_1 de manière arbitraire. Ensuite, on doit avoir $a_3 = 2a_1/3$ et les autres coefficients d'indice impair se déduisent de la relation de récurrence $(*)$.

Conclusion (partielle) : la fonction analytique $x(t)$ est une solution de (H) si, et seulement si, il existe deux constantes a_0 et a_1 telles que

$$x(t) = a_0 \cdot (1+t^2) + a_1 \cdot \sum_{p=0}^{+\infty} (\dots) \cdot t^{2p+1}.$$

✱ Avec $(a_0, a_1) = (1, 0)$, on retrouve la solution polynomiale (au prix d'un calcul bien plus difficile que celui qu'on a fait plus haut).

Avec $(a_0, a_1) = (0, 1)$, on retrouve $(1+t^2) \operatorname{Arctan} t$ et $R = 1$ — à condition de déjà connaître le résultat !

En effet, je ne vois pas de méthode simple pour déduire que $R > 0$ de la relation de récurrence $(*)$, ni de moyen de déduire les a_{2p+1} de cette relation...

En revanche, il n'est pas très difficile de calculer le DSE de $(1+t^2) \operatorname{Arctan} t$:

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad (1+t^2) \operatorname{Arctan} t = (1+t^2) \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} t^{2p+1} = t + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2 \cdot (-1)^p}{4p^2 - 1} t^{2p+1}$$

et on peut vérifier sans difficulté que ces coefficients vérifient la relation $(*)$.

Solution 9**14-09**

1. Commençons par réduire l'équation différentielle (H) sous forme canonique en suivant la méthode habituelle.

- Une fonction $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, la fonction $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, dans ce cas,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix}.$$

▮ Comme d'habitude, on identifie ici le plan $\mathbb{R}^2$ et le plan $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes. (Aucun risque d'ambiguïté, on ne changera pas de base.)

Une fonction $x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ est solution de (H) si, et seulement si,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) = \frac{-4t}{1+t^2}x'(t) - \frac{2}{1+t^2}x(t)$$

c'est-à-dire si

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = A(t)X(t) \quad \text{avec} \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-2}{1+t^2} & \frac{-4t}{1+t^2} \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Comme la fonction $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est continue sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer la théorie de Cauchy sur les équations différentielles linéaires du premier ordre.

- D'après la théorie de Cauchy, l'ensemble S_* des solutions $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = A(t)X(t)$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ de dimension $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.

▮ Le lien qu'on a fait entre x et X montre alors que l'ensemble S_H des solutions de (H) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de dimension 2 (cette bijection est en fait un isomorphisme).

De plus, tous les wronskiens attachés à cette équation sont solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad W'(t) = [\operatorname{tr} A(t)] W(t). \quad (W)$$

Une primitive de $\operatorname{tr} A(t)$ a pour expression $-2 \ln(1+t^2)$. Par conséquent, tous les wronskiens attachés à l'équation homogène (H) sont proportionnels à

$$\exp(-2 \ln(1+t^2)) = \frac{1}{(1+t^2)^2}.$$

▮ Pour les équations du second ordre à coefficients constants, on dispose d'une recette pour calculer toutes les solutions. Il n'existe pas de recette pour les équations du second ordre dont les coefficients ne sont pas constants. À moins d'une indication explicite, il est raisonnable de chercher des solutions développables en série entière. Ici, les solutions étant données, on constate qu'elles sont toutes développables en série entière, c'est donc une bonne méthode. Mais, comme les solutions sont données, on pourrait régler la question à la paresseuse en se contentant de vérifier que l'expression donnée dans l'énoncé est bien une solution de l'équation différentielle (H)!

- On suppose donc que la série entière $\sum a_k t^k$ a un rayon de convergence $r > 0$ et on considère sa somme :

$$\forall t \in]-r, r[, \quad x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k.$$

D'après le cours sur les séries entières, la fonction x est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $] -r, r[$ et

$$\forall t \in]-r, r[, \quad x'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k t^{k-1} \quad \text{et} \quad x''(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k t^{k-2}.$$

Par conséquent, pour tout $t \in]-r, r[$,

$$\begin{aligned}(1+t^2)x''(t) + 4tx'(t) + 2x(t) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_k t^{k-2} + \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_k t^k + 4 \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k t^k + 2 \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2} t^k + \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)a_k t^k + 4 \sum_{k=0}^{+\infty} k a_k t^k + 2 \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+2)(k+1)(a_{k+2} + a_k) t^k.\end{aligned}$$

On en déduit que la fonction x est une solution de l'équation (H) si, et seulement si,

$$\forall t \in]-r, r[, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} (k+2)(k+1)(a_{k+2} + a_k) t^k = 0.$$

Comme le rayon de convergence r est strictement positif, on peut invoquer l'unicité du développement en série entière et x est donc solution de (H) si, et seulement si,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{k+2} + a_k = 0.$$

• Réciproquement, considérons une suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $a_{k+2} + a_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Il est alors clair que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2n} = (-1)^n a_0 \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = (-1)^n a_1.$$

En particulier, la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée et le rayon de convergence de la série entière $\sum a_k t^k$ est au moins égal à 1. Par conséquent, quels que soient les réels a_0 et a_1 , la fonction x définie par

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad x(t) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} + a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n t^{2n+1} = \frac{a_0 + a_1 t}{1+t^2}$$

est une solution de (H) sur $] -1, 1[$.

• Considérons maintenant les fonctions f_0 et f_1 définies par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_0(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{et} \quad f_1(t) = \frac{t}{1+t^2}.$$

Les calculs précédents ont montré que f_0 et f_1 étaient des solutions de (H) sur $] -1, 1[$, il est assez clair que ce sont en fait deux solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

On a démontré plus haut que l'ensemble S_H des solutions de (H) était un plan vectoriel et nous venons d'en exhiber deux vecteurs non proportionnels : on dispose donc en fait d'une base de l'espace S_H des solutions.

On peut donc conclure : une fonction $x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est solution de (H) sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, il existe deux réels a_0 et a_1 tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = a_0 \cdot \frac{1}{1+t^2} + a_1 \cdot \frac{t}{1+t^2}.$$

▮ Remarquons en passant que toutes les solutions de (H) sont développables en série entière au voisinage de l'origine.

• L'isomorphisme qu'on a évoqué entre l'espace S_H des solutions de (H) et l'espace S_* des solutions de (*) nous permet d'en déduire que les fonctions

$$F_0 = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_0' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_1 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \end{pmatrix}$$

forment une base de l'espace S_* des solutions de (*).

La matrice

$$M(t) = \begin{pmatrix} f_0(t) & f_1(t) \\ f_0'(t) & f_1'(t) \end{pmatrix}$$

qu'on en déduit est alors une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M'(t) = A(t)M(t)$$

et cette fonction prend en fait ses valeurs dans $GL_2(\mathbb{R})$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \det M(t) = \det M(0) \cdot \frac{1}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{(1+t^2)^2}.$$

✎ Par définition, le déterminant de $M(t)$ est un wronskien de l'équation (H) et on a déjà calculé l'expression générale des wronskiens. Quant au calcul de la matrice $M'(0)$, il est légitime d'être assez paresseux pour se contenter de deux développements limités à l'ordre 1 :

$$M(0) = \begin{pmatrix} f_0(0) & f_1(0) \\ f'_0(0) & f'_1(0) \end{pmatrix} = I_2$$

puisque

$$f_0(t) = \frac{1}{1+t^2} \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 + \mathcal{O}(t^2) \quad \text{et} \quad f_1(t) = \frac{t}{1+t^2} \underset{t \rightarrow 0}{=} t + \mathcal{O}(t^3).$$

2. Mise sous forme canonique, l'équation différentielle (E) devient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \quad \text{avec} \quad B(t) = \frac{1}{(1+t^2)^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\dagger)$$

✎ D'après le Principe de superposition, connaissant une solution particulière $X_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ de l'équation $(\star\star)$, on sait qu'une fonction $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ est solution de $(\star\star)$ si, et seulement si, il existe une solution $X_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ de l'équation homogène (H) telle que $X = X_0 + X_1$.

Il nous suffit donc d'explicitier une solution particulière de $(\star\star)$ et sait que la méthode de variation de la constante (ou des constantes pour certains) peut nous en fournir une.

Nous cherchons donc une fonction $\Lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ telle que l'expression $X(t) = M(t)\Lambda(t)$ vérifie l'équation $(\dagger)$. Or, d'après la formule de Leibniz (dérivation d'un produit),

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = M'(t)\Lambda(t) + M(t)\Lambda'(t).$$

On a justifié précédemment que $M'(t) = AM(t)$, donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = AM(t)\Lambda(t) + M(t)\Lambda'(t) = AX(t) + M(t)\Lambda'(t)$$

et X est solution de $(\dagger)$ si, et seulement si,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M(t)\Lambda'(t) = B(t).$$

On sait que $M(t)$ est inversible et les formules de Cramer nous donnent facilement son inverse :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Lambda'(t) = M(t)^{-1}B(t) = \frac{1}{(1+t^2)^2} \begin{pmatrix} 1-t^2 & -t(1+t^2) \\ 2t & 1+t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

✎ C'est seulement maintenant, pour calculer $M(t)^{-1}$, qu'on a vraiment besoin d'explicitier la matrice $M(t)$...

On en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Lambda(t) = \Lambda(0) + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \ln(1+t^2) \\ \text{Arctan } t \end{pmatrix}$$

et que la solution générale de l'équation $(\star\star)$ est de la forme

$$M(t)\Lambda(0) + M(t) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \ln(1+t^2) \\ \text{Arctan } t \end{pmatrix}.$$

✎ Pour ces derniers calculs, il suffit de connaître la première ligne de $M(t)$, c'est-à-dire les expressions $f_0(t)$ et $f_1(t)$ — on n'a pas besoin de leurs dérivées.

Par conséquent, $x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une solution de (E) si, et seulement si, il existe deux réels a_0 et a_1 tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \frac{a_0 + a_1 t}{1+t^2} - \frac{\ln(1+t^2)}{2(1+t^2)} + \frac{t \text{ Arctan } t}{1+t^2}.$$

Solution 10**14-10****1.** Mise sous forme résoluble, l'équation différentielle

$$\forall t > 0, \quad t^2 x''(t) - 2tx'(t) + 2x(t) = t - 2 \quad (7)$$

devient

$$\forall t > 0, \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \quad (8)$$

avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{t-2}{t^2} \end{pmatrix}.$$

♣ Cherchons des solutions *polynomiales* de l'équation homogène

$$\forall t > 0, \quad t^2 x''(t) - 2tx'(t) + 2x(t) = 0 \quad (9)$$

associée à (7) : si x est une solution polynomiale de degré d , alors

$$\forall t > 0, \quad [d(d-1) - 2d + 2]t^d + \underbrace{\dots}_{\text{termes de degré} < d} = 0$$

donc $d(d-1) - 2d + 2 = d^2 - 3d + 2 = (d-1)(d-2) = 0$. Par conséquent, $d = 1$ ou $d = 2$.

On substitue alors $x(t) = t + a$, puis $x(t) = t^2 + at + b$ dans l'équation homogène (9) pour en déduire que $x_1 = [t \mapsto t]$ et $x_2 = [t \mapsto t^2]$ sont deux solutions de l'équation homogène (9).

Comme l'ensemble des solutions de l'équation homogène (9) est un *plan vectoriel*, on en déduit qu'il est engendré par les solutions x_1 et x_2 .

♣ Par conséquent, l'ensemble S_H des solutions de l'équation homogène

$$\forall t > 0, \quad X'(t) = A(t)X(t) \quad (10)$$

est le plan vectoriel engendré par les fonctions f_1 et f_2 définies par

$$\forall t > 0, \quad f_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}.$$

La matrice fondamentale associée au système fondamental (f_1, f_2) est donc

$$M(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{pmatrix}.$$

♣ Le déterminant de cette matrice (qui est le wronskien du système fondamental (f_1, f_2)) est égal à $t^2 > 0$, donc $M(t)$ est inversible et

$$M(t)^{-1} = \frac{1}{t^2} \begin{pmatrix} 2t & -t^2 \\ -1 & t \end{pmatrix}$$

d'après les formules de Cramer.

2. Une fonction $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une solution de l'équation homogène (10) si, et seulement si, il existe une (colonne) constante $\Lambda \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall t > 0, \quad X(t) = M(t)\Lambda.$$

Nous allons maintenant résoudre l'équation complète (8) en appliquant la méthode de variation des constantes, c'est-à-dire en cherchant une fonction

$$\Lambda : I \rightarrow \mathbb{R}^2$$

de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $X(t) = M(t)\Lambda(t)$ soit une solution de (8).

Par définition de la matrice fondamentale,

$$\forall t > 0, \quad M'(t) = A(t)M(t).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} X'(t) - A(t)X(t) &= M'(t)\Lambda(t) + M(t)\Lambda'(t) - A(t)M(t)\Lambda(t) \\ &= A(t)M(t)\Lambda(t) - A(t)M(t)\Lambda(t) + M(t)\Lambda'(t) \\ &= M(t)\Lambda'(t) \end{aligned}$$

ce qui prouve que $X(t) = M(t)\Lambda(t)$ est une solution de (8) si, et seulement si,

$$\forall t > 0, \quad \Lambda'(t) = M(t)^{-1}B(t) = \begin{pmatrix} \frac{2-t}{t^2} \\ \frac{t-2}{t^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{t^2} - \frac{1}{t} \\ \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t^3} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\forall t > 0, \quad \Lambda(t) = \begin{pmatrix} \frac{-2}{t} - \ln t \\ \frac{-1}{t} + \frac{1}{t^2} \end{pmatrix}$$

(en choisissant, pour faire simple, les deux constantes d'intégration égales à 0), ce qui nous conduit à la solution particulière suivante :

$$\forall t > 0, \quad X(t) = M(t)\Lambda(t) = \begin{pmatrix} -t \ln t - t - 1 \\ \star \end{pmatrix}.$$

✎ Une autre choix des constantes d'intégration nous aurait donné une autre solution particulière : c'est sans importance, toutes les solutions particulières se valent.

✎ La quantité $\star$ est la dérivée de l'expression calculée (cf définition de $X(t)$) : son calcul est en général inutile.

Comme $[t \mapsto t]$ est une solution de l'équation homogène (9), on déduit alors du principe de superposition que la fonction x_0 définie par

$$\forall t > 0, \quad x_0(t) = (-t \ln t - t - 1) + t = -t \ln t - 1$$

est une solution particulière de l'équation complète (7) (un peu plus simple que celle qu'on vient de calculer).

Conclusion : Une fonction $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution de l'équation (7) si, et seulement si, il existe deux constantes d'intégration K_1 et K_2 telles que

$$\forall t > 0, \quad x(t) = \underbrace{(-t \ln t - 1)}_{\text{sol. part.}} + \underbrace{K_1 t + K_2 t^2}_{\text{sol. gén. éq. homog.}}.$$

✎ Une autre manière, plus traditionnelle mais moins rigoureuse, de formuler la conclusion est la suivante :

La solution générale de l'équation (7) est de la forme

$$\forall t > 0, \quad x(t) = (-t \ln t - 1) + K_1 t + K_2 t^2.$$

(Sous-entendu : les constantes d'intégration K_1 et K_2 peuvent prendre n'importe quelles valeurs réelles.)

Solution 11

Gronwall

1. Pour tout $x \geq a$, la quantité

$$M(x) = K + \int_a^x g(t)f(t) dt$$

est positive. Considérons la fonction φ définie par

$$\forall x \geq a, \quad \varphi(x) = M(x) \exp\left(-\int_a^x g(t) dt\right).$$

Il est clair que φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et que

$$\begin{aligned} \forall x \geq a, \quad \varphi'(x) &= [M'(x) - g(x)M(x)] \exp\left(-\int_a^x g(t) dt\right) \\ &= g(x)[f(x) - M(x)] \exp\left(-\int_a^x g(t) dt\right). \end{aligned}$$

Par hypothèse, $g(x) \geq 0$ et $f(x) \leq M(x)$, donc $\varphi'(x) \leq 0$ pour tout $x \geq a$. On en déduit que φ est décroissante sur $[a, +\infty[$ et en particulier que

$$\forall x \geq a, \quad \varphi(x) = M(x) \exp\left(-\int_a^x g(t) dt\right) \leq \varphi(a) = K.$$

Par conséquent,

$$\forall x \geq a, \quad 0 \leq f(x) \leq M(x) \leq K \exp\left(\int_a^x g(t) dt\right).$$

Le lemme de Gronwall est très utile pour estimer l'ordre de grandeur d'une fonction à partir d'une "inéquation différentielle". Le plus remarquable est qu'on domine la fonction f à l'aide de la solution de l'équation intégrale

$$\forall x \geq a, \quad y(x) = K + \int_a^x y(t)g(t) dt,$$

équation qui équivaut au problème de Cauchy

$$y(a) = K, \quad \forall x \geq a, \quad y'(x) = g(x)y(x).$$

2. Les solutions de l'équation différentielle étant continues sur $\mathbb{R}_+$, il suffit de vérifier qu'elles sont bornées au voisinage de $+\infty$.

• Comme la fonction q tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, il existe un réel x_0 tel que

$$\forall x \geq x_0, \quad q(x) \geq -1/2. \quad (11)$$

• Si y est une solution de l'équation différentielle $(\star)$, alors

$$\forall u \geq 0, \quad y''(u)y'(u) + y(u)y'(u) + q(u)y(u)y'(u) = 0$$

et donc, en intégrant sur $[x_0, x]$,

$$\forall x \geq x_0, \quad (y')^2(x) + y^2(x) + \int_{x_0}^x q(u) \cdot 2y(u)y'(u) du = (y')^2(x_0) + y^2(x_0). \quad (12)$$

L'équation $(\star)$ ne présente pas de **terme dissipatif** (= pas de terme en $y'(x)$), donc l'"énergie mécanique" est conservée, ce qu'on a démontré en faisant apparaître le **facteur intégrant** $y'(x)$: on est ainsi passé de l'expression d'une force nulle à celle d'une puissance nulle et enfin à la conservation d'une énergie.

• Par hypothèse, les fonctions q et y^2 sont de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui nous permet d'intégrer par parties :

$$\forall x \geq x_0, \quad \int_{x_0}^x q(u) \cdot 2y(u)y'(u) du = [q(u) \cdot y^2(u)]_{x_0}^x - \int_{x_0}^x q'(u) \cdot y^2(u) du. \quad (13)$$

En posant

$$K = \underbrace{[1 + q(x_0)]}_{\geq 1/2} y^2(x_0) + (y')^2(x_0) \geq 0,$$

on en déduit de (12) et de (13) que

$$\forall x \geq x_0, \quad [1 + q(x)]y^2(x) + (y')^2(x) = K + \int_{x_0}^x q'(u) \cdot y^2(u) du. \quad (14)$$

Avec (11), on en déduit enfin que

$$\begin{aligned} \forall x \geq x_0, \quad \frac{1}{2}y^2(x) &\leq [1 + q(x)]y^2(x) + (y')^2(x) \\ &\leq K + \int_{x_0}^x |q'(u)| \cdot y^2(u) du. \end{aligned}$$

On peut alors appliquer le lemme de Gronwall avec les fonctions continues et positives $f = y^2/2$ et $g = 2|q'|$, ce qui nous donne

$$\forall x \geq x_0, \quad 0 \leq y^2(x) \leq 2K \cdot \exp\left(\int_{x_0}^x 2|q'(u)| du\right).$$

Comme q' est, par hypothèse, intégrable au voisinage de $+\infty$, on en déduit que le second membre est borné et donc que la fonction y est bornée sur $[x_0, +\infty[$.

▮ Pour établir le résultat, il n'est pas nécessaire que q tende vers 0 au voisinage de $+\infty$, il suffit que q tende vers une limite $\ell > -1$.

En quelque sorte, si $1 + q(x) \geq \omega_0^2 > 0$, alors la force de rappel modélisée par l'équation est assez forte pour que les trajectoires des solutions dans l'espace des phases soient assez proches de celles des solutions de l'équation du pendule harmonique et, en particulier, restent bornées elles aussi.

Pour mémoire, les trajectoires dans l'espace des phases des solutions de l'équation $y''(x) + \omega_0^2 y(x) = 0$ ont pour équation $X^2 + \omega_0^2 Y^2 = C^{te}$ (où X représente la position y et Y , la vitesse y'). Ces trajectoires sont les lignes de niveau de l'énergie mécanique et ce sont des "courbes fermées" (les solutions de l'équation différentielle sont périodiques).

Solution 12

mt24-QT1

Ce système différentiel (linéaire, à coefficients constants) peut s'écrire sous forme matricielle :

$$X'(t) = AX(t) \quad \text{avec} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

ainsi que

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 4I_2 - J$$

où J est la célèbre matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

• On se souvient alors que

$$J \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad J \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

En posant

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}),$$

on a donc

$$Q^{-1}JQ = \text{Diag}(2, 0)$$

et donc

$$Q^{-1}AQ = 4I_2 - Q^{-1}JQ = \text{Diag}(2, 4).$$

• On pose alors

$$Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = Q^{-1}X(t)$$

et on obtient

$$Y'(t) = \text{Diag}(2, 4)Y(t), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} u'(t) = 2u(t) \\ v'(t) = 4v(t) \end{cases}.$$

Ce système peut être résolu de tête : la fonction X est solution du système différentiel initial si, et seulement si, il existe deux constantes a et b réelles telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{2t} \\ be^{4t} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

La solution générale est donc

$$X(t) = \begin{pmatrix} ae^{2t} + be^{4t} \\ ae^{2t} - be^{4t} \end{pmatrix}.$$

Solution 13

rms095-260

1. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux distincts dans $[a, b]$ tels que $f(u_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme le segment $[a, b]$ est compact, on peut en extraire une suite convergente $(u_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$.

Soit $c \in [a, b]$, la limite de la suite extraite $(u_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$. Par définition, $f(u_{\varphi(k)}) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et comme f est continue, $f(c) = 0$.

Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que $f(u_{\varphi(k)}) = f(u_{\varphi(k+1)}) = 0$ (avec $u_{\varphi(k)} \neq u_{\varphi(k+1)}$), on déduit du Théorème de Rolle qu'il existe un réel $v_k \in]u_{\varphi(k)}, u_{\varphi(k+1)}[$ tel que $f'(v_k) = 0$.

Par convexité du segment, il existe donc un réel $t_k \in]0, 1[$ tel que

$$v_k = (1 - t_k)u_{\varphi(k)} + t_k u_{\varphi(k+1)}$$

donc

$$|v_k - c| \leq (1 - t_k)|u_{\varphi(k)} - c| + t_k|u_{\varphi(k+1)} - c| \leq |u_{\varphi(k)} - c| + |u_{\varphi(k+1)} - c|,$$

ce qui prouve que la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers c . Comme $f'(v_k) = 0$ pour tout k et que f' est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $f'(c) = 0$.

La fonction f apparaît donc comme une solution du problème de Cauchy associé à l'équation différentielle $(\star)$ et à la condition initiale

$$(f(c), f'(c)) = (0, 0).$$

Il est clair que la fonction nulle est également une solution de ce même problème de Cauchy.

Or $(\star)$ est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre, sous forme résoluble, à coefficients continus. Donc ce problème de Cauchy admet une seule solution (Théorème de Cauchy-Lipschitz) et par conséquent f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

2.

Comme la fonction f n'a qu'un nombre fini de zéros sur le segment $[a, b]$, il est sensé de considérer des zéros consécutifs (toute partie finie de $\mathbb{R}$ est bien ordonnée).

En écrivant l'équation différentielle $(\star)$ sous forme matricielle, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}.$$

La trace de cette matrice est nulle, donc les wronskiens de $(\star)$ sont des fonctions constantes.

• Si le wronskien $W(f, g)$ est identiquement nul, alors les solutions f et g sont proportionnelles. Comme f s'annule en a et en b sans s'annuler sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, la fonction g s'annule en a et nulle part ailleurs sur l'intervalle semi-ouvert $[a, b[$.

La fonction g s'annule aussi en b , mais $b \notin [a, b[$.

• Sinon, le wronskien $W(f, g)$ est de signe constant sur $[a, b]$. Pour fixer les idées, on supposera que $W(f, g)(t) > 0$ pour tout $t \in [a, b]$.

Comme f est continue sur l'intervalle $]a, b[$ et ne s'annule pas sur cet intervalle, la fonction f est de signe constant sur cet intervalle (Théorème des valeurs intermédiaires). Pour fixer les idées, on supposera également que $f(t) > 0$ pour tout $t \in]a, b[$.

On en déduit que

$$f'(a) = \lim_{t \rightarrow a+} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \geq 0 \quad \text{et} \quad f'(b) = \lim_{t \rightarrow b-} \frac{f(t) - f(b)}{t - b} \leq 0.$$

Par ailleurs,

$$0 < W(f, g)(a) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f'(a) & g'(a) \end{vmatrix} = -f'(a)g(a) \quad \text{et, de même,} \quad W(f, g)(b) = -f'(b)g(b) > 0.$$

Par conséquent, $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$, mais aussi $g(a) < 0$ et $g(b) > 0$.

Sachant que f est une solution non identiquement nulle de $(\star)$ et que $f(a) = 0$, on pouvait aussi raisonner comme à la question précédente pour établir que $f'(a) \neq 0$.

Comme la fonction g est continue sur l'intervalle $[a, b]$ et change de signe sur cet intervalle, il existe au moins un réel $a < c < b$ tel que $g(c) = 0$ (Théorème des valeurs intermédiaires).

• Si la fonction g s'annulait au moins deux fois sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, alors on pourrait considérer deux zéros consécutifs c_1 et c_2 de g :

$$a < c_1 < c_2 < b.$$

Comme f , la fonction g n'a qu'un nombre fini de zéros sur le segment $[a, b]$, donc il est raisonnable de considérer deux zéros consécutifs (puisque l'on a supposé que g admettait au moins deux zéros).

En appliquant à la fonction g sur le segment $[c_1, c_2]$ le raisonnement qu'on vient d'appliquer à la fonction f sur $[a, b]$, on aboutit à une contradiction : il existerait un réel

$$\alpha \in]c_1, c_2[\subset]a, b[$$

tel que $f(\alpha) = 0$ alors que f ne s'annule en aucun point de $]a, b[$.

♣ Par conséquent, la fonction g s'annule une fois, et une seule, sur le segment $[a, b]$.

✎ Sur $\mathbb{R}$, la fonction f peut admettre une infinité de zéros mais l'étude qui précède montre qu'il n'y a que trois cas possibles :

- la fonction f n'a qu'un nombre fini de zéros sur $\mathbb{R}$ (et éventuellement aucun);
- la fonction f a une infinité de zéros sur $\mathbb{R}$ et il existe une bijection croissante de $\mathbb{N}$ sur l'ensemble Z_f des zéros de f (l'ensemble Z_f est alors bien ordonné);
- la fonction f a une infinité de zéros sur $\mathbb{R}$ et il existe une bijection croissante de $\mathbb{Z}$ sur l'ensemble Z_f .

Dans tous les cas, les ensembles Z_f et Z_g sont de même nature et sont "entrelacés" (au sens où les zéros de g "séparent" les zéros de f , tout comme les zéros de f "séparent" les zéros de g).

On pourra considérer les équations différentielles $x'' + x = 0$ et $x'' - x = 0$ à titre d'exemples simples.

Solution 14

rms095-264

1. La fonction $\varphi = [s \mapsto f(s)e^s]$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc la fonction

$$\Phi = \left[t \mapsto \int_0^t \varphi(s) \, ds \right]$$

est une primitive de φ sur $\mathbb{R}$ (Théorème fondamental). Par conséquent, la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = e^{-t}\Phi(t)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = -e^{-t}\Phi(t) + e^{-t}\Phi'(t) = -g(t) + e^{-t}f(t)e^t = -g(t) + f(t),$$

donc g est bien une solution de l'équation différentielle $(*)$.

2. Si x est une fonction périodique de classe $\mathcal{C}^1$, de période T , alors sa dérivée x' est aussi périodique, de période T et par conséquent, la fonction

$$f = x' + x$$

est périodique, de période T .

3. a. Si x_1 et x_2 sont deux solutions périodiques de période T , alors la différence $y = x_1 - x_2$ est solution de l'équation homogène associée à $(*)$ (Principe de superposition), donc il existe une constante K telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = Ke^{-t}.$$

Une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et la fonction $[t \mapsto e^{-t}]$ n'est pas bornée au voisinage de $-\infty$, donc il faut $K = 0$ et $x_1 = x_2$.

✎ Si y est périodique de période T et continue, elle est bornée sur le segment $[0, T]$ (puisque toute fonction continue sur un segment est bornée sur ce segment) :

$$\forall t \in [0, T], \quad |y(t)| \leq M.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe un réel $t' \in [0, T]$ tel que $t' - t \in T\mathbb{Z}$:

$$t' = t - T \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor.$$

Par périodicité, on a alors $y(t) = y(t')$ et en particulier $|y(t)| \leq M$.

La fonction y est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

3. b. D'après le principe de superposition, une fonction $x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ est une solution de $(*)$ si, et seulement si, il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = Ke^{-t} + g(t)$$

et comme $g(0) = 0$, il est clair que $K = x(0)$.

♣ Si x est une solution périodique de période T de l'équation différentielle $(*)$, alors il faut que $x(T) = x(0)$, c'est-à-dire

$$x(0) = \frac{1}{e^T - 1} \int_0^T f(s)e^s \, ds.$$

✎ On peut remarquer que la valeur spéciale est la moyenne pondérée de f sur le segment $[0, T]$, puisque

$$e^T - 1 = \int_0^T e^s \, ds.$$

• Réciproquement, si $x(T) = x(0)$, alors on peut définir $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ en posant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = x(t + T).$$

Comme f est périodique de période T , on en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) + y(t) = x'(t + T) + x(t + T) = f(t + T) = f(t),$$

donc y est bien une solution de l'équation $(*)$.

De plus, en posant $u_0 = x(T) = x(0) \in \mathbb{R}$, on a clairement $y(0) = u_0$, donc les fonctions x et y sont toutes deux solutions du même problème de Cauchy, constitué de l'équation différentielle $(*)$ et de la condition initiale $(0, u_0) \in \mathbb{R}^2$.

Comme $(*)$ est une équation différentielle linéaire, du premier ordre, à coefficients continus et résoluble, le Théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure que chaque problème de Cauchy admet une, et une seule, solution sur $\mathbb{R}$. On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = y(t) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = x(t + T).$$

• En conclusion, si f est périodique de période T , alors l'équation différentielle $(*)$ admet une, et une seule, solution périodique de période T et cette solution est donnée par :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) &= g(x) + \frac{e^{-t}}{e^T - 1} \int_0^T f(s) e^s ds \\ &= e^{-t} \left(\int_0^t f(s) e^s ds + \frac{1}{e^T - 1} \int_0^T f(s) e^s ds \right). \end{aligned}$$

Il est intéressant de retenir que cette solution est caractérisée par la propriété $x(T) = x(0)$.

Solution 15

rms120-391

S'il existe un endomorphisme T tel que $T \circ T = D$, alors tout sous-espace propre de D est stable par T .

Considérons la droite vectorielle F dirigée par la fonction $\varepsilon = [t \mapsto e^{-t}]$. Comme $D(\varepsilon) = -\varepsilon$, cette droite vectorielle est contenue dans le sous-espace propre $\text{Ker}(D + \text{Id})$.

Cette droite vectorielle F étant l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $x' + x = 0$, on en déduit en fait que

$$\text{Ker}(D + \text{Id}) = F = \mathbb{R} \cdot \varepsilon.$$

Par conséquent, le sous-espace vectoriel F est une *droite stable* par T . Autrement dit, le vecteur ε (non nul!) est un vecteur propre de T et il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $T(\varepsilon) = \lambda \cdot \varepsilon$.

Mais $D(\varepsilon) = T^2(\varepsilon) = \lambda^2 \cdot \varepsilon = -\varepsilon$, donc λ est un nombre réel tel que $\lambda^2 = -1$: c'est impossible.

On a démontré par l'absurde qu'il n'existait pas d'endomorphisme T tel que $T \circ T = D$.

Solution 16

rms120-549

1. Posons $\varphi = f' + \alpha f$. Cette fonction φ est continue et la fonction f apparaît comme une solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad x'(t) + \alpha x(t) = \varphi(t).$$

On sait résoudre cette équation linéaire du premier ordre à coefficients constants : il existe un réel x_0 tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \left[x_0 + \int_0^t e^{\alpha s} \varphi(s) ds \right] e^{-\alpha t}.$$

Si on raisonne en termes de problème de Cauchy, le réel x_0 est caractérisé par $f(0) = x_0$.

Notons $\alpha = \Re \alpha > 0$.

Il est clair que $x_0 e^{-\alpha t}$ tend vers 0 au voisinage de $+\infty$. Il reste donc à démontrer que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} \varphi(s) ds$$

tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, sachant que $\varphi(s)$ tend vers 0.

Soit donc $\varepsilon > 0$ (fixé une fois pour toutes).

Comme φ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$, cette fonction est bornée : on pose $M > 0$ tel que

$$\forall s \in \mathbb{R}_+, \quad |\varphi(s)| \leq M. \quad (15)$$

Et comme φ tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, il existe un réel $A > 0$ tel que

$$\forall s \geq A, \quad |\varphi(s)| \leq \frac{\varepsilon}{a}. \quad (16)$$

🔗 Le réel a est fixé (avant le choix de ε) et strictement positif!

Par inégalité triangulaire intégrale,

$$\begin{aligned} \forall t \geq A, \quad \left| e^{-at} \int_0^t e^{as} \varphi(s) ds \right| &\leq e^{-at} \int_0^t e^{as} |\varphi(s)| ds \\ &\leq e^{-at} \left[M \int_0^A e^{as} ds + \varepsilon \int_A^t e^{as} ds \right] \quad (\text{d'après (15) et (16)}) \\ &\leq \frac{Me^{aA}}{a} \cdot e^{-at} + \varepsilon. \end{aligned}$$

🔗 On doit savoir que

$$\forall a > 0, \quad 0 \leq \int_A^r e^{as} ds \leq \int_0^{+\infty} e^{as} ds = 1/a.$$

Les réels a , A et M sont fixés et e^{-at} tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$ (puisque $a > 0$), donc il existe un réel $A_0 \geq A$ tel que

$$\forall t \geq A_0, \quad 0 \leq \frac{Me^{aA}}{a} \cdot e^{-at} \leq \varepsilon.$$

On en déduit que

$$\forall t \geq A_0, \quad \left| e^{-at} \int_0^t e^{as} \varphi(s) ds \right| \leq 2\varepsilon,$$

ce qu'il fallait démontrer.

✱ On a bien démontré que la fonction f tendait vers 0 au voisinage de $+\infty$.

2. Il s'agit essentiellement du même problème. Considérons donc l'équation caractéristique de cette équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants :

$$X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2).$$

On en déduit que

$$g'' + g' + g = (g - j^2 g)' - j(g' - j^2 g).$$

🔗 Il faut être conscient qu'on rencontre ici un avatar du Théorème de décomposition des noyaux.

Si l'équation caractéristique admet la factorisation

$$X^2 + bX + c = (X - \alpha)(X - \beta),$$

alors l'opérateur différentiel peut se factoriser

$$D^2 + bD + c \text{ Id} = (D - \alpha \text{ Id}) \circ (D - \beta \text{ Id}),$$

ce qui revient à transformer la résolution d'une équation du second ordre en résolutions successives de deux équations du premier ordre.

Si les racines α et β de l'équation caractéristique sont distinctes, on en déduit une décomposition en somme directe de l'espace des solutions de l'équation du second ordre :

$$\text{Ker}(D^2 + bD + c \text{ Id}) = \text{Ker}(D - \alpha \text{ Id}) \oplus \text{Ker}(D - \beta \text{ Id}).$$

(Bien entendu, l'opérateur D est la dérivation : $D = [f' \mapsto f]$ en tant qu'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$.)

La fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie par $h = g' - j^2 g$ vérifie donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h'(t) - jh(t) = 0$$

et $\Re(-j) = 1/2 > 0$. On déduit donc de la première question que h tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

La fonction g , de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, vérifie par conséquent

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g'(t) - j^2 g(t) = 0$$

et $\Re(-j^2) = 1/2 > 0$. De même, d'après la première question, la fonction g tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

Solution 17**rms128-717**

Si une fonction x est solution de l'équation différentielle (E) sur un intervalle I , alors la fonction $y = x^{p+1}$ est solution de l'équation différentielle *linéaire*

$$\forall t \in I, \quad \frac{1}{p+1} y'(t) + a(t)y(t) = b(t). \quad (E')$$

Comme $x(t_0) = x_0$, alors $y(t_0) = x_0^{p+1}$ et on sait alors résoudre l'équation (E') : en notant A , la primitive de a qui s'annule en 0,

$$\forall t \in I, \quad y(t) = x_0^{p+1} \exp(-(p+1)A(t)) + \int_0^t b(s) \exp(-(p+1)[A(t) - A(s)]) ds. \quad (\dagger)$$

Comme a est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, elle admet des primitives sur cet intervalle et parmi ces primitives, une seule s'annule en $t = 0$.

Comme $x_0 > 0$, alors $y(0) > 0$, donc $y(t)$ reste strictement positive pour t assez proche de 0 et (toujours par continuité) $x(t)$ reste strictement positive pour t assez proche de 0. En notant I_0 , un intervalle voisinage de 0 sur lequel la fonction x et la fonction y définie par $(\dagger)$ restent strictement positives, on a

$$\forall t \in I_0, \quad x(t) = \sqrt[p+1]{x_0^{p+1} \exp(-(p+1)A(t)) + \int_0^t b(s) \exp(-(p+1)[A(t) - A(s)]) ds}. \quad (\ddagger)$$

On vient ainsi de démontrer qu'il existait au plus une solution de (E) définie sur un intervalle I_0 voisinage de 0 donné.

Réciproquement, les calculs qui précèdent prouvent que la fonction x définie sur un intervalle I_0 voisinage de 0 par $(\star)$ est bien une solution de (E).

La théorie de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles linéaires montre que toutes les solutions sont définies sur l'intervalle qui figure dans l'équation.

L'équation (E) n'est pas linéaire et, pour ce type d'équation, on ne peut savoir a priori si toutes les solutions sont définies sur l'intervalle I tout entier ou seulement sur un sous-intervalle de I .

Solution 18**rms128-726**

Fixons $\omega \in \Omega$.

Pour calculer les solutions de (E_ω) , il faut connaître les solutions de l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 + (A(\omega) - 1)\lambda + B(\omega) = 0.$$

Si le discriminant $[A(\omega) - 1]^2 - 4B$ est strictement positif, l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2 , dont le produit est égal à $B(\omega)$ et donc strictement positif.

Comme B suit une loi géométrique, toutes les valeurs de B sont supérieures à 1.

Les deux racines sont donc de même signe et ce signe est celui de leur somme, c'est-à-dire le signe de $1 - A(\omega) < 0$.

Même remarque sur A ! Et comme le discriminant est ici supposé strictement positif, $A(\omega)$ ne peut être égal à 1.

Comme les racines λ_1 et λ_2 sont strictement négatives et que la solution générale de (E_ω) est de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t},$$

toutes les solutions de (E_ω) tendent vers 0 au voisinage de $+\infty$.

Si le discriminant $[A(\omega) - 1]^2 - 4B$ est nul, alors l'équation caractéristique possède une racine double $\lambda = \frac{1-A(\omega)}{2} \leq 0$.

Si $A(\omega) > 1$, alors la solution générale est de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = (\alpha + \beta t) e^{\lambda t}$$

et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ (puisque $\lambda < 0$).

Si $A(\omega) = 1$, alors la solution générale est une fonction affine :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \alpha + \beta t$$

et seule la solution identiquement nulle tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

• Si le discriminant $[A(\omega) - 1]^2 - 4B$ est strictement négatif, alors l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées distinctes $\lambda \pm i\mu$.

La somme des racines est connue : $2\lambda = 1 - A(\omega) \leq 0$ et nous retrouvons la même discussion.

Si $A(\omega) > 1$, alors la solution générale est de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \alpha e^{\lambda t} \cos(\mu t + \varphi)$$

et comme $\lambda < 0$, toutes les solutions tendent vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

Si $A(\omega) = 1$, alors la solution générale est de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \alpha \cos(\mu t + \varphi)$$

et seule la solution identiquement nulle tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

• En conclusion, toutes les solutions de (E_ω) tendent vers 0 au voisinage de $+\infty$ si, et seulement si, $A(\omega) > 1$.

• Comme A suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, la probabilité pour que toutes les solutions de (E_ω) tendent vers 0 au voisinage de $+\infty$ est égale à

$$P(A > 1) = 1 - P(A = 1) = 1 - p.$$

Solution 19

rms130-566

1. On raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe une infinité $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de zéros *distincts* dans $[0, 1]$ pour la fonction f .

D'après le Théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire une suite $(x_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in [0, 1]$ et qui vérifie aussi

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f(x_{\varphi(k)}) = 0.$$

On peut aussi se permettre un peu de pédanterie et présenter $[0, 1]$ comme une *partie compacte* de $\mathbb{R}$.

• Comme les $x_{\varphi(k)}$ sont deux à deux distincts, seul l'un d'entre eux peut être égal à la limite ℓ et, à partir d'un certain rang, tous les $x_{\varphi(k)}$ sont distincts de ℓ .

• Par continuité de f ,

$$f(\ell) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(k)}) = 0.$$

Par dérivabilité de f (nouvelle application du Théorème de composition des limites) :

$$f'(\ell) = \lim_{x \rightarrow \ell} \frac{f(x) - f(\ell)}{x - \ell} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(x_{\varphi(k)}) - f(\ell)}{x_{\varphi(k)} - \ell} = 0.$$

On a donc $f(\ell) = f'(\ell) = 0$. Mais par hypothèse, l'équation

$$(f(x), f'(x)) = (0, 0)$$

n'a pas de solution. Donc la fonction f n'admet qu'un nombre FINI de zéros sur $[0, 1]$.

2. La fonction $F = (f, f') : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une solution de l'équation différentielle linéaire homogène canonique

$$\forall x \in [0, 1], \quad Y'(x) = A(x)Y(x) \quad \text{avec} \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors $A : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est continue et le Théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique : pour toute condition initiale $(x_0, (y_0, v_0)) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2$, l'équation canonique admet une, et une seule solution Y telle que $Y(x_0) = (y_0, v_0)$.

En particulier, s'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $Y(x_0) = (0, 0)$, alors Y est l'unique solution associée à la condition initiale $(x_0, (0, 0))$. Comme la fonction identiquement nulle est une solution évidente associée à cette condition initiale, on en déduit que $Y(x) = (0, 0)$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Comme f n'est pas identiquement nulle, la fonction F n'est pas identiquement nulle et, par contraposée,

$$\forall x \in [0, 1], \quad F(x) = (f(x), f'(x)) \neq (0, 0).$$

D'après la question précédente, la fonction f n'a qu'un nombre fini de zéros sur le segment $[0, 1]$.

Solution 20**rms130-600**

1. On commence par un peu de trigonométrie pour y voir plus clair :

$$g(x) = f(x) + \sin x \int_0^x \cos tu(t)f(t) dt - \cos x \int_0^x \sin tu(t)f(t) dt.$$

Comme les fonctions

$$[t \mapsto \cos tu(t)f(t)] \quad \text{et} \quad [t \mapsto \sin tu(t)f(t)]$$

sont continues, on peut appliquer le Théorème fondamental et en déduire que g est de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$g'(x) = f'(x) + \cos x \int_0^x \cos tu(t)f(t) dt + \sin x \int_0^x \sin tu(t)f(t) dt$$

(en dérivant les deux produits, il apparaît deux termes qui se compensent exactement). Le Théorème fondamental, toujours lui, nous dit alors que g est en fait de classe $\mathcal{C}^2$ avec

$$g''(x) = f''(x) - \sin x \int_0^x \cos tu(t)f(t) dt + \cos x \int_0^x \sin tu(t)f(t) dt \\ + (\cos^2 x + \sin^2 x)u(x)f(x).$$

Or, par hypothèse,

$$\forall x \geq 0, \quad f''(x) = -f(x) - u(x)f(x)$$

donc

$$\forall x \geq 0, \quad g''(x) = -g(x).$$

2. Comme g est une solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ (équation du pendule harmonique), on en déduit que g est bornée : il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \geq 0, \quad |g(x)| \leq c.$$

Par définition de g et par inégalité triangulaire,

$$\forall x \geq 0, \quad |f(x)| = \left| g(x) - \int_0^x \sin(x-t)u(t)f(t) dt \right| \\ \leq |g(x)| + \int_0^x |\sin(x-t)u(t)f(t)| dt \\ \leq c + \int_0^x |u(t)f(t)| dt.$$

3. Nous allons maintenant démontrer l'**inégalité de GRÖNWALL**.

✱ Pour tout $x \geq 0$, on pose

$$\Phi(x) = \left[c + \int_0^x |u(t)| |f(t)| dt \right] \cdot \exp\left(-\int_0^x |u(t)| dt\right).$$

D'après le Théorème fondamental, la fonction Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\Phi'(x) = |u(x)| \cdot \left[|f(x)| - c - \int_0^x |u(t)| |f(t)| dt \right] \cdot \exp\left(-\int_0^x |u(t)| dt\right).$$

Le premier et le dernier facteur sont évidemment positifs ; le second facteur est négatif (d'après ce qui précède) ; par conséquent, la fonction Φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et en particulier

$$\forall x \geq 0, \quad \Phi(x) \leq \Phi(0) = c.$$

On déduit alors de la question précédente que

$$\forall x \geq 0, \quad |f(x)| \leq c \cdot \exp\left(\int_0^x |u(t)| dt\right).$$

Or la fonction u est supposée intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc la fonction croissante

$$\left[x \mapsto \int_0^x |u(t)| dt \right]$$

est bornée et comme $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction f est bien bornée.

🔗 Cette démonstration est très astucieuse : comment peut-on penser à étudier cette fonction auxiliaire Ψ si on ne connaît pas la démonstration ?

• Reprenons l'encadrement établi à la question précédente et multiplions par $|u(x)|$ pour obtenir une inéquation différentielle :

$$\forall x \geq 0, \quad |u(x)||f(x)| \leq c|u(x)| + |u(x)| \int_0^x |u(t)||f(t)| dt.$$

Cette relation nous suggère d'étudier la fonction

$$\Psi = \left[x \mapsto \int_0^x |u(t)||f(t)| dt \right],$$

qui est de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$\forall x \geq 0, \quad \Psi'(x) = |u(x)||f(x)|.$$

Par conséquent,

$$\forall x \geq 0, \quad \Psi'(x) - |u(x)| \cdot \Psi(x) = m(x)$$

où m est une fonction telle que

$$\forall x \geq 0, \quad m(x) \leq c \cdot |u(x)|.$$

🔗 C'est assez astucieux, j'en conviens ! Une inéquation différentielle est en fait une équation différentielle pour laquelle le second membre n'est pas vraiment connu : on connaît seulement un majorant du second membre...

On sait résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre : il existe une fonction dérivable K telle que

$$\forall x \geq 0, \quad \Psi(x) = K(x) \cdot \exp V(x)$$

où V est une primitive de $|u|$, par exemple :

$$\forall x \geq 0, \quad V(x) = \int_0^x |u(t)| dt.$$

Comme $\Psi(0) = 0$, on a $K(0) = 0$ et la méthode de variation de la constante nous dit que

$$\forall x \geq 0, \quad K'(x) = m(x) \cdot \exp[-V(x)].$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \forall x \geq 0, \quad \Psi(x) &= \exp V(x) \cdot \int_0^x \exp[-V(t)] \cdot m(t) dt \\ &\leq \exp V(x) \cdot \int_0^x \exp[-V(t)] \cdot c \cdot |u(t)| dt. \end{aligned}$$

Comme la fonction u est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la primitive V est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et le produit $\exp[-V(t)] \cdot |u(t)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (produit d'une fonction bornée par une fonction intégrable).

On en déduit que Ψ est majorée et d'après la deuxième question,

$$\forall x \geq 0, \quad |f(x)| \leq c + \Psi(x)$$

donc la fonction f est bien bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Solution 21

rms130-601

1. Si f est une solution bornée de (E), alors $f'' = -qf$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (produit d'une fonction intégrable q par une fonction continue et bornée f). Or, comme f' est de classe $\mathcal{C}^1$,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t) dt$$

et par conséquent, la dérivée f' tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$.

Si f' tend vers une limite $\ell \neq 0$, alors on déduit du Théorème fondamental

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$$

que $f(x)$ tend vers $+\infty$ (si $\ell > 0$) ou vers $-\infty$ (si $\ell < 0$) lorsque x tend vers $+\infty$.

✎ En revanche, si f' tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, l'intégrale est une forme indéterminée lorsque x tend vers $+\infty$ (cf les fonctions $[t \mapsto t^\alpha]$).

Comme f est supposée bornée, on en déduit que la dérivée f' tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

2. Une fonction $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ est solution de (E) si, et seulement si, la fonction $Y = (y, y') \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$ est solution de l'équation réduite

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad Y'(x) = A(x)Y(x) \quad \text{avec} \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & 0 \end{pmatrix}. \quad (R)$$

Comme $q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est continue, donc l'équation réduite est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients continus et on peut appliquer le Théorème de Cauchy-Lipschitz.

✎ L'ensemble des solutions de (R) est donc un plan vectoriel et on peut donc considérer une base (F, G) de ce plan. D'après la réduction de (E), il existe deux solutions f et g de (E) telles que $F = (f, f')$ et $G = (g, g')$.

Si toutes les solutions de (E) étaient bornées, alors f et g seraient bornées et, d'après la première question, leurs dérivées f' et g' tendraient vers 0 au voisinage de $+\infty$. Par conséquent, le wronskien

$$W(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$$

tendrait vers 0 au voisinage de $+\infty$ alors que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad W(x) \neq 0$$

puisque (F, G) est une base de l'espace des solutions de (R).

D'après le cours, tous les wronskiens de (R) vérifient l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad y'(x) = [\operatorname{tr} A(x)]y(x)$$

et comme, ici, $\operatorname{tr} A(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on en déduit que les wronskiens sont constants.

Une fonction constante non nulle ne peut tendre vers 0 au voisinage de $+\infty$, donc il est impossible que toutes les solutions de (E) soient bornées.

Il existe donc au moins une solution de (E) qui n'est pas bornée au voisinage de $+\infty$.

✎ Il est intéressant de comparer ce résultat à l'équation du pendule harmonique : si la fonction q est strictement positive et constante, alors toutes les solutions de (E) sont bornées mais la fonction q n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$.

Solution 22

rms130-740

1. Dire que l'application $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad M(x) = (m_{i,j}(x))_{1 \leq i,j \leq n}$$

est dérivable signifie que, quels que soient $1 \leq i, j \leq n$, l'application

$$m_{i,j} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

est dérivable. Dans ce cas,

$$M'(x) = (m'_{i,j}(x))_{1 \leq i,j \leq n}.$$

✎ Quel que soit l'espace vectoriel E de dimension finie, si on connaît une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ de E , une application f à valeurs dans E est définie par ses composantes relatives à la base $\mathcal{B}$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^d f_k(x) \cdot e_k$$

qui sont des fonctions à valeurs scalaires et la fonction f est continue (resp. dérivable, resp. de classe $\mathcal{C}^k$) si, et seulement si, ses d composantes $f_1, \dots, f_d$ sont continues (resp. dérivables, resp. de classe $\mathcal{C}^k$).

✎ L'application f est alors définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \left(\sum_{k=1}^n m_{k,i}(x) m_{k,j}(x) \right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Comme chacune de ses n^2 composantes est dérivable, l'application f est dérivable et sa dérivée est donnée par la formule de Leibniz :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = M'(x)^T \cdot M(x) + M(x)^T \cdot M'(x).$$

✎ On aurait pu aussi remarquer que l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ (P, Q) &\longmapsto P^T \cdot Q \end{aligned}$$

était bilinéaire et par conséquent de classe $\mathcal{C}^\infty$ (puisque $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie). D'après le cours de calcul différentiel,

$$\forall (P_0, Q_0, H, K) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})^4, \quad d\Phi(P_0, Q_0)(H, K) = H^T \cdot Q_0 + P_0^T \cdot K$$

et on conclut avec le Théorème de composition des applications différentiables en remarquant que l'application

$$[x \mapsto (M(x), M(x))]$$

est dérivable, de dérivée

$$[x \mapsto (M'(x), M'(x))].$$

2. Comme $M'(x) = A(x) \cdot M(x)$, alors

$$M'(x)^T = M(x)^T \cdot A(x)^T = -M(x)^T \cdot A(x)$$

puisque la matrice $A(x)$ est antisymétrique.

✎ On déduit alors de la question précédente que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -M(x)^T \cdot A(x) \cdot M(x) + M(x)^T \cdot A(x) \cdot M(x) = 0.$$

Par conséquent, l'application f est constante sur $\mathbb{R}$ (qui est un **intervalle**), égale à

$$f(0) = M(0)^T \cdot M(0) = I_n.$$

On a ainsi démontré que $M(x)$ était orthogonale pour tout $x \in \mathbb{R}$.

✎ Comme $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est continue (et même de classe $\mathcal{C}^1$) et que $\det : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue (en tant que fonction polynomiale des coefficients), l'application

$$\det M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

est continue.

Comme $M(x)$ est orthogonale pour tout $x \in \mathbb{R}$, on sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \det M(x) = \pm 1.$$

Or $\mathbb{R}$ est un intervalle et l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle (Théorème des valeurs intermédiaires), donc la fonction $\det M$ est constante.

Comme $M(0)$ est une matrice de rotation, $\det M(0) = 1$ et par conséquent, $\det M(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

✎ On a ainsi démontré que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad M(x) \in \text{SO}_n(\mathbb{R}).$$

Solution 23

rms130-1172

1. Il est clair que L_u est linéaire, mais c'est une application de $\mathcal{C}^k$ dans $\mathcal{C}^{k-1}$. Par conséquent, la composée $L_u \circ L_u$ n'est définie que si $k \geq 2$.

Pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^k$,

$$\begin{aligned} (L_u \circ L_u)(f) &= L_u(f' + u \cdot f) \\ &= (f' + u \cdot f)' + u \cdot (f' + u \cdot f) \\ &= f'' + 2u \cdot f + (u' + u^2) \cdot f. \end{aligned}$$

2. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 2xy' + (1 + x^2)y = 0$$

revient à résoudre l'équation

$$L_u \circ L_u(f) = 0$$

avec $u(x) = x$.

• Une fonction g appartient au noyau de L_u si, et seulement si, elle est solution de l'équation différentielle du premier ordre :

$$y' + xy = 0$$

c'est-à-dire s'il existe une constante réelle A telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = A.e^{-x^2/2}.$$

• Une fonction f appartient donc au noyau de $L_u \circ L_u$ si, et seulement si, il existe une constante réelle A telle que f soit solution de

$$y' + xy = A.e^{-x^2/2}.$$

En résolvant cette équation par variation de la constante, on constate que

$$(L_u \circ L_u)(f) = 0$$

si, et seulement si, il existe deux constantes réelles A et B telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (A + Bx)e^{-x^2/2}.$$

Solution 24

rms130-1269

MÉTHODE PHYSICIENNE.—

• On remarque l'existence d'une intégrale première simple : comme

$$(y' + z') = 0$$

alors la fonction $y + z$ est constante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) + z(t) = y_0 + z_0.$$

• On en déduit que

$$x'' = y' - z' = 4x + 2(y_0 + z_0).$$

Par conséquent, il existe deux constantes réelles A et B telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = A \operatorname{ch} 2t + B \operatorname{sh} 2t - \frac{y_0 + z_0}{2}.$$

• On en déduit alors que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = [A \operatorname{sh} 2t + B \operatorname{ch} 2t - (y_0 + z_0)t] + [(y_0 + z_0)t] + C_y$$

(en intégrant la seconde équation différentielle, connaissant $x(t)$ et la somme $y(t) + z(t)$) et aussi que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = [-A \operatorname{sh} 2t - B \operatorname{ch} 2t + (y_0 + z_0)t] - [(y_0 + z_0)t] + C_z.$$

Finalement, les fonctions x , y et z s'expriment

$$\begin{aligned} x(t) &= A \operatorname{ch} 2t + B \operatorname{sh} 2t - \frac{y_0 + z_0}{2}, \\ y(t) &= A \operatorname{sh} 2t + B \operatorname{ch} 2t + (y_0 - B), \\ z(t) &= -A \operatorname{sh} 2t - B \operatorname{ch} 2t + (z_0 + B). \end{aligned}$$

VERSION MATHÉMATICIENNE.—

La matrice du système différentiel linéaire homogène à coefficients constants est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est $X(X-2)(X+2)$. La matrice M est donc diagonalisable et en posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

on obtient une matrice inversible telle que

$$P^{-1}MP = \text{Diag}(0, 2, -2).$$

Par conséquent, en posant $U_t = P^{-1}X_t$, on est ramené à

$$U'_t = \text{Diag}(0, 2, -2) \cdot U_t$$

et il existe trois constantes K_1, K_2 et K_3 telles que

$$U_t = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 e^{2t} \\ K_3 e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$X_u = PU_t = \begin{pmatrix} K_1 + K_2 e^{2t} + K_3 e^{-2t} \\ -K_1 + K_2 e^{2t} - K_3 e^{-2t} \\ -K_1 - K_2 e^{2t} + K_3 e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

On trouve bien les mêmes solutions, sous une forme un peu différente :

$$K_1 = -\frac{y_0 + z_0}{2}, \quad K_2 = \frac{A + B}{2}, \quad K_3 = \frac{A - B}{2}.$$

On peut vérifier que les intégrales premières du système correspondent aux vecteurs propres de la matrice M^T .

Solution 25

rms130-1395

1. Comme (H) est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre et que le facteur de $x''(t)$ ne s'annule pas sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (H) est un sous-espace de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ de dimension 2.

La fonction $x = [t \mapsto t^r]$ est une solution de (H) si, et seulement si,

$$\forall t > 0, \quad t^2 \cdot r(r-1)t^{r-2} - 2t \cdot rt^{r-1} + 2t^r = 0$$

c'est-à-dire

$$\forall t > 0, \quad [r^2 - 3r + 2]t^r = 0$$

soit : $r^2 - 3r + 2 = 0$.

Les racines de cette équation sont 1 et 2. Par conséquent, les fonctions $[t \mapsto t]$ et $[t \mapsto t^2]$ appartiennent à $\mathcal{S}$.

Comme $\dim \mathcal{S} = 2$ et qu'on vient de trouver deux solutions non proportionnelles de (H), ces fonctions forment une famille libre (de deux vecteurs dans un espace de dimension deux), donc une base de $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} = \text{Vect}([t \mapsto t], [t \mapsto t^2]).$$

2. L'équation complète (E) se traduit sous forme vectorielle

$$\forall t \in I =]0, +\infty[, \quad X'_t = A_t X_t + B_t$$

avec

$$X_t = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}, \quad X'_t = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix}, \quad A_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2/t^2 & 2/t \end{pmatrix}, \quad B_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + 1/t^2 \end{pmatrix}.$$

On va chercher une solution particulière de la forme $X_t = M_t \Lambda_t$ où $[t \mapsto \Lambda_t]$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de I dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et

$$\forall t \in I, \quad M_t = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi

$$\forall t \in I, \quad X'_t = M'_t \Lambda_t + M_t \Lambda'_t = A_t M_t \Lambda_t + M_t \Lambda'_t = A_t X_t + M_t \Lambda'_t.$$

L'équation (E) équivaut donc à

$$\forall t \in I, \quad M_t \Lambda'_t = B_t.$$

Comme la matrice M_t est inversible, cela revient à

$$\forall t \in I, \quad \Lambda'_t = M_t^{-1} B_t = \begin{pmatrix} -1 - 1/t^2 \\ 1/t + 1/t^3 \end{pmatrix}$$

et nous donne

$$\forall t \in I, \quad \Lambda_t = \Lambda_0 + \begin{pmatrix} -t + 1/t \\ \ln t - 1/2t^2 \end{pmatrix}.$$

En choisissant (par exemple) $\Lambda_0 = 0$, on obtient une solution particulière

$$\forall t \in I, \quad X_t = M_t \Lambda_t = \begin{pmatrix} t^2 \ln t + 1/2 - t^2 \\ * \end{pmatrix}.$$

Comme $[t \mapsto t^2]$ est une solution de (H), on peut conserver comme solution particulière de (E) la fonction

$$x_0 = [t \mapsto t^2 \ln t + 1/2]$$

et en déduire que $x \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ est une solution de (E) si, et seulement si, il existe deux constantes réelles a et b telles que

$$\forall t > 0, \quad x(t) = t^2 \ln t + \frac{1}{2} + at + bt^2.$$

Solution 26

rms130-1399

1. Comme x est réel,

$$\frac{1}{x+i} = \frac{x-i}{(x+i)(x-i)} = \frac{x-i}{1+x^2}$$

et donc

$$\Re \frac{1}{x+i} = \frac{x}{1+x^2}, \quad \Im \frac{1}{x+i} = \frac{-1}{1+x^2}.$$

2. Il s'agit de résoudre une équation différentielle linéaire et homogène du premier ordre : on connaît une formule pour cela !

D'après la question précédente, une primitive de $\frac{1}{x+i}$ est

$$\frac{1}{2} \ln(1+x^2) - i \operatorname{Arctan} x$$

donc y est solution de l'équation différentielle si, et seulement si, il existe une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda \exp \left[\frac{-1}{4} \ln(1+x^2) + \frac{i}{2} \operatorname{Arctan} x \right] = \frac{\lambda}{\sqrt[4]{1+x^2}} \exp \left(\frac{i \operatorname{Arctan} x}{2} \right).$$

✎ On peut remarquer que $\lambda = y(0)$.

3. Pour $x \in \Omega = \mathbb{R}$ et $t \in I =]0, +\infty[$, on pose

$$\varphi(x, t) = \frac{e^{ixt} e^{-t}}{\sqrt{t}}.$$

Pour tout $x \in \Omega$, il est clair que $[t \mapsto \varphi(x, t)]$ est continue sur l'intervalle ouvert I ; que

$$\varphi(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-t}) \quad \text{et que} \quad \varphi(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Par comparaison à des fonctions intégrables, on a démontré que $[t \mapsto \varphi(x, t)]$ était intégrable sur I pour tout $x \in \Omega$ et donc que l'intégrale $f(x)$ était bien définie sur $\Omega = \mathbb{R}$.

4. Il est clair que, pour tout $t \in I$, l'application $[x \mapsto \varphi(x, t)]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et que

$$\forall (x, t) \in \Omega \times I, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = i\sqrt{t} e^{ixt} e^{-t}.$$

Il est tout aussi clair que l'application

$$\left[t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right]$$

est continue sur l'intervalle ouvert I et que

$$\forall (x, t) \in \Omega \times I, \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right| \leq \sqrt{t} e^{-t}.$$

Le majorant étant une fonction intégrable de référence sur I (cf cours sur la fonction Γ), on en déduit que, pour tout $x \in \Omega$, l'application

$$\left[t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right]$$

est intégrable sur I . Mieux, le majorant étant indépendant de $x \in \Omega$ (condition de domination), on peut appliquer le Théorème de dérivation sous le signe $\int$: la fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega = \mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^{+\infty} i\sqrt{t}e^{-t}e^{ixt} dt.$$

5. Nous allons intégrer par parties : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{i\sqrt{t}}{ix-1} e^{(ix-1)t} \right] = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) + \frac{i}{(ix-1)2\sqrt{t}} e^{(ix-1)t}.$$

L'expression

$$\left| \frac{i\sqrt{t}}{ix-1} e^{(ix-1)t} \right| = \sqrt{\frac{t}{1+x^2}} e^{-t}$$

tend vers 0 lorsque t tend vers 0 et lorsque t tend vers $+\infty$. De plus, l'application $\left[t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, donc l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{i}{(ix-1)2\sqrt{t}} e^{(ix-1)t} dt$$

est convergente et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 = f'(x) + \int_0^{+\infty} \frac{i}{(ix-1)2\sqrt{t}} e^{(ix-1)t} dt = f'(x) + \frac{i}{2(ix-1)} f(x) = f'(x) + \frac{1}{2(x+i)} f(x).$$

La fonction f est bien une solution de (E).

• Le scalaire λ est égal à $f(0) = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{1+x^2}} \exp\left(\frac{i \operatorname{Arctan} x}{2}\right).$$

6. Nous allons à nouveau appliquer le Théorème de dérivation sous le signe $\int$.

Pour tout $t \in I =]0, +\infty[$ et tout $\alpha \in \Omega = \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$\psi(\alpha, t) = \frac{e^{-\alpha t} \sin t}{\sqrt{t}}.$$

Pour tout $\alpha \in \Omega$, l'application $[t \mapsto \psi(\alpha, t)]$ est continue sur l'intervalle ouvert I . Comme

$$\psi(\alpha, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-\alpha t}) \quad \text{et} \quad \psi(\alpha, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{t},$$

l'application $[t \mapsto \psi(\alpha, t)]$ est bien intégrable sur I et l'application J est donc bien définie sur I .

Avec le changement de variable affine $u = \alpha t$,

$$I(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} \sin(u/\alpha)}{\sqrt{u}} du$$

et par linéarité de l'intégrale,

$$I(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{Im}(f(1/\alpha)) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{1+\alpha^2}} \sin \frac{\operatorname{Arctan}(1/\alpha)}{2}.$$

Comme $0 < \operatorname{Arctan} 1/\alpha < \pi/2$, le sinus est positif et $I(\alpha)$ est donc (strictement) positif pour tout $\alpha > 0$.

• On peut aussi exprimer $I(\alpha)$ comme la somme d'une série convergente à l'aide de la relation de Chasles.

$$I(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{e^{-\alpha t} \sin t}{\sqrt{t}} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{e^{-\alpha(u+k\pi)} \sin(u+k\pi)}{\sqrt{u+k\pi}} du = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-k\alpha\pi} \int_0^\pi \frac{e^{-\alpha u} \sin u}{\sqrt{u+k\pi}} du.$$

On vérifie sans peine que

$$e^{-k\alpha\pi} \int_0^\pi \frac{e^{-\alpha u} \sin u}{\sqrt{u+k\pi}} du$$

tend vers 0 en décroissant quand k tend vers $+\infty$. Les conditions d'application du Critère spécial des séries alternées étant vérifiées, on sait que la somme $I(\alpha)$ est du signe du premier terme et donc positive.

Solution 27

rms130-1401

1.
2. La fonction x est une solution de l'équation homogène si, et seulement si, il existe un réel λ tel que

$$\forall t < 1, \quad x(t) = \lambda \cdot \frac{1}{1-t}.$$

La fonction $x_0 = [t \mapsto K(t)x(t)]$ est une solution de l'équation complète si, et seulement si,

$$\forall t < 1, \quad (1-t) \cdot \left[K'(t) \cdot \frac{1}{1-t} \right] = \frac{1}{1-t}$$

c'est-à-dire

$$\forall t < 1, \quad K(t) = K_0 - \ln(1-t).$$

La fonction x est donc solution de l'équation différentielle si, et seulement si, il existe un réel K_0 tel que

$$\forall t < 1, \quad x(t) = \frac{K_0}{1-t} - \frac{\ln(1-t)}{1-t}.$$

Comme $\frac{1}{1-t}$ et $\ln(1-t)$ sont développables en série entière au voisinage de l'origine, alors toute solution de l'équation différentielle est développable en série entière au voisinage de l'origine (par produit et somme).

3. S'il existe une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $r > 0$ tels que

$$\forall t \in]-r, r[, \quad x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k,$$

alors

$$\forall t \in]-r, r[, \quad x'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} t^k$$

puisqu'on peut dériver terme à terme la somme d'une série entière dont le rayon de convergence est strictement positif. L'équation (E) devient alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} t^k - \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k t^k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k$$

c'est-à-dire (en ajoutant un terme nul dans la seconde somme)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} ((k+1) a_{k+1} - (k+1) a_k) t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k.$$

pour tout $t \in]-r, r[$. Comme $r > 0$, on peut en déduire que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (k+1)(a_{k+1} - a_k) = 1$$

par identification terme à terme.

Comme toutes les solutions de (E) sont développables en série entière, on en déduit (par télescopage) que x est solution de (E) si, et seulement si, il existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = a_0 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

On retrouve ainsi que

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad x(t) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} H_n t^n$$

en notant comme d'habitude les nombres harmoniques :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

On vérifie ainsi l'expression générale trouvée précédemment :

$$x(t) = a_0 \cdot \frac{1}{1-t} + (-\ln(1-t)) \cdot \frac{1}{1-t}.$$

On aurait pu aussi bien tirer les coefficients du développement en série entière de $x(t)$ en appliquant le Théorème sur le produit de Cauchy : sachant que

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 \cdot t^n$$

$$-\ln(1-t) = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot t^n$$

et que $c_0 = 0 \times 1 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = 0 \times 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \times 1 = H_n,$$

on a bien

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_0 t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} H_n t^n.$$

Au passage, on a enfin prouvé ainsi que le rayon de convergence était égal à 1 (au moins égal à 1 avec les calculs qui précèdent, pas plus grand que 1 au vu de la somme de la série entière).

Solution 28

rms130-1402

1. La fonction $f = [t \mapsto (e^{-1/t})/t]$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$. De plus, on sait que ue^{-u} tend vers 0 lorsque u tend vers $+\infty$ et $1/t$ tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures. Par conséquent, en posant $f(0) = 0$, on prolonge f en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

L'intégrale $h(x)$ est donc bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ (intégrale d'une fonction continue sur un segment) et, d'après le Théorème fondamental, la fonction h ainsi définie est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$: c'est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

2. Il s'agit de résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre. La méthode est bien connue.

On vérifie sans peine que $y_0 = [x \mapsto \exp(1/x)]$ est une solution de l'équation homogène sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ et qu'une fonction y_H est une solution de cette équation si, et seulement si, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in I, \quad y_H(x) = C \cdot y_0(x) = C \cdot \exp(1/x).$$

On fait alors "varier la constante" : on cherche une solution de l'équation complète de la forme $y_p(x) = C(x) \cdot e^{1/x}$ où C est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . Cette fonction y_p est solution de l'équation complète si, et seulement si,

$$\forall x \in I, \quad x^2 \cdot C'(x) \exp(1/x) = x$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in I, \quad C'(x) = \frac{1}{x} \exp\left(\frac{-1}{x}\right).$$

On déduit de la question précédente que la fonction y_p définie par

$$\forall x \in I, \quad y_p(x) = h(x)e^{1/x}$$

est une solution particulière de l'équation complète.

D'après le principe de superposition, une fonction $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ est une solution de l'équation complète si, et seulement si, il existe un réel λ tel que

$$\forall x > 0, \quad y(x) = y_p(x) + \lambda y_0(x) = h(x)e^{1/x} + \lambda e^{1/x}.$$

3. Comme $x > 0$, il est clair que la fonction

$$\psi = \left[u \mapsto t = \frac{x}{1+xu} \right]$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. D'après le Théorème de la bijection monotone, l'application ψ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]0, x]$.

Il suffit de calculer $\psi(0)$ et la limite de ψ au voisinage de $+\infty$ pour déterminer l'intervalle image de cette bijection.

On vérifie ensuite que

$$e^{1/x} e^{-1/t} = e^{1/x - 1/t} = e^{-u} \quad \text{et que} \quad dt = \frac{-x^2 du}{(1+xu)^2} \quad \text{d'où} \quad \frac{dt}{t} = \frac{-x du}{1+xu}.$$

D'après la formule du changement de variable,

$$e^{1/x} \int_0^x e^{-1/t} \frac{dt}{t} = \int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{x du}{1+xu} = x \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+xu} du.$$

4. Pour tout $(x, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, on pose

$$\varphi(x, u) = \frac{e^{-u}}{1+xu}.$$

Régularité —

Il est clair que, pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, la fonction $[x \mapsto \varphi(x, u)]$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et on vérifie par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}(x, u) = \frac{(-1)^n n! u^n e^{-u}}{(1+xu)^{n+1}}.$$

Domination —

Il est clair que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(x, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$,

$$\left| \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}(x, u) \right| = n! \cdot \frac{u^n e^{-u}}{(1+xu)^{n+1}} \leq n \cdot u^n e^{-u}.$$

Le majorant est indépendant de x et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

L'étude de la fonction Γ a montré que $[u \mapsto u^n e^{-u}]$ était intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Intégrabilité —

Il est clair que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$\left[u \mapsto \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}(x, u) \right]$$

est continue sur $\mathbb{R}_+$ et, d'après la propriété de Domination qu'on vient de justifier, elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On peut donc appliquer le Théorème de dérivation sous $\int$, ce qui prouve que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g^{(n)}(x) = (-1)^n n! \int_0^{+\infty} \frac{u^n e^{-u}}{(1+xu)^{n+1}} du.$$

On a résolu l'équation différentielle complète sur $\mathbb{R}_+^*$.

On déduit de ce qui précède que le produit $[x \mapsto xg(x) = h(x)e^{1/x}]$ est une solution de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ (et pas seulement sur $\mathbb{R}_+^*$) de l'équation complète.

Comme $e^{1/x}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives, on en déduit que cette fonction est la seule solution de l'équation complète qui soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et aussi la seule qui reste bornée au voisinage de 0.

Solution 29

rms132-527

1. Il est clair que N est bien définie sur E (norme infinie d'une fonction continue sur un segment); qu'elle est positive; qu'elle est positivement homogène et qu'elle vérifie l'inégalité triangulaire (linéarité de la dérivation).

Enfin, si $N(f) = 0$, alors f est une solution de l'équation différentielle linéaire homogène

$$x'' + 2x' + x = 0$$

qui vérifie en outre $x(0) = x'(0) = 0$, donc f est la fonction nulle (soit par un calcul explicite sachant que $f(t) = (at + b)e^{-t}$, soit en appliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz).

Donc N est bien une norme sur E .

▮ Bien entendu, N n'est pas une norme sur $\mathcal{C}^2([0, 1])$.

2. La fonction $f \in E$ considérée est la solution du problème de Cauchy :

$$\forall t \in [0, 1], \quad x''(t) + 2x'(t) + x(t) = g(t), \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $x_H(t) = (at + b)e^{-t}$ et la méthode de variation des constantes nous donne une solution particulière :

$$x_0(t) = e^{-t} \int_0^t e^s(t-s)g(s) ds$$

et en même temps (puisqu'on raisonne sur le couple (x, x') en faisant varier les constantes)

$$x'_0(t) = e^{-t} \int_0^t e^s(1+s-t)g(s) ds.$$

▮ On pourrait dériver et simplifier l'expression de $x_0(t)$: ce n'est pas compliqué, mais c'est un peu long. L'avantage de la méthode de variation des constantes est de nous donner directement une expression simple de la dérivée — et de ne la donner que si nous en avons réellement besoin.

Il apparaît que $x_0(0) = x'_0(0) = 0$, donc $f = x_0$!

3. On déduit de l'inégalité triangulaire que :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, 1], \quad |f(t)| &\leq \int_0^t \underbrace{e^{s-t}(t-s)}_{\geq 0} \|g\|_\infty ds \\ &\leq N(f) e^{-t} \int_0^t e^s(t-s) ds. \end{aligned}$$

(Les bornes de l'intégrale sont rangées dans l'ordre croissant.)

Or, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$0 \leq e^{-t} \leq 1 \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq s \leq t, \quad 0 \leq e^s(t-s) \leq e \cdot 1$$

donc

$$\forall t \in [0, 1], \quad 0 \leq e^{-t} \int_0^t e^s(t-s) ds \leq e.$$

On a trouvé un majorant indépendant de $t \in [0, 1]$, donc on peut passer au sup :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty \leq e N(f).$$

▮ On vient de démontrer que la norme $\|\cdot\|_\infty$ est dominée par la norme N .

Mais la norme N prend en compte les variations de f (présence de f' et de f''), alors que la norme $\|\cdot\|_\infty$ ne tient compte que de l'amplitude de f et pas de ses variations. Pour démontrer que les deux normes ne sont pas équivalentes, on va chercher des fonctions dont l'amplitude est limitée et dont les variations sont de plus en plus rapides.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall t \in [0, 1], \quad f_n(t) = t \sin nt.$$

Il est clair que f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$, que $f_n(0) = f'_n(0) = 0$ et que $\|f_n\|_\infty \leq 1$.

Mais

$$\forall t \in [0, 1], \quad f_n(t) + 2f'_n(t) + f''_n(t) = [2 + (1 - n^2)t] \sin nt + n(2 + t) \cos nt$$

et en particulier $f_n(0) + 2f'_n(0) + f''_n(0) = 2n$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad N(f_n) \geq 2n.$$

Le quotient $N(f_n)/\|f_n\|_\infty$ tend vers $+\infty$, donc la norme N n'est pas dominée par la norme $\|\cdot\|_\infty$. Ces deux normes ne sont donc pas équivalentes.

Solution 30**rms132-633**

1. La fonction w est constante.

► Première méthode : comme y_1 et y_2 sont de classe $\mathcal{C}^2$, la fonction w est dérivable et

$$w' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 = y_1(-f y_2) - (f y_1) y_2 \equiv 0.$$

La fonction w est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

► Deuxième méthode : la fonction w est un wronskien de l'équation différentielle. Sous forme résoluble du premier ordre, l'équation s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad Y'(x) = AY(x) \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour chaque wronskien W (et en particulier pour w), il existe donc une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad W(x) = K \cdot \exp[x \operatorname{tr} A].$$

Comme la trace de A est nulle, on en déduit que tous les wronskiens sont constants.

2. Si une fonction y est de classe $\mathcal{C}^2$ et bornée, alors le produit fy est intégrable (produit d'une fonction intégrable par une fonction continue et bornée).

Si y est une solution de l'équation différentielle, alors en fait $y'' = -fy$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. D'après le Théorème fondamental de l'Analyse, on en déduit que la dérivée y' tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$.

Comme la fonction y est supposée bornée, la limite de y' est nécessairement nulle.

Ainsi, si y_1 et y_2 sont deux solutions bornées, alors le wronskien w est constant et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ (chaque terme est le produit d'une fonction bornée par une fonction de limite nulle). Cela prouve que w est en fait la fonction nulle et donc que y_1 et y_2 sont proportionnelles.

Or S est un plan vectoriel (ensemble des solutions d'une équation différentielle scalaire, linéaire et homogène du second ordre), donc il existe des vecteurs non proportionnels dans S .

Il existe donc des fonctions non bornées dans S .

Solution 31**rms132-1028**

1. On part de l'hypothèse habilement réécrite :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad A_t S_t = S_t A_0$$

et on dérive en appliquant la formule de Leibniz :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad A_t' S_t + A_t S_t' = S_t' A_0.$$

Comme la matrice S_t est inversible, on en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad A_t' = B_t A_t - A_t B_t \quad \text{avec} \quad B_t = S_t' S_t^{-1}.$$

▮ Comme S est de classe $\mathcal{C}^1$, l'application $[t \mapsto S_t']$ est continue et comme $S_t \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $[t \mapsto S_t^{-1}]$ est de classe $\mathcal{C}^1$. (Inutile de se fatiguer à calculer la dérivée!)

2. Réciproquement, on s'appuie sur le calcul précédent pour deviner ce que vaut S_t . On a en effet démontré que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S_t' = B_t S_t.$$

Autrement dit, S est une solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre : rien de plus simple à résoudre!

• Comme $[t \mapsto B_t]$ est continue, elle admet une primitive $[t \mapsto C_t]$ (de classe $\mathcal{C}^1$...) telle que $C_0 = 0_n$ et on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S_t = \exp C_t.$$

On a ainsi défini une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$S_0 = \exp 0_n = I_n$$

et on sait que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S_t' = C_t'(\exp C_t) = (\exp C_t) C_t' = B_t S_t = S_t B_t.$$

On sait aussi que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S_t^{-1} = \exp(-C_t)$$

et donc que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{d[S_t^{-1}]}{dt} = -C_t' \cdot \exp(-C_t) = -B_t \cdot \exp(-C_t) = -\exp(-C_t) \cdot B_t.$$

• On considère maintenant l'application $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = S_t^{-1} A_t S_t = \exp(-C_t) \cdot A_t \cdot \exp(C_t).$$

En particulier,

$$F(0) = I_n^{-1} A_0 I_n = A_0.$$

En tant que produit de trois applications de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ et on calcule sa dérivée : pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F'(t) &= -[\exp(-C_t) \cdot B_t] \cdot A_t \cdot \exp(C_t) + \exp(-C_t) \cdot A_t' \cdot \exp(C_t) + \exp(-C_t) \cdot A_t \cdot [B_t \cdot \exp(C_t)] \\ &= \exp(-C_t) \cdot (A_t \cdot B_t - B_t \cdot A_t + A_t') \cdot \exp(C_t) = O_n \end{aligned}$$

par hypothèse sur B_t .

La fonction F est donc constante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S_t^{-1} \cdot A_t \cdot S_t = F(0) = A_0.$$

Solution 32

rms132-1122

1. La matrice A est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable : ses valeurs propres sont réelles et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

✎ *Je n'ai pas envie de calculer le polynôme caractéristique de A , même si ça ne pose aucune difficulté particulière, je vais me débrouiller autrement.)*

✎ *Pour gagner un peu de place, je vais systématiquement assimiler les matrices colonnes et les vecteurs de $\mathbb{R}^3$.*

► La deuxième colonne de la matrice A nous indique que 1 est une valeur propre de A . De plus, le rang de

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est égal à 2, donc $\text{Ker}(A - I_3) = \mathbb{R} \cdot (0, 1, 0)$.

► La trace de A est égale à 3 et comme A est diagonalisable, il existe deux réels $1 \pm \alpha$ tels que $\text{Sp}(A) = \{1 - \alpha; 1; 1 + \alpha\}$.
Le déterminant de A est égal à -3 (calcul rapide) et aussi à $1 - \alpha^2$, donc $\alpha = 2$ et

$$\text{Sp}(A) = \{-1; 1; 3\}.$$

► Comme

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

on a $\text{Ker}(A + I_3) = \mathbb{R} \cdot (1, 0, -1)$ et $\text{Ker}(A - 3I_3) = \mathbb{R} \cdot (1, 0, 1)$.

► En posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on a donc

$$P^{-1}AP = \Delta \stackrel{\text{déf.}}{=} \text{Diag}(-1, 1, 3)$$

d'après la formule de changement de base (les colonnes de P forment une base de vecteurs propres de A , respectivement associés aux valeurs propres $-1, 1$ et 3).

✎ *On constate que les trois droites propres sont, comme annoncé, deux à deux orthogonales.*

On aurait pu choisir une base orthonormée de vecteurs propres (ce qui nous aurait donné une matrice de passage P orthogonale), mais ici, ce n'est pas franchement utile et j'ai privilégié la simplicité de la matrice.

2. En posant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},$$

il s'agit ici de résoudre l'équation différentielle linéaire et homogène du premier ordre (sous forme résoluble)

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = A.X(t).$$

Nous allons résoudre ce système en utilisant les éléments propres de A .

⚠ Ce système différentiel est mal choisi : il s'agit en fait de résoudre d'une part l'équation différentielle $y' = y$ et d'autre part le système

$$\begin{cases} x' = 2x + z \\ z' = x + 2z \end{cases}$$

qui est associé à une matrice de $S_2(\mathbb{R})$: on n'est donc pas vraiment en dimension 3...

♣ Première méthode.

En posant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t) = P^{-1}.X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix},$$

on constate que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} X'(t) = A.X(t) &\iff P^{-1}.X'(t) = P^{-1}.A.X(t) \\ &\iff (P^{-1}X)'(t) = (P^{-1}AP).(P^{-1}.X)(t) \\ &\iff Y'(t) = \Delta.Y(t). \end{aligned}$$

Il s'agit donc en fait de résoudre le système différentiel (découplé) suivant.

$$\begin{cases} u'(t) = -u(t) \\ v'(t) = v(t) \\ w'(t) = 3w(t) \end{cases}$$

La solution générale est de la forme

$$u(t) = K_1 e^{-t}, \quad v(t) = K_2 e^t, \quad w(t) = K_3 e^{3t}$$

donc $X = (x, y, z)$ est une solution du système étudié si, et seulement si, il existe trois constantes d'intégration K_1, K_2 et K_3 telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = P.Y(t) = \begin{pmatrix} K_1 e^{-t} + K_3 e^{3t} \\ K_2 e^t \\ -K_1 e^{-t} + K_3 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

⚠ Le système différentiel étant maintenant résolu, on doit considérer que l'exercice est terminé.

Cela dit, le cours nous dit que la solution X peut s'exprimer en fonction de la position initiale $X(0)$ à l'aide de l'exponentielle de matrice :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \exp(tA).X(0)$$

avec

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = Y(0) = P^{-1}X(0) = \begin{pmatrix} \frac{x(0) - z(0)}{2} \\ y(0) \\ \frac{x(0) + y(0)}{2} \end{pmatrix}.$$

On en déduit (après avoir calculé P^{-1}) que

$$X(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{e^{3t} + e^{-t}}{2} & 0 & \frac{e^{3t} - e^{-t}}{2} \\ 0 & e^t & 0 \\ \frac{e^{3t} - e^{-t}}{2} & 0 & \frac{e^{3t} + e^{-t}}{2} \end{pmatrix}}_{\exp(tA)} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix}$$

et comme la colonne $X(0)$ est quelconque, on peut en déduire $\exp(tA)$ par identification.
Mais ce calcul est plutôt fastidieux.

Deuxième méthode

On a trouvé une base orthogonale de vecteurs propres pour A :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'après le cours, la projection orthogonale P_k sur la droite $\mathbb{R} \cdot u_k$ est donnée par

$$P_k = \frac{u_k \cdot u_k^T}{u_k^T \cdot u_k}.$$

On en déduit très facilement que

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres associées aux vecteurs propres u_1 , u_2 et u_3 étant -1 , 1 et 3 respectivement, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = (-1)^n \cdot P_1 + 1^n \cdot P_2 + 3^n \cdot P_3$$

et donc que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) = e^{-t} \cdot P_1 + e^t \cdot P_2 + e^{3t} \cdot P_3.$$

On en déduit enfin que la solution générale du système étudié est

$$X(t) = \exp(tA) \cdot X(0) = e^{-t} \cdot P_1 X(0) + e^t \cdot P_2 X(0) + e^{3t} \cdot P_3 X(0).$$

▮ Cette méthode pour calculer $\exp(tA)$ est préférable à la précédente (cet avis n'engage que moi).

Solution 33

rms132-1155

1. ▮ On sait que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur l'espace des fonctions bornées.

Soit $f \in E$.

► Comme f et f' sont continues sur le segment $[0, 1]$, les trois fonctions f , f' et $(f + f')$ sont bornées, donc $N(f)$ et $N'(f)$ sont bien définies et évidemment positives.

► Par linéarité de la dérivation et par homogénéité de $\|\cdot\|_\infty$, les deux applications N et N' sont positivement homogènes et vérifient l'inégalité triangulaire.

► Comme $0 \leq \|f\|_\infty \leq N(f)$, si $N(f) = 0$, alors $f = 0_E$ (puisque $\|\cdot\|_\infty$ sépare les points).

De même, si $N'(f) = 0$, alors $f + f' = 0_E$, donc il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = Ke^x$ pour tout $x \in [0, 1]$. Comme $f(0) = 0$, on en déduit que $f = 0_E$.

Donc N et N' séparent les points.

▮ Donc N et N' sont deux normes sur E .

2. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction

$$[t \mapsto e^t(f(t) + f'(t))]$$

est continue sur l'intervalle $[0, 1]$, donc (Théorème fondamental) le second membre est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est égale à

$$e^x(f(x) + f'(x)) = \frac{d}{dx}[e^x f(x)]$$

pour tout $x \in [0, 1]$. Par ailleurs, les deux expressions sont nulles pour $x = 0$.

Les deux expressions sont égales en un point et leurs dérivées sont égales sur l'intervalle $[0, 1]$, donc les deux expressions sont égales sur tout l'intervalle :

$$\forall x \in [0, 1], \quad e^x f(x) = \int_0^x e^t(f(t) + f'(t)) dt.$$

3. Par inégalité triangulaire, $N'(f) \leq N(f)$, donc $a = 1$ convient.
Réciproquement, d'après la question précédente, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$|f(x)| = \left| e^{-x} \int_0^x e^t (f(t) + f'(t)) dt \right| \leq e^{-x} \int_0^1 e^t |f(t) + f'(t)| dt \leq (e-1) \|f + f'\|_\infty.$$

Comme le majorant est indépendant de x , on en déduit que

$$\|f\|_\infty \leq (e-1)N'(f).$$

Par inégalité triangulaire,

$$\|f'\|_\infty = \|(f' + f) + (-f)\|_\infty \leq \|f' + f\|_\infty + \|f\|_\infty \leq eN'(f)$$

et finalement

$$\forall f \in E, \quad N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq (2e-1)N'(f).$$

Solution 34

rms132-1165

1. On discute sur le signe de c .

► Si $c = 0$, les solutions sont les fonctions affines : $y(x) = ax + b$.

► Si $c = \omega^2 > 0$, les solutions sont périodiques :

$$y(x) = a \sin \omega x + b \cos \omega x.$$

► Si $c = -\omega^2 < 0$, les solutions divergent :

$$y(x) = a \sinh \omega x + b \cosh \omega x.$$

2. Comme f est une solution de (E), elle est continue sur $\mathbb{R}$ et, d'après le Théorème fondamental, pour tout $y \in \mathbb{R}$ (fixé), l'application

$$[x \mapsto F(x, y)]$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x)f(y) = f(x+y) - f(x-y).$$

Comme f n'est pas identiquement nulle, il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(y_0) \neq 0$ et par conséquent

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{f(x+y_0) - f(x-y_0)}{f(y_0)}.$$

Donc f est en fait de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

▮ Bien entendu, on peut continuer (par récurrence) et en déduire que f est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

♣ Appliquons à nouveau le Théorème fondamental : les dérivées partielles de F sont bien définies sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\begin{aligned} \forall M = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(M) &= f(x+y) - f(x-y) \\ \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(M) &= f(x+y) - [-f(x-y)] = f(x+y) + f(x-y). \end{aligned}$$

Comme F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que les applications

$$[(x, y) \mapsto x+y] \quad \text{et} \quad [(x, y) \mapsto x-y]$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ (elles sont linéaires), les dérivées partielles de F sont en fait de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et donc F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

♣ D'après l'expression des dérivées partielles,

$$\begin{aligned} \forall M = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(M) &= f'(x+y) - f'(x-y) \\ \text{et} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(M) &= f'(x+y) - f'(x-y) \end{aligned}$$

donc F vérifie bien l'équation des ondes (ou équation de D'Alembert) avec $c = 1$.

En notant P_0 , une primitive de f sur (l'intervalle) $\mathbb{R}$, on a

$$F(x, y) = P_0(x + y) - P_0(x - y)$$

où P_0 est de classe $\mathcal{C}^2$: on ne devrait pas être étonné de retrouver l'équation des ondes !

3. D'après (E),

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(0) = \int_x^x f(t) dt = 0.$$

Donc : ou bien $f(x)$ est identiquement nul, et en particulier $f(0) = 0$; ou bien $f(x)$ n'est pas identiquement nul et on a quand même $f(0) = 0$.

• Comme f est une solution de (E), alors

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = f(x)f(y)$$

et par conséquent

$$\forall M = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f''(x)f(y) - f(x)f''(y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(M) - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(M) = 0$$

d'après la question précédente.

4. Il est clair que la fonction nulle est une solution de (E). Dorénavant, nous ne nous intéresserons qu'aux solutions non identiquement nulles de (E) en choisissant un réel y_0 tel que $f(y_0) \neq 0$.

D'après la question précédente,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) - \frac{f''(y_0)}{f(y_0)} \cdot f(x) = 0$$

et nous reprenons la discussion menée dans la première question avec

$$c = -\frac{f''(y_0)}{f(y_0)},$$

en tenant compte de la contrainte $f(0) = 0$ établie précédemment.

► Si $c = -f''(y_0)/f(y_0) = 0$, alors f est une fonction affine telle que $f(0) = 0$, donc $f(x) = ax$. L'équation (E) devient alors

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (ax).(ay) = 2axy.$$

Il n'y a que deux possibilités : $a = 0$ (solution identiquement nulle) et $a = 2$.

► Si $c > 0$, alors f est de la forme $a \sin \omega x$ et l'équation (E) devient cette fois

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (a \sin \omega x).(a \sin \omega y) = \frac{2a \sin \omega \sin \omega y}{\omega}.$$

À nouveau, il n'y a que deux possibilités : $a = 0$ et $a = 2/\omega$.

► Si $c < 0$, alors f est de la forme $a \operatorname{sh} \omega x$ et l'équation (E) devient maintenant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (a \operatorname{sh} \omega x).(a \operatorname{sh} \omega y) = \frac{2a \operatorname{sh} \omega x \operatorname{sh} \omega y}{\omega}$$

et une fois encore : $a = 0$ ou $a = 2/\omega$.

• En reprenant les calculs qui précèdent, on vérifie que les expressions trouvées sont toutes des solutions de (E), indépendamment de la valeur choisie pour $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.

Les solutions de (E) sont donc les fonctions

$$[x \mapsto 0], \quad [x \mapsto 2x], \quad \left[x \mapsto \frac{2 \sin \omega x}{x} \right], \quad \left[x \mapsto \frac{2 \operatorname{sh} \omega x}{x} \right]$$

pour un paramètre $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ arbitrairement choisi.

Solution 35**rms132-1175**

1. L'équation étant linéaire et homogène, on peut supposer que la solution y est une fonction polynomiale unitaire de degré d :

$$y(x) = x^d + \dots$$

où les termes absents constituent une fonction polynomiale de degré strictement inférieur à d .

On en déduit que

$$xy'(x) = dx^d + \dots \quad \text{et} \quad (x^2 - 1)y''(x) = d(d-1)x^d + \dots$$

Par conséquent,

$$(x^2 - 1)y''(x) - (x + 1)y'(x) + y(x) = (d^2 + d - 2)x^d + \dots$$

et comme le second membre est identiquement nul, il faut que

$$0 = d^2 + d - 2 = (d - 1)(d + 2)$$

et donc que $d = 1$.

En substituant $y(x) = x + a$ dans l'équation, on trouve $a = 0$.

Par conséquent, y est une solution polynomiale de l'équation (E) si, et seulement si, il existe une constante réelle K telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = Kx.$$

2.

L'énoncé suggère simplement d'achever la résolution de l'équation en appliquant la méthode de variation de la constante !

On cherche une solution y de la forme $y(x) = xz(x)$. En supposant que z soit de classe $\mathcal{C}^2$, on en déduit que

$$\begin{aligned} y(x) &= xz(x) \\ y'(x) &= xz'(x) + z(x) \\ y''(x) &= xz''(x) + 2z'(x) \end{aligned}$$

et donc que

$$(x^2 - 1)y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) = (x^2 - 1)xz''(x) + (4x^2 - 2)z'(x).$$

La fonction z est donc une solution de l'équation

$$(x^2 - 1)xz''(x) + (4x^2 - 2)z'(x) = 0. \quad (E')$$

On remarquera que cette équation est en fait une équation du *premier ordre* en l'inconnue $z'(x)$.

3. Avec les méthodes usuelles, on trouve rapidement

$$\frac{2 - 4X^2}{X(X^2 - 1)} = \frac{-2}{X} - \frac{1}{X - 1} - \frac{1}{X + 1}.$$

4. En considérant (E') comme une équation d'inconnue $z'(x)$, on déduit de la décomposition en éléments simples précédentes que z est solution de (E') si, et seulement si, il existe une constante réelle K_1 telle que

$$z'(x) = \frac{K_1}{x^2(x + 1)(x - 1)}.$$

Nouvelle décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{X^2(X + 1)(X - 1)} = \frac{-1}{X^2} - \frac{1/2}{X + 1} + \frac{1/2}{X - 1}$$

et on en déduit que z est solution de (E') si, et seulement si, il existe deux constantes réelles K_1 et K_2 telles que

$$z(x) = K_2 + K_1 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - x}{1 + x} \right| \right).$$

Par conséquent, y est solution de (E) si, et seulement si, il existe deux constantes réelles K_1 et K_2 telles que

$$y(x) = K_1 \left(1 + \frac{x}{2} \ln \left| \frac{1 - x}{1 + x} \right| \right) + K_2 x.$$

On a passé sous silence la question des intervalles de définition. Il y a ici trois singularités : $x = \pm 1$ (qui se voient sur l'équation différentielle elle-même) et $x = 0$ (qui apparaît lors de la mise en œuvre de la méthode de variation de la constante). Par conséquent, il y a quatre intervalles de résolution :

$$I_1 =]-\infty, -1[, \quad I_2 =]-1, 0[, \quad I_3 =]0, 1[, \quad I_4 =]1, +\infty[$$

et, pour chacun de ces intervalles, il y a deux constantes d'intégration — soit en tout huit constantes d'intégration !

Plus précisément, pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, il existe deux constantes réelles A_k et B_k telles que

$$\forall x \in I_k, \quad y(x) = A_k \left(1 + \frac{x}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \right) + B_k x.$$

Je rappelle que $\ln |u(x)|$ est une primitive de $\frac{u'(x)}{u(x)}$ sur tout intervalle sur lequel la fonction u ne s'annule pas.

Il est donc inutile de discuter sur l'intervalle pour calculer les primitives, c'est seulement pour simplifier l'expression des primitives (= éliminer la valeur absolue) que la discussion est nécessaire.

On peut ensuite se pencher sur la question des raccordements en $x = 0$ et en $x = \pm 1$.

Pour que les solutions sur I_3 et I_4 se raccordent par continuité en $x = 1$, il faut d'une part que $A_3 = A_4 = 0$ (pour qu'il y ait une limite finie) et d'autre part que $B_3 = B_4$ (pour que les limites à gauche et à droite coïncident).

Il est clair que la fonction $[x \mapsto Bx]$ est solution sur $]0, +\infty[$.

Idem pour le raccordement autour de $x = -1$.

Pour le raccordement en $x = 0$, il faut que $A_2 = A_3$ (égalité de la limite à gauche et de la limite à droite pour la continuité) et que $B_2 = B_3$ (égalité de la dérivée à gauche et de la dérivée à droite pour la dérivabilité).

Réciproquement, quelles que soient les constantes A et B , sur l'intervalle $] -1, 1[$, les solutions de la forme

$$Ax + B \left[1 + \frac{x}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \right],$$

sont clairement développables en série entières sur $] -1, 1[$: on aurait donc pu trouver ces solutions en cherchant les solutions développables en série entière (ce qui aurait masqué la singularité en $x = 0$).

Avec

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

on obtient la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{n-1}{n+1} \cdot a_n.$$

Pour les indices impairs, le coefficient a_1 peut être choisi arbitrairement et comme $a_3 = 0 \times a_1$, tous les autres termes d'indice impair sont nuls.

Pour les indices pairs, on trouve

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p} = \frac{-a_0}{2p-1}$$

donc

$$y(x) = a_1 x + a_0 \left(1 - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{2p-1} \right),$$

ce qui est conforme aux résultats trouvés plus haut.

Enfin, pour l'anecdote, les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $[x \mapsto Ax]$ (pour $A \in \mathbb{R}$ quelconque).

Solution 36

rms132-1176

1. Version longue (en récitant le cours)

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, il n'y a que trois possibilités :

- ou bien son polynôme caractéristique est scindé à racines simples (soit $\Delta > 0$);
- ou bien il admet une racine double (soit $\Delta = 0$);
- ou bien il est irréductible (soit $\Delta < 0$).

Autrement dit :

- ou bien cette matrice admet deux valeurs propres distinctes et, dans ce cas, elle est diagonalisable;

— ou bien elle n'a qu'une seule valeur propre :

$$\chi_A = (X - \lambda)^2$$

et dans ce cas,

— ou bien cette matrice est une homothétie : $A = \lambda I_2$ (ce n'est pas le cas ici);

— ou bien cette matrice est trigonalisable mais pas diagonalisable;

— ou bien elle n'est même pas trigonalisable.

Ici, le polynôme caractéristique de A est égal à

$$X^2 - (\operatorname{tr} A)X + \det A = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$$

et par conséquent A est trigonalisable mais pas diagonalisable.

• Version courte

La trace de A est égale à 2. Comme la trace est aussi la somme des deux valeurs propres, cela suggère d'étudier le cas $\lambda = 1$. Or la matrice

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible, donc 1 est bien valeur propre de A .

D'après la trace, 1 est donc la seule valeur propre de A , ce qui prouve que A est trigonalisable (le polynôme caractéristique est scindé et admet 1 comme racine double), mais pas diagonalisable (sinon, A serait semblable à I_2 et donc en fait égale à I_2).

2. D'après l'expression de $A - I_2$,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A - I_2) \quad \text{et} \quad (A - I_2) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On est ainsi conduit à poser

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et comme

$$A\varepsilon_1 = \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad A\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

on déduit de la formule de changement de base que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = U.$$

On sait que $(A - I_2)^2 = 0_2$ et donc que

$$\operatorname{Im}(A - I_2) \subset \operatorname{Ker}(A - I_2).$$

Quel que soit le vecteur ε_2 choisi, on aura forcément

$$(A - I_2)(\varepsilon_2) \in \operatorname{Ker}(A - I_2) = \mathbb{R} \cdot \varepsilon_1$$

et donc

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad A\varepsilon_2 = \varepsilon_2 + \alpha \cdot \varepsilon_1.$$

Si $\alpha = 0$, alors $\varepsilon_2 \in \operatorname{Ker}(A - I_2) = \mathbb{R} \cdot \varepsilon_1$, donc ε_2 serait proportionnel à ε_1 : ce serait un mauvais choix !

En conséquence, quel que soit ε_2 **non proportionnel** à ε_1 , la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base et, d'après la formule du changement de base, la matrice A est alors semblable à

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inutile de s'inquiéter, on est sûr de trouver une matrice de passage convenable !

3. En posant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, le système différentiel à résoudre peut s'écrire

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = A.X(t).$$

En posant alors

$$Y(t) = P^{-1}.X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix},$$

cette équation équivaut à l'équation

$$Y'(t) = P^{-1}.X'(t) = P^{-1}AP.P^{-1}X(t) = U.Y(t)$$

c'est-à-dire au système suivant.

$$\begin{cases} u' - u = v \\ v' - v = 0 \end{cases}$$

On en déduit dans un premier temps qu'il existe une constante K_2 telle que

$$v(t) = K_2.e^t.$$

La première équation devient alors

$$u'(t) - u(t) = K_2.e^t$$

et il existe une constante K_1 telle que

$$u(t) = K_1.e^t + K_2.te^t.$$

(On rappelle qu'il existe une recette simple pour trouver une solution particulière de l'équation complète : il suffit de l'appliquer.)

En conclusion : (x, y) est une solution du système différentiel étudié si, et seulement si, il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X(t) = P.Y(t) &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 e^t + K_2 t e^t \\ K_2 e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2K_1 - K_2).e^t + 2K_2.te^t \\ -K_1.e^t - K_2.te^t \end{pmatrix} \\ &= e^t \cdot \begin{pmatrix} 2K_1 - K_2 \\ -K_1 \end{pmatrix} + te^t \cdot \begin{pmatrix} 2K_2 \\ -K_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

✦ Variante

On déduit de la formule du binôme que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = nU + (1-n)I_2.$$

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = nA + (1-n)I_2 = I_2 + n(A - I_2).$$

On en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot A^n = e^t \cdot I_2 + te^t \cdot (A - I_2)$$

et donc que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \exp(tA).X(0) = e^t.X(0) + te^t.(A - I_2).X(0).$$

Solution 37

rms132-1177

1. Le système (S) peut aussi s'écrire sous la forme d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants sous forme résoluble :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = A.X(t) \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $I = \mathbb{R}$ est un intervalle, la Théorie de Cauchy-Lipschitz nous assure que, pour la condition initiale particulière

$$(t = 0, X(0) = (1, 0, 0)),$$

le système (S) admet une, et une seule, solution.

2. En tant que fonctions polynomiales des fonctions x , y et z (qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I), les fonctions $f = x + y + z$ et $g = x^2 + y^2 + z^2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et, d'après (S),

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) &= x'(t) + y'(t) + z'(t) = 0 \\ g'(t) &= 2(x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + z(t)z'(t)) = 0 \end{aligned}$$

donc les fonctions f et g sont constantes sur l'intervalle I .

D'après la condition initiale, $f(0) = g(0) = 1$.

La trajectoire

$$\Gamma = \{(x(t), y(t), z(t)), t \in \mathbb{R}\}$$

est donc contenue dans l'intersection du plan affine d'équation $[x+y+z=1]$ et de la sphère d'équation $[x^2+y^2+z^2=1]$: elle est donc contenue dans un cercle.

REMARQUE.— Il est trop tôt pour établir que l'inclusion réciproque est vraie.

Variantes

Si $AX = \lambda X$, alors $A^n X = \lambda^n X$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et par conséquent,

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^N \frac{t^n A^n}{n!} \cdot X = \sum_{n=0}^N \frac{(t\lambda)^n}{n!} \cdot X.$$

Il est clair que le second membre tend vers $e^{\lambda t} \cdot X$. Comme l'application

$$[M \mapsto MX]$$

est continue (application linéaire définie sur un espace vectoriel de dimension finie), on déduit du théorème de composition des limites que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} (M_n \cdot X) = \left(\lim_{N \rightarrow +\infty} M_n \right) \cdot X$$

et donc, par unicité de la limite, que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) \cdot X = e^{\lambda t} \cdot X.$$

Ce qui vaut pour les colonnes vaut aussi pour les lignes : comme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \exp(tA) \cdot X(0) = e^{0 \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X(0) = f(0) = 1.$$

On peut aussi remarquer que $g(t) = X(t)^\top \cdot X(t)$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) &= [X'(t)]^\top \cdot X(t) + X(t)^\top \cdot X'(t) = [A \cdot X(t)]^\top \cdot X(t) + X(t)^\top \cdot A \cdot X(t) \\ &= X(t)^\top \cdot (-A) \cdot X(t) + X(t)^\top \cdot A \cdot X(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque la matrice A est anti-symétrique.

Mais on peut procéder d'une autre manière ! Comme $X(t) = \exp(tA) \cdot X(0)$, alors

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t)^\top \cdot X(t) &= X(0)^\top \cdot [\exp(tA)]^\top \cdot \exp(tA) \cdot X(0) \\ &= X(0)^\top \cdot \exp(tA^\top) \cdot \exp(tA) \cdot X(0) \\ &= X(0)^\top \cdot \exp(0_n) \cdot X(0) \\ &= X(0)^\top \cdot X(0) \end{aligned}$$

ce qui prouve que l'expression $g(t) = X(t)^\top \cdot X(t)$ est bien indépendante de t .

3. La matrice A étant anti-symétrique, elle n'est pas diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ mais elle l'est dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ (un peu de culture mathématique ne peut pas nuire).

Comme je n'ai pas envie de calculer dans $\mathbb{C}$, je vais calculer le polynôme minimal de A pour en déduire l'expression générale des puissances de A .

On vérifie sans peine que

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad A^3 = -3A.$$

On en déduit (de proche en proche, par tâtonnements) que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad A^{2p+1} = (-3)^p A \quad \text{et que} \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad A^{2p} = (-3)^{p-1} A^2.$$

Le polynôme $X^3 + 3X = X(X^2 + 3)$ est un polynôme annulateur de A , c'est même son polynôme minimal et son polynôme caractéristique — mais c'est inutile de le savoir, ça ne simplifierait pas nos calculs.

On en déduit que

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) &= I_3 + \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-3)^{p-1} t^{2p}}{(2p)!} \right) \cdot A^2 + \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-3)^p t^{2p+1}}{(2p+1)!} \right) \cdot A \\ &= I_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p (\sqrt{3} t)^{2p+1}}{(2p+1)!} \right) \cdot A - \frac{1}{3} \cdot \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p (\sqrt{3} t)^{2p}}{(2p)!} \right) \cdot A^2 \\ &= \left[I_3 - \frac{1}{3} A^2 \right] + \frac{\sin \sqrt{3} t}{\sqrt{3}} \cdot A + \frac{\cos \sqrt{3} t}{3} \cdot A^2.\end{aligned}$$

En tenant compte de la condition initiale,

$$X(t) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left[\cos \sqrt{3} t \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin \sqrt{3} t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Comme les deux vecteurs qui apparaissent dans le crochet sont unitaires et orthogonaux, on reconnaît bien le paramétrage d'un cercle de rayon $\sqrt{2/3}$ et de centre $\frac{1}{3} \cdot (5, -1, -1)$.

On vérifie sans peine que ce cercle est contenu dans le plan $[x + y + z = 1]$.

Solution 38

rms132-1220

1. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on déduit du Théorème fondamental que $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et que

$$\forall x \neq 0, \quad [T(f)]'(x) = \frac{-1}{x^2} \int_0^x f(t) dt + \frac{1}{x} f(x) = \frac{-T(f)(x) + f(x)}{x}.$$

2. On recommence avec le Théorème fondamental!

En notant F , une primitive de f sur $\mathbb{R}$,

$$\forall x \neq 0, \quad T(f)(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}.$$

Comme F est une primitive de f , on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} T(f)(x) = F'(0) = f(0) = T(f)(0),$$

ce qui prouve que $T(f)$ est continue en 0.

On a déjà démontré que $T(f)$ était continue sur $\mathbb{R}^*$, donc $T(f)$ est bien continue sur $\mathbb{R}$ et T est bien une application de E dans E .

La linéarité de l'intégrale permet de vérifier facilement que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(\lambda f + g)(x) = \lambda T(f)(x) + T(g)(x)$$

quelles que soient les fonctions f et g dans E . Par conséquent, T est bien un endomorphisme de E .

3. a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, une valeur propre de T . Il existe donc une fonction $f \in E$ non identiquement nulle telle que $T(f) = \lambda f$. D'après la première question,

$$\forall x \neq 0, \quad \lambda x f'(x) + \lambda f(x) = f(x). \quad (*)$$

Si $\lambda = 0$, alors f doit être identiquement nulle sur $\mathbb{R}^*$ et comme f est continue sur $\mathbb{R}$, il faudrait que f soit identiquement nulle sur $\mathbb{R}$: c'est impossible par définition des vecteurs propres.

Donc 0 n'est pas valeur propre de T et l'application linéaire T est injective.

3. b. On reprend les calculs précédents. Comme $\lambda \neq 0$, l'équation différentielle $(*)$ donne :

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1 - \lambda}{\lambda x} \cdot f(x) = a \cdot \frac{f(x)}{x} \quad \text{avec} \quad a = \frac{1 - \lambda}{\lambda}.$$

Une fonction f est solution de l'équation différentielle $y'(x) = \frac{a}{x} y(x)$ sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) = Kx^a$ pour tout $x > 0$. On impose ici $f \in E$, donc il faut que f ait une limite finie au voisinage de 0 et donc que $a \in \mathbb{R}_+$.

L'étude du signe de $\alpha = \frac{1-\lambda}{\lambda}$ montre que : si λ est une valeur propre de T , alors $0 < \lambda \leq 1$.

Il est facile de vérifier la réciproque : pour tout réel $0 < \lambda \leq 1$, le paramètre $\alpha = \frac{1-\lambda}{\lambda}$ est positif et on déduit de l'équation différentielle (*) que f est un vecteur propre de T associé à la valeur propre λ si, et seulement si, il existe deux constantes K_+ et K_- telles que

$$\forall x \leq 0, \quad f(x) = K_- |x|^\alpha \quad \text{et} \quad \forall x \geq 0, \quad f(x) = K_+ x^\alpha.$$

La continuité de f n'impose aucune contrainte sur les constantes K_- et K_+ , donc le sous-espace propre de T associé à λ est un plan.

Solution 39

rms134-1479

1. Comme f est positive, l'inégalité (*) montre que sa dérivée seconde f'' est positive. On en déduit que f est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

2. Supposons qu'il existe un réel $t_0 \geq 0$ tel que $f'(t_0) > 0$. La tangente au graphe de f au point d'abscisse t_0 a pour expression

$$y = f(t_0) + (x - t_0)f'(t_0).$$

Comme f est convexe, son graphe est au-dessus de ses tangentes et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \geq f(t_0) + (x - t_0)f'(t_0).$$

Comme $f'(t_0) > 0$, le second membre tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$ et, par comparaison, f tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$. Cela contredit l'hypothèse sur f (la fonction est supposée majorée).

Par conséquent, la dérivée est négative : $f'(t) \leq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

3. Comme la dérivée est négative, la fonction f est décroissante. Par hypothèse, elle est positive, donc minorée et elle admet donc une limite finie $\ell \geq 0$ au voisinage de $+\infty$.

Si $\ell > 0$, alors

$$\forall t \geq 0, \quad f(t) \geq \ell$$

(puisque f est décroissante) et, d'après (*),

$$\forall t \geq 0, \quad f''(t) \geq \ell \alpha^2.$$

D'après le théorème des accroissements finis,

$$\forall t > 0, \exists c_t > 0, \quad \frac{f'(t) - f'(0)}{t} = f''(c_t) \geq \ell \alpha^2$$

et donc

$$\forall t > 0, \quad f'(t) \geq f'(0) + \ell \alpha^2 t.$$

Comme f est supposée deux fois dérivable et non pas de classe $\mathcal{C}^2$, on ne peut pas appliquer ici le Théorème fondamental. On peut le remplacer par le Théorème des accroissements finis, car $f' : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, donc elle est continue sur le segment $[0, t]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]0, t[$.

Le minorant tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$ (car $\alpha > 0$ et ℓ est ici supposé strictement positif). Par comparaison, la dérivée f' tend vers $+\infty$ alors qu'il s'agit d'une fonction négative : c'est absurde!

Par conséquent, la fonction f tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

4. La fonction f' est croissante (puisque f est convexe) et négative (on vient de le démontrer), donc elle tend vers une limite finie $\ell' \leq 0$ au voisinage de $+\infty$.

Supposons que $\ell' < 0$. Comme f' est croissante, on a alors

$$\forall x \geq 0, \quad f'(x) \leq \ell'.$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, on déduit du Théorème fondamental que

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt \leq f(0) + \ell' x.$$

Comme $\ell' < 0$, on en déduit par comparaison que f tend vers $-\infty$ au voisinage de $+\infty$, ce qui est absurde (la fonction f est, par hypothèse, positive).

5. On considère la fonction $g = \alpha^2 f^2 - (f')^2$: comme f est deux fois dérivable, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall x \geq 0, \quad g'(x) = 2\alpha^2 f(x)f'(x) - 2f'(x)f''(x) = 2f'(x)[\alpha^2 f(x) - f''(x)].$$

Or la dérivée f' est négative et le crochet est négatif, donc la dérivée g' est positive. La fonction g est donc croissante. Comme

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \alpha^2 \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x)]^2 = 0,$$

la fonction g est donc négative sur $\mathbb{R}_+$.

6. En factorisant g :

$$g(x) = [\alpha f(x) - f'(x)][\alpha f(x) + f'(x)] \leq 0$$

on obtient que

$$\forall x \geq 0, \quad \alpha f(x) + f'(x) \leq 0.$$

🔗 On sait que $\alpha > 0$, on a démontré que $f(x) \geq 0$ et que $f'(x) \leq 0$. Par conséquent, si le premier crochet est nul, alors $f(x) = f'(x) = 0$ et le second crochet est nul aussi.

Notre conclusion est donc vraie même lorsqu'on semble diviser par zéro !

Comme f est deux fois dérivable, nous définissons une fonction continue et positive g en posant

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = \alpha f(x) + f'(x).$$

🔗 Il y a un cours sur les équations différentielles, il n'y en a pas sur les inéquations différentielles !

La méthode que nous présentons ici est aussi astucieuse que fructueuse : on introduit une fonction auxiliaire g pour pouvoir considérer f comme la solution d'une équation différentielle (très facile à résoudre) et on étudie les propriétés de f selon les propriétés de g .

La fonction f est donc une solution de l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad y'(x) + \alpha y(x) = g(x).$$

Il existe donc une constante $A \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = e^{-\alpha x} \left(A + \int_0^x e^{\alpha t} g(t) dt \right).$$

Pour $x = 0$, on obtient $f(0) = A$, donc

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) &= f(0)e^{-\alpha x} + e^{-\alpha x} \int_0^x e^{\alpha t} g(t) dt \\ &\leq f(0)e^{-\alpha x} \end{aligned}$$

puisque la fonction g est négative sur $\mathbb{R}_+$.

Solution 40

rms134-1522

1. La fonction f est une solution de l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + y(x) = e^{-x}.$$

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$y(x) = Ae^{-x}$$

et une solution particulière est de la forme

$$y_0(x) = Bxe^{-x}$$

donc il existe deux réels A et B tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (A + Bx)e^{-x}.$$

On en déduit (par croissances comparées) que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

🔗 Un calcul rapide montre que $B = 1$, mais on n'a même pas besoin de connaître la valeur de B pour conclure !

2. Puisque la fonction f est donnée, on peut définir une fonction auxiliaire g en posant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f'(x) + f(x).$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction g est bien continue sur $\mathbb{R}$ et, par hypothèse, elle tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.
On peut alors voir la fonction f comme une solution de l'équation différentielle suivante.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + y(x) = g(x). \quad (*)$$

Les solutions de l'équation homogène associée à $(*)$ sont de la forme

$$y(x) = Ae^{-x}.$$

On en déduit la solution générale de $(*)$ en faisant varier la constante :

$$y(x) = A(x)e^{-x} \quad \text{avec} \quad A'(x)e^{-x} = g(x),$$

donc A est une primitive de $[x \mapsto g(x)e^x]$.

Comme la fonction f est une solution de l'équation différentielle $(*)$, il existe une constante K telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-x} \left(K + \int_0^x g(t)e^t dt \right).$$

La valeur de K importe peu, il reste à démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \int_0^x g(t)e^t dt = 0.$$

🔗 Tout cela est particulièrement astucieux et aussi classique qu'astucieux... Impossible de traiter cet exercice sans connaître l'astuce!

♣ Soit $\varepsilon > 0$. Comme la fonction g tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, il existe un seuil $A > 0$ tel que

$$\forall x \geq A, \quad |g(t)| \leq \varepsilon.$$

Sur le segment $[0, A]$, la fonction g est continue, donc elle est bornée : il existe un réel $M > 0$ tel que

$$\forall x \in [0, A], \quad |g(t)| \leq M.$$

Pour tout $x \geq A$, la relation de Chasles et l'inégalité triangulaire nous donnent :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x g(t)e^t dt \right| &\leq \left| \int_0^A g(t)e^t dt \right| + \left| \int_A^x g(t)e^t dt \right| \\ &\leq \int_0^A |g(t)|e^t dt + \int_A^x |g(t)|e^t dt \\ &\leq M \int_0^A e^t dt + \varepsilon \int_A^x e^t dt \\ &\leq Me^A + \varepsilon e^x. \end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$\forall x \geq A, \quad \left| e^{-x} \int_0^x g(t)e^t dt \right| \leq Me^A \cdot e^{-x} + \varepsilon.$$

Comme $Me^A \cdot e^{-x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, il existe un seuil $A' > 0$ tel que

$$\forall x \geq A', \quad 0 \leq Me^A \cdot e^{-x} \leq \varepsilon$$

et finalement

$$\forall x \geq \max\{A, A'\}, \quad \left| e^{-x} \int_0^x g(t)e^t dt \right| \leq 2\varepsilon,$$

ce qui prouve le résultat attendu.

Solution 41**rms135-767**

Il est clair que l'ensemble des solutions de l'équation $(\star)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions dérivables de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

✎ Il faut noter que l'équation $(\star)$ n'est pas une équation différentielle du premier ordre : elle ne relie pas f' et f , mais f' et la fonction composée $[x \mapsto f(1/x)]$. On ne dispose donc d'aucun outil théorique pour prédire le résultat que nous allons trouver.

♣ Comme la fonction inverse $[x \mapsto 1/x]$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation considérée nous assure que f' est en fait de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

✎ On peut démontrer par récurrence que f est nécessairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

En dérivant $(\star)$, on obtient

$$\forall x > 0, \quad f''(x) = \frac{-1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x^2} \cdot f(x)$$

d'après $(\star)$. Par conséquent, toute solution de l'équation $(\star)$ est aussi une solution de l'équation

$$\forall x > 0, \quad x^2 f''(x) + f(x) = 0. \quad (\dagger)$$

✎ L'équation $(\dagger)$ est bien une équation différentielle linéaire, homogène, du second ordre. Malheureusement, sa résolution ne saute pas aux yeux :

— les coefficients de l'équation ne sont pas constants ;

— si on cherche une solution développable en série entière au voisinage de 0, on ne trouve que la fonction nulle.

Il reste à trouver l'astuce qui va bien...

♣ Puisqu'on étudie une équation différentielle avec $x > 0$, on peut poser $x = e^t$ avec $t \in \mathbb{R}$. On remplace donc la fonction inconnue $f(x)$ par $g(t) = f(e^t)$: il est clair que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) &= e^t f'(e^t) \\ g''(t) &= e^t f'(e^t) + (e^t)^2 f''(e^t) \end{aligned}$$

donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (e^t)^2 f''(e^t) + f(e^t) = g''(t) - g'(t) + g(t).$$

Par conséquent, la fonction f est une solution de $(\dagger)$ si, et seulement si, la fonction g est une solution de

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g''(t) - g'(t) + g(t) = 0. \quad (\ddagger)$$

✎ Bingo ! Il s'agit cette fois d'une équation du second ordre à coefficients constants, on connaît la recette pour calculer les solutions de cette équation.

Les racines de l'équation caractéristique sont

$$\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

donc la fonction g vérifie l'équation $(\ddagger)$ si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = e^{t/2} \cdot \left(a \cos \frac{\sqrt{3}t}{2} + b \sin \frac{\sqrt{3}t}{2} \right).$$

♣ Par conséquent, si f est solution de l'équation $(\star)$, alors il existe deux réels a et b tels que

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \sqrt{x} \left(a \cos \frac{\sqrt{3} \ln x}{2} + b \sin \frac{\sqrt{3} \ln x}{2} \right).$$

✎ On dispose d'une recette pour calculer toutes les solutions de l'équation à coefficients constants $(\ddagger)$. On a seulement démontré que $(\ddagger)$ se déduisait de l'équation $(\star)$ (sans même étudier l'équivalence), donc on connaît la seule forme possible pour $f(x)$, sans savoir pour le moment quels coefficients a et b conviennent.

En injectant cette expression dans l'équation $(\star)$, on obtient en particulier

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (-a + \sqrt{3}b) \cos t + (\sqrt{3}a - 3b) \sin t = (-a + \sqrt{3}b)(\cos t - \sqrt{3} \sin t) = 0$$

c'est-à-dire $-a + \sqrt{3}b = 0$.

Finalement, les solutions de l'équation (*) sont les fonctions proportionnelles à

$$\sqrt{x} \left(\sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3} \ln x}{2} + \sin \frac{\sqrt{3} \ln x}{2} \right).$$

Variante

Une autre astuce est possible pour résoudre l'équation (‡) : chercher des solutions de la forme $f(x) = x^\alpha$.

L'équation (‡) donne alors $\alpha(\alpha - 1) + 1 = 0$, c'est-à-dire

$$\alpha = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

On en déduit que l'expression

$$\sqrt{x} \cdot [\underline{A}e^{i\sqrt{3}x/2} + \underline{B}e^{-i\sqrt{3}x/2}]$$

est une solution de (‡), quels que soient les nombres complexes $\underline{A}$ et $\underline{B}$. Par conséquent, l'expression

$$\sqrt{x} \cdot \left[a \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + b \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \right]$$

est une solution réelle de (‡), quels que soient les nombres réels a et b .

La théorie de Cauchy nous assure que l'ensemble des solutions de (‡) sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_+^*$ est un plan vectoriel et nous venons d'explicitier deux solutions qui ne sont pas proportionnelles, donc nous connaissons toutes les solutions de (‡).

Solution 42

rms135-784

Comme A est une application continue sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$, on déduit de la Théorie de Cauchy-Lipschitz que l'ensemble S_H des solutions $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C}^n)$ de l'équation différentielle linéaire et homogène

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = A(t)X(t)$$

est un espace vectoriel de dimension n .

• Soit $X \in S_H$ et posons

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi(X)(t) = X(t+T).$$

Il est clair que $\Phi(X)$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{C}^n$. De plus, comme A est périodique de période T ,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad [\Phi(X)]'(t) = X'(t+T) = A(t+T)X(t+T) = A(t)[\Phi(X)](t),$$

ce qui prouve que $\Phi(X) \in S_H$.

• On vérifie sans peine que Φ est une application linéaire.

Ainsi, Φ est un endomorphisme de S_H , espace vectoriel complexe de dimension finie, donc Φ admet au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Il existe donc $X_\lambda \in S_H$, non identiquement nulle (un valeur propre n'est jamais nul).

Enfin, par définition de Φ ,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X_\lambda(t+T) = \lambda X_\lambda(t).$$

Si la valeur propre λ était nulle, on pourrait en déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X_\lambda(t) = \lambda X_\lambda(t-T) = 0,$$

ce qui est absurde puisque X_λ est un vecteur propre.

Solution 43

rms135-962

1. Soit y , une fonction développable en série entière : il existe un réel $r > 0$ et une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que

$$\forall x \in]-r, r[, \quad y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k.$$

Comme $r > 0$, la fonction y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et (indéfiniment) dérivable terme à terme sur l'intervalle ouvert $]-r, r[$, donc

$$\begin{aligned} \forall x \in]-r, r[, \quad y'(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)a_{k+1}x^k, & 3xy'(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} 3ka_kx^k, \\ xy''(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)ka_{k+1}x^k, & x^2y''(x) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_kx^k. \end{aligned}$$

Il faut d'abord effectuer tous les changements d'indice nécessaire pour obtenir des sommes dont le terme général est toujours de la forme $b_k x^k$.

Il faut ensuite penser à ajouter, autant que possible, de termes nuls pour que les index des différentes sommes soient analogues, voire, dans le meilleur des cas, égaux.

Par conséquent, pour tout $x \in]-r, r[$, l'expression $x(1-x)y''(x) + (1-3x)y'(x) - y(x)$ est égale à

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)ka_{k+1}x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)a_k x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)a_{k+1}x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} 3ka_k x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k.$$

Après simplification, la fonction y est solution de l'équation (E) si, et seulement si,

$$\forall x \in]-r, r[, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)^2(a_{k+1} - a_k)x^k = 0.$$

Comme $r > 0$ et que les deux membres de l'égalité sont développables en série entière, on peut identifier les deux sommes terme à terme :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{k+1} = a_k.$$

On a ainsi démontré que toute solution développable en série entière de (E) est proportionnelle à la fonction $[x \mapsto 1/(1-x)]$.

On a raisonné par condition nécessaire en commençant par **supposer** que y était une solution développable en série entière.

Il faut maintenant vérifier que les fonctions trouvées (qui sont les seules possibles) sont effectivement des solutions de (E).

Au lieu de raisonner sur la série entière (ce qui nous obligerait à rester sur l'intervalle ouvert de convergence $]-1, 1[$), nous allons calculer sur la somme et donc sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

• Réciproquement, avec

$$f_1(x) = \frac{1}{1-x}, \quad \text{on a} \quad f_1'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad f_1''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

On en déduit facilement que f_1 est solution de (E) sur les deux intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.

L'équation différentielle homogène (E) peut être écrite sous la forme canonique

$$\forall x \in I, \quad Y'(x) = A(x)Y(x) \tag{C}$$

avec

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A(x) = \frac{1}{(1-x)x} \begin{pmatrix} 0 & (1-x)x \\ 1 & 3x-1 \end{pmatrix}.$$

L'application A est continue sur les trois intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$, $I_2 =]0, 1[$ et $I_3 =]1, +\infty[$. On peut donc appliquer le Théorème de Cauchy-Lipschitz sur ces trois intervalles (et sur tout sous-intervalle d'un de ces trois intervalles).

On en déduit que, pour $k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, pour tout instant $x_k \in I_k$ et toute "position initiale" $(y_k, v_k) \in \mathbb{R}^2$, il existe une, et une seule, solution $Y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ de l'équation canonique (C) sur l'intervalle I_k telle que $Y(x_k) = (y_k, v_k)$.

En remarquant que y est solution de (E) sur I si, et seulement si, Y est solution de (C) sur I , on peut reformuler les conséquences du Théorème de Cauchy-Lipschitz : pour $k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, pour tout instant $x_k \in I_k$ et pour tout couple $(y_k, v_k) \in \mathbb{R}^2$, il existe une, et une seule, solution $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ de l'équation (E) sur l'intervalle I_k telle que

$$y(x_k) = y_k \quad \text{et} \quad y'(x_k) = v_k.$$

Quelle que soit la formulation (canonique ou non), l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2 et pour l'instant, les solutions que nous avons trouvées sont toutes proportionnelles à f_1 — nous étudions un plan et nous n'en connaissons qu'une droite.

2. La théorie de Cauchy nous assure que l'ensemble des solutions de (E) sur I_1 (resp. sur I_2 , resp. sur I_3) est un plan vectoriel. Nous connaissons un vecteur $f_1 \neq 0$ de ce plan et nous allons chercher un second vecteur de ce plan, non proportionnel au premier, en faisant varier la constante.

Comme c'est le cas la plupart du temps, les calculs de dérivées et de primitives sont les mêmes sur les trois intervalles I_1 , I_2 et I_3 . Nous allons donc rédiger la résolution sur un intervalle I_k indéterminé.

Nous cherchons donc une fonction $\alpha \in \mathcal{C}^2(I_k, \mathbb{R})$ telle que la fonction

$$f_2 = \left[x \mapsto \alpha(x)f_1(x) = \frac{\alpha(x)}{1-x} \right]$$

soit une solution de (E) sur I_k . On en déduit que

$$\begin{aligned} \forall x \in I_k, \quad f_2'(x) &= \alpha'(x) \cdot f_1(x) + \alpha(x) \cdot f_1'(x), \\ f_2''(x) &= \alpha''(x) \cdot f_1(x) + 2\alpha'(x)f_1'(x) + \alpha(x)f_1''(x). \end{aligned}$$

🔗 On aura bien sûr pensé à utiliser la formule de Leibniz pour calculer la dérivée seconde !

🔗 On injecte ensuite ces expressions dans (E) en regroupant les termes en facteur de $\alpha(x)$, de $\alpha'(x)$ et de $\alpha''(x)$. On peut se dispenser de calculer le cofacteur de $\alpha(x)$, puisqu'il est nul : par définition, la fonction f_1 est une solution de (E) !

Ainsi,

$$\forall x \in I_k, \quad \left[\frac{\alpha''(x)}{1-x} + \frac{2x\alpha'(x)}{(1-x)^2} \right] + \frac{2\alpha''(x)}{(1-x)^3} = 0$$

ou, plus simplement,

$$\forall x \in I_k, \quad x\alpha''(x) + \alpha'(x) = 0.$$

🔗 Il ne s'agit pas vraiment d'une équation du second ordre, mais d'une équation du premier ordre en α' . Il en va toujours ainsi lorsqu'on applique la méthode de variation de la constante.

On en déduit tout d'abord que $\alpha'(x)$ est proportionnelle à $1/x$, puis que la fonction

$$f_2 = \left[x \mapsto \frac{\ln|x|}{1-x} \right]$$

est une solution de (E) sur I_k .

🔗 En conclusion, pour $1 \leq k \leq 3$, une fonction y est solution de (E) sur l'intervalle I_k si, et seulement si, il existe deux réels a_k et b_k tels que

$$\forall x \in I_k, \quad y(x) = a_k \cdot \frac{1}{1-x} + b_k \cdot \frac{\ln|x|}{1-x}.$$

🔗 Il est clair que la fonction f_2 n'est pas développable en série entière au voisinage de l'origine (limite infinie en $x = 0$!). C'est pourquoi toutes les solutions développables en série entière sont proportionnelles à f_1 .

3. Si y est une solution de (E) autour de $x = 0$, alors il existe des réels a_1, b_1, a_2 et b_2 tels que

$$\forall x < 0, \quad y(x) = \frac{a_1 + b_1 \ln|x|}{1-x} \quad \text{et} \quad \forall 0 < x < 1, \quad y(x) = \frac{a_2 + b_2 \ln x}{1-x}.$$

Comme $\ln|x|$ tend vers 0 au voisinage de 0, il faut que $b_1 = b_2 = 0$ pour que y soit bornée au voisinage de 0. Il faut de plus que $a_1 = a_2$ pour que y soit continue en 0.

Réciproquement, on sait déjà que la fonction f_1 est une solution de (E) sur $]-\infty, 1[$.

🔗 Si y est une solution de (E) autour de $x = 1$, alors il existe des réels a_2, b_2, a_3 et b_3 tels que

$$\forall 0 < x < 1, \quad y(x) = \frac{a_2 + b_2 \ln x}{1-x} \quad \text{et} \quad \forall x > 1, \quad y(x) = \frac{a_3 + b_3 \ln x}{1-x}.$$

On sait que $\ln x \sim (x-1)$ pour x voisin de 1, donc

$$y(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{a_k}{1-x} - b_k + o(1).$$

Pour que y soit continue en 1, il faut donc que $a_2 = a_3 = 0$ et que $b_2 = b_3$.

Réciproquement, la fonction f_2 est évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I_2 \cup I_3$. En posant $f_2(1) = -1$, on définit un prolongement de f_2 qui est même développable en série entière au voisinage de 1 : comme

$$\forall h \in]-1, 1[\setminus \{0\}, \quad \frac{\ln(1+h)}{-h} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} h^n}{n+1},$$

on a

$$f_2(x) = f_2(1 + (x-1)) \underset{x \rightarrow 1}{=} -1 + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{3} + \mathcal{O}((x-1)^3).$$

Cela nous montre que $f_2'(1) = 1/2$ et donc que la fonction f_2 ainsi prolongée vérifie (E) pour $x = 1$ également.

☞ La formule de Taylor donne le développement en série entière et le développement limité de f_2 : inutile de se fatiguer pour calculer un développement limité si on connaît un développement en série entière !

☛ Enfin, les discussions précédentes montrent que la seule solution de (E) sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$ est la fonction nulle.

Solution 44

rms135-963

1. Après injection de $y(x) = x^\alpha$ dans (H), on simplifie et finalement on cherche les réels α tels que

$$\forall x > 0, \quad (\alpha^2 - 3\alpha + 2)x^\alpha = 0.$$

Les seules solutions sont $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$.

Réciproquement, il est clair que toute fonction polynomiale de la forme $[x \mapsto ax + bx^2]$ est solution de (H) sur $\mathbb{R}$ (et non pas seulement sur $]0, +\infty[$).

2. ☛ Réduction à la forme canonique —

Sur un intervalle I exempt de singularité, l'équation différentielle (E) peut s'écrire sous la forme canonique

$$\forall x \in I, \quad Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x) \quad (C)$$

avec

$$A(x) = \frac{1}{x^2} \begin{pmatrix} 0 & x^2 \\ -2 & 2x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(x) = \frac{1}{x^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 + 2x \end{pmatrix}$$

et une fonction $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ est solution de (E) (resp. de (H)) si, et seulement si, la fonction

$$Y = \left[x \mapsto \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} \right] \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$$

est solution de (C) (resp. de l'équation homogène (C_h) associée à (C)).

☛ Sur les intervalles $I_- =]-\infty, 0[$ et $I_+ =]0, +\infty[$, les deux fonctions A et B sont continues. Dans ces conditions, le Théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure en particulier que l'ensemble des solutions de l'équation homogène (H) sur un intervalle I contenu dans I_- ou dans I_+ est un plan vectoriel.

☛ D'après la question précédente, les applications F_1 et F_2 définies par

$$F_1 = \left[x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad \text{et} \quad F_2 = \left[x \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ 2x \end{pmatrix} \right]$$

sont deux solutions non proportionnelles de l'équation homogène (C_h) , donc le couple (F_1, F_2) est une base du plan des solutions de (C_h) .

Par conséquent, la matrice

$$M(x) = \begin{pmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix}$$

est inversible pour tout $x \in I$ et on peut trouver une solution particulière de l'équation (C) sous la forme $Y(x) = M(x)\Lambda(x)$ où $\Lambda \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ (méthode de variation des constantes).

☛ On vérifie sans peine que $Y(x) = M(x)\Lambda(x)$ est solution de (C) sur l'intervalle I si, et seulement si,

$$\forall x \in I, \quad M(x)\Lambda'(x) = B(x)$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in I, \quad \Lambda'(x) = \frac{2}{x^3} \begin{pmatrix} -x - x^2 \\ 1 + x \end{pmatrix}.$$

En choisissant

$$\Lambda(x) = \frac{1}{x^2} \begin{pmatrix} 2x - 2x^2 \ln|x| \\ -1 - 2x \end{pmatrix},$$

on en déduit qu'une solution particulière de (C) sur I_+ est donnée par

$$Y(x) = M(x)\Lambda(x) = \begin{pmatrix} x & x^2 \\ \star & \star \end{pmatrix} \Lambda(x) = \begin{pmatrix} 1 - 2x \ln|x| - 2x \\ \star \end{pmatrix}.$$

Comme, par définition,

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$$

et qu'on s'intéresse essentiellement à y , il est inutile d'effectuer les calculs sur la deuxième ligne.

Une solution particulière de (E) est donc donnée par

$$\forall x \in I, \quad y_0(x) = 1 - 2x \ln|x|.$$

On peut supprimer le terme $-2x$, puisqu'il s'agit d'une solution de l'équation homogène (H)!

D'après le principe de superposition, pour $I = I_-$ et pour $I = I_+$, une fonction $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ est solution de l'équation différentielle (E) si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que

$$\forall x \in I, \quad y(x) = [ax + bx^2] + [1 - 2x \ln|x|].$$

3. Si f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors il existe des réels a_- , b_- , a_+ et b_+ tels que

$$\forall x < 0, \quad f(x) = a_-x + b_-x^2 + 1 - 2x \ln x \quad \text{et} \quad \forall x > 0, \quad f(x) = a_+x + b_+x^2 + 1 - 2x \ln|x|.$$

Quels que soient les réels a_- , b_- , a_+ et b_+ , le raccord en $x = 0$ est continu (limite nulle à gauche et à droite de 0) mais n'est pas dérivable en $x = 0$ (tangente verticale).

L'équation (E) n'admet donc pas de solution sur $\mathbb{R}$.

Solution 45

rms135-964

1. Quels que soient le réel a et le vecteur $x \in \mathbb{R}^3$, il est clair que la fonction $f = [t \mapsto e^{at}x]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = ae^{at}x.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, une valeur propre de la matrice A . Il existe donc un vecteur propre $x_\lambda \in \mathbb{R}^3$ de A associé à λ et, par définition, ce vecteur n'est pas nul.

La fonction $f_\lambda = [t \mapsto e^{\lambda t}x_\lambda]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'_\lambda(t) = \lambda e^{\lambda t}x_\lambda = e^{\lambda t} \cdot Ax_\lambda = A \cdot f_\lambda(t).$$

Réciproquement, si f_λ est une solution de (H), alors en particulier

$$\lambda \cdot x_\lambda = \lambda e^{\lambda \times 0} \cdot x_\lambda = f'_\lambda(0) = Af_\lambda(0) = A \cdot (e^{\lambda \times 0} \cdot x_\lambda) = Ax_\lambda$$

et comme le vecteur x_λ est supposé non nul, on en déduit qu'il s'agit d'un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .

2. a. Comme

$$f_{a,b,c}(t) = a \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + be^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + ce^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

il est clair que F est le sous-espace de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par les trois fonctions $f_{1,0,0}$, $f_{0,1,0}$ et $f_{0,0,1}$. C'est donc un espace vectoriel et sa dimension est inférieure à 3.

On peut rapidement vérifier que le rang de la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est égal à 3, donc cette matrice est inversible, ce qui prouve que les trois vecteurs $f_{1,0,0}(0)$, $f_{0,1,0}(0)$ et $f_{0,0,1}(0)$ sont linéairement indépendants et donc que la famille $(f_{1,0,0}, f_{0,1,0}, f_{0,0,1})$ est une base de F et $\dim F = 3$.

Si trois fonctions f , g et h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ forment une famille liée, alors il existe un triplet de scalaires $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad af(t) + bg(t) + ch(t) = 0$$

et en particulier $af(0) + bg(0) + ch(0) = 0$, ce qui prouve que les trois vecteurs $f(0)$, $g(0)$ et $h(0)$ forment une famille liée (puisque les trois scalaires a , b , c ne sont pas tous nuls).

2. b. Quels que soient a, b, c et t ,

$$f'_{a,b,c}(t) = be^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - ce^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La relation $f'(t) = Mf(t)$ est vérifiée pour toute fonction $f \in F$ si, et seulement si, elle est vérifiée pour les trois fonctions $f_{1,0,0}, f_{0,1,0}, f_{0,0,1}$ (qui constituent une sorte de base canonique de F). On cherche donc une matrice M telle que

$$M \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$MP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\dagger)$$

On obtient rapidement

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et on en déduit que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

est la seule matrice qui convienne.

• En remarquant que l'équation $(\dagger)$ peut aussi s'écrire

$$MP = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

on obtient

$$M = P \text{Diag}(0, 1, -1) P^{-1}.$$

Par conséquent, la matrice M est diagonalisable et $\text{Sp}(M) = \{0, -1, 1\}$.

Le cours sur les systèmes différentiels à coefficients constants montre que les solutions de l'équation $x'(t) = Mx(t)$ sont les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^3)$ de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \exp(tM).f(0).$$

Ici,

$$f_{a,b,c}(0) = \begin{pmatrix} b+c \\ 2a-b \\ a+c \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f_{a,b,c}(t) = P \begin{pmatrix} a \\ be^t \\ ce^{-t} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne

$$f_{a,b,c}(t) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1} f_{a,b,c}(0)$$

et comme cette propriété est vraie pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tM) &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1} = P \exp[\text{Diag}(0, t, -t)] P^{-1} \\ &= \exp[tP \text{Diag}(0, 1, -1) P^{-1}] \end{aligned}$$

(puisque $\exp(Q^{-1}AQ) = Q^{-1}\exp(A)Q$, quelles que soient la matrice A et la matrice inversible Q).

NB : L'application $\exp$ n'est pas injective sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution 46**rms135-1151**

Le cours sur les systèmes différentiels à coefficients constants nous montre que les solutions du système homogène $x'(t) = Ax(t)$ sont les applications $x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \exp(tA)(x(0)).$$

• Comme la matrice A est diagonalisable, l'espace $\mathbb{R}^n$ est la somme (directe, forcément directe) des sous-espaces propres de A :

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\alpha \in \text{Sp}(A)} \text{Ker}(A - \alpha I_n).$$

En notant $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq r}$, les valeurs propres (deux à deux distinctes) de A , il existe une, et une seule, famille de vecteurs $(u_k)_{1 \leq k \leq r}$ telle que

$$x(0) = \sum_{k=1}^r u_k \quad \text{et} \quad \forall 1 \leq k \leq r, \quad u_k \in \text{Ker}(A - \alpha_k I_n).$$

On en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \sum_{k=1}^r \exp(tA)(u_k) = \sum_{k=1}^r e^{t\alpha_k} \cdot u_k. \quad (\ddagger)$$

• Il faut bien distinguer l'application $\exp = [M \mapsto \exp(M)]$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, qui est développable en série entière, et l'application $\exp(M) = [x \mapsto \exp(M)x]$, qui est linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ puisque $\exp(M) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

• Avec $Mu = \alpha \cdot u$, on a $M^k u = \alpha^k \cdot u$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et donc

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \left(\sum_{k=0}^N \frac{M^k}{k!} \right) (u) = \left(\sum_{k=0}^N \frac{\alpha^k}{k!} \right) \cdot u$$

Par définition de $\exp(M)$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| \exp(M) - \sum_{k=0}^N \frac{M^k}{k!} \right\| = 0$$

et par définition de $|\cdot|$,

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \left\| \exp(M)(u) - \left(\sum_{k=0}^N \frac{M^k}{k!} \right) (u) \right\| \leq \left\| \exp(M) - \sum_{k=0}^N \frac{M^k}{k!} \right\| \|u\|.$$

On en déduit que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| \exp(M)(u) - \left(\sum_{k=0}^N \frac{\alpha^k}{k!} \right) \cdot u \right\| = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \exp(M)(u) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \right) \cdot u = e^\alpha \cdot u.$$

• Supposons que les valeurs propres de A soient indexées de manière décroissante :

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_r.$$

De plus, la trace de A est égale à la somme des valeurs propres (comptées avec multiplicité). Comme cette trace est strictement positive, la matrice A admet au moins une valeur propre *strictement positive*, donc $\alpha_1 > 0$.

On déduit de la décomposition $(\ddagger)$ que

$$u_1 = e^{-t\alpha_1} x(t) - \sum_{k=2}^r e^{t(\alpha_k - \alpha_1)} \cdot u_k$$

et donc que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \|u_1\| \leq e^{-t\alpha_1} \|x(t)\| + \sum_{k=2}^r e^{t(\alpha_k - \alpha_1)} \|u_k\|.$$

Comme $x(t)$ tend vers le vecteur nul et que $(\alpha_k - \alpha_1) < 0$ pour tout $k \geq 2$, on en déduit que le second membre tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Par conséquent, $\|u_1\| = 0$ et u_1 est le vecteur nul.

On pourrait continuer sur cette lancée et en déduire (par récurrence finie) que $u_k = 0$ pour tout entier $1 \leq k \leq r$ tel que $\alpha_k \geq 0$.

On en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) \in \text{Vect}(u_2, \dots, u_r) \subset \bigoplus_{k=2}^r \text{Ker}(A - \alpha_k I_n).$$

Par définition, la dimension d'un sous-espace propre est toujours au moins égale à 1, donc

$$\dim \bigoplus_{k=2}^r \text{Ker}(A - \alpha_k I_n) = \sum_{k=2}^r \dim \text{Ker}(A - \alpha_k I_n) < \dim E.$$

D'après le Théorème de la base incomplète, il existe un hyperplan H de E tel que

$$\bigoplus_{k=2}^r \text{Ker}(A - \alpha_k I_n) \subset H$$

et donc tel que $x(t) \in H$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle, donc il existe une forme linéaire ℓ , non identiquement nulle, telle que $H = \text{Ker } \ell$ et donc telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \ell(x(t)) = 0.$$

Solution 47

rms135-1575

1. Sur l'intervalle I , l'équation (E) peut être mise sous la forme canonique

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \quad (C)$$

avec

$$A(t) = \frac{1}{t^2} \begin{pmatrix} 0 & t^2 \\ -1 & -t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \frac{1}{t^3} \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 + 1 \end{pmatrix}$$

où les deux applications $A : I \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $B : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ sont continues car $0 \notin I$.

Par conséquent, pour toute condition initiale $(t_0, (x_0, v_0)) \in I \times \mathbb{R}^2$, il existe une, et une seule, solution F de (C) sur I telle que $F(t_0) = (x_0, v_0)$.

Comme $x \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ est solution de (E) si, et seulement si, $X = (x, x') \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ est solution de (C), on en déduit que, pour tout triplet $(t_0, x_0, v_0) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, il existe une, et une seule, solution f de (E) sur I telle que $f(t_0) = x_0$ et $f'(t_0) = v_0$.

2. Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et que

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^x \longmapsto g(x) = f(e^x) \end{aligned}$$

l'application g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = e^x f'(e^x) \quad \text{et} \quad g''(x) = e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x).$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g''(x) + g(x) = (e^x)^2 f''(e^x) + e^x f'(e^x) + f(e^x).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le réel $t = e^x$ appartient à l'intervalle I et comme f est une solution de (E), alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (e^x)^2 f''(e^x) + e^x f'(e^x) + f(e^x) = \frac{1}{e^x} + e^x = 2 \cosh x.$$

La fonction g est donc une solution de l'équation différentielle à coefficients constants

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y(x) = e^x + e^{-x}. \quad (E_0)$$

On a raisonné par condition nécessaire ("si f est solution de (E), alors g est solution de (E_0) "), il faudra étudier la réciproque à un moment ou un autre. Il n'est pas utile d'attendre!

Le changement de variable $t = e^x$ peut aussi s'écrire $x = \ln t$, c'est donc aussi une bijection de classe $\mathcal{C}^2$ de I dans $\mathbb{R}$. De ce fait, en reprenant les calculs qui viennent d'être faits : si $g(x)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ qui vérifie l'équation (E_0) sur $\mathbb{R}$, alors $f(t) = g(\ln t)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ qui vérifie l'équation (E) sur I .

3. On reconnaît l'équation du pendule harmonique. Donc une fonction $y_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est solution de l'équation homogène associée à (E_0) si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_0(x) = a \cos x + b \sin x.$$

L'équation $y''(x) + y(x) = e^x$ admet une solution particulière de la forme $y_1(x) = be^x$. Après substitution et simplification, on trouve que $b = 1/2$.

De même, l'équation $y''(x) + y(x) = e^{-x}$ admet une solution particulière de la forme $y_2(x) = ce^{-x}$. On trouve que $c = 1/2$.

Finalement, une fonction $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est solution de (E_0) si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = a \cos x + b \sin x + ch x.$$

On a justifié plus haut qu'on pouvait en déduire les solutions de (E) : une fonction $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ est solution de (E) si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que

$$\forall t > 0, \quad f(t) = a \cos \ln t + b \sin \ln t + \frac{t}{2} + \frac{1}{2t}.$$

Solution 48

rms135-1577

1. On vérifie facilement que le polynôme caractéristique de A est $(X+1)(X-2)(X-3)$.

Il faut manifestement développer par la troisième colonne !

Une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admettant trois valeurs propres distinctes est diagonalisable :

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(A + I_3) \oplus \text{Ker}(A - 2I_3) \oplus \text{Ker}(A - 3I_3)$$

et les trois sous-espaces propres sont des droites vectorielles. Par conséquent, il suffit de trouver un vecteur non nul dans chacun de ces trois droites pour en déduire une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres.

Si on connaît une décomposition en somme directe $E = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$, alors il suffit de connaître une base de chaque sous-espace V_k pour en déduire par concaténation une base de E .

On écrit les trois matrices

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on en déduit facilement que

$$\text{Ker}(A + I_3) = \mathbb{R} \cdot (4, -2, -1), \quad \text{Ker}(A - 2I_3) = \mathbb{R} \cdot (1, -2, -1), \quad \text{Ker}(A - 3I_3) = \mathbb{R} \cdot (0, 0, 1).$$

La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

est donc inversible et $P^{-1}AP = \text{Diag}(-1, 2, 3)$.

2. Comme la matrice P est inversible et constante (indépendante de t), le produit $U = P^{-1}X$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si, et seulement si, la fonction $X = PU$ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad U'(t) = P^{-1}X'(t).$$

Comme la matrice P^{-1} est constante, les composantes de la colonne $U(t)$ sont en fait des combinaisons linéaires des composantes de la colonne $X(t)$ (et réciproquement). On applique donc la règle pour calculer la dérivée d'une combinaison linéaire de fonctions dérivables.

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} X'(t) = AX(t) &\iff P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t) && \text{(multiplication à gauche par } P^{-1}) \\ &\iff U'(t) = P^{-1}AP \cdot P^{-1}X(t) && \text{(astuce taupinale)} \\ &\iff U'(t) = D \cdot U(t). \end{aligned}$$

• Comme la matrice D est diagonale, le système (Δ_1) revient à résoudre trois équations différentielles indépendantes :

$$u'(t) = -u(t), \quad v'(t) = 2v(t), \quad w'(t) = 3w(t).$$

Donc U est solution de (Δ_1) si, et seulement si, il existe trois constantes K_1, K_2 et K_3 telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad U(t) = (K_1 e^{-t}, K_2 e^{2t}, K_3 e^{3t})$$

et finalement une fonction $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ est solution de (S_1) si, et seulement si, il existe $(K_1, K_2, K_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = PU(t) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 e^{-t} \\ K_2 e^{2t} \\ K_3 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

✎ Je ne suis pas convaincu de la nécessité d'effectuer ce produit matriciel, car je ne vois pas en quoi l'expression développée

$$F(t) = \begin{pmatrix} K_1 e^{-t} + K_2 e^{2t} \\ -2K_1 e^{-t} - 2K_2 e^{2t} \\ -K_1 e^{-t} - K_2 e^{2t} + K_3 e^{3t} \end{pmatrix}$$

est plus claire ou plus utile que l'expression factorisée ci-dessus.

J'irais même jusqu'à préférer une expression complètement factorisée (en notant $\Lambda = (K_1, K_2, K_3)$) :

$$F(t) = P \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = P \cdot \exp(tD) \cdot \Lambda$$

afin de faire apparaître $\exp(tA)$:

$$F(t) = P \cdot \exp[t(P^{-1}AP)] \cdot \Lambda = P \cdot [P^{-1} \cdot \exp(tA) \cdot P] \cdot \Lambda = \exp(tA) \cdot P\Lambda.$$

On comprend ici que $P\Lambda = F(0)$.

✎ Si on choisit une autre base de vecteurs propres (et pourquoi pas ?), on obtiendra une expression analogue de $X(t)$, mais les constantes d'intégration K_i seront différentes :

$$F(t) = \exp(tA) \cdot P_1 \Lambda_1 = \exp(tA) \cdot P_2 \Lambda_2.$$

Cela dit, si on impose une condition initiale $(t_0, X_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, on doit trouver la même solution, quelle que soit la base de vecteurs propres choisie ! En effet, la condition initiale $F(t_0) = X_0$ se traduit par

$$P_1 \cdot \Lambda_1 = P_2 \cdot \Lambda_2 = \exp(-t_0 A) X_0.$$

Ce n'est donc pas P , ni Λ qui compte, mais uniquement le produit $P\Lambda$.

3. a. Comme plus haut, on résout (S_2) en se ramenant au système découplé

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad U''(t) = DU(t) \quad (\Delta_2)$$

qui revient à résoudre trois équations différentielles indépendantes :

$$u''(t) + u(t) = 0, \quad v''(t) - 2v(t) = 0, \quad w''(t) - 3w(t) = 0.$$

Par conséquent, une fonction $U \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^3)$ est solution de (Δ_2) si, et seulement si, il existe six constantes d'intégration A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 et B_3 telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad U(t) = \begin{pmatrix} A_1 \cos t + B_1 \sin t \\ A_2 \exp(\sqrt{2}t) + B_2 \exp(-\sqrt{2}t) \\ A_3 \exp(\sqrt{3}t) + B_3 \exp(-\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$$

et, comme précédemment, une fonction $F \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^3)$ est solution de (S_2) si, et seulement si, il existe six constantes d'intégration A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 et B_3 telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = PU(t) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \cos t + B_1 \sin t \\ A_2 \exp(\sqrt{2}t) + B_2 \exp(-\sqrt{2}t) \\ A_3 \exp(\sqrt{3}t) + B_3 \exp(-\sqrt{3}t) \end{pmatrix}.$$

3. b. Considérons une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^3$ et la norme subordonnée $|\cdot|$ sur l'espace $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, donc la norme choisie importe peu.

En particulier, la norme choisie est équivalente à la norme produit pour laquelle une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ est bornée si, et seulement si, ses trois composantes sont bornées.

Le système différentiel (S_2) est un système différentiel linéaire et homogène du second ordre, donc l'ensemble $\mathcal{S}_2$ de ses solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$.

L'ensemble E est l'intersection du sous-espace $\mathcal{S}_2$ avec l'ensemble $\mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ des applications bornées de classe $\mathcal{C}^2$, qui est un sous-espace "bien connu" de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$.

Donc E est un espace vectoriel en tant qu'intersection de deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$.

Par définition, $U(t) = P^{-1}X(t)$ et donc $X(t) = PU(t)$. Comme la norme subordonnée est sous-multiplicative,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|U(t)\| \leq |P^{-1}| \|X(t)\| \quad \text{et} \quad \|X(t)\| \leq |P| \|U(t)\|.$$

Comme $|P^{-1}|$ et $|P|$ sont des facteurs indépendants de t , on en déduit que la fonction X est bornée si, et seulement si, la fonction U est bornée.

Comme $e^{\alpha t}$ tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$ lorsque $\alpha > 0$ (resp. au voisinage de $-\infty$ lorsque $\alpha < 0$), la fonction U est bornée sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, les constantes A_2, A_3, B_2 et B_3 sont nulles.

Ainsi, une fonction $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ est une solution de (S_2) qui reste bornée sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, il existe deux réels A_1 et B_1 tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = P \begin{pmatrix} A_1 \cos t + B_1 \sin t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, la dimension du sous-espace E des solutions bornées sur $\mathbb{R}$ est égale à 2.