
ESPACES EUCLIDIENS

Exercice 1

135-1291

Soient I , un intervalle de \mathbb{R} (de longueur strictement positive!) et E , l'espace vectoriel des applications continues de I dans \mathbb{R} et de carré intégrable sur I .

On considère n fonctions f_1, \dots, f_n dans E et la matrice

$$A = \left(\int_I f_i(t) f_j(t) dt \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

1. Démontrer que A est bien définie.
2. Démontrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
3. Démontrer que l'application

$$\varphi = [(X, Y) \mapsto X^T \cdot A \cdot Y]$$

est un produit scalaire si, et seulement si, la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre.

Exercice 2

135-1292

Soit E , un espace euclidien.

1. Soit $p \in L(E)$, un projecteur orthogonal. Démontrer que p est auto-adjoint et 1-lipschitzien.
2. Soient p et q , deux projecteurs orthogonaux.
 - 2.a. Démontrer que le polynôme caractéristique de $p + q$ est scindé sur \mathbb{R} .
 - 2.b. Démontrer que les racines de ce polynôme appartiennent au segment $[0, 2]$.

Exercice 3

135-1298

Soit $A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. On notera λ_1, λ_2 et λ_3 , les valeurs propres de A en supposant que

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3.$$

Pour tout $X \in \mathbb{R}^3$ non nul, on pose

$$q(X) = \frac{X^T \cdot A \cdot X}{X^T \cdot X}.$$

1. Démontrer que

$$\lambda_3 = \max\{q(X), X \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\}.$$

Énoncer une propriété analogue (qu'on admettra) pour λ_1 .

2. On note \mathcal{P} , l'ensemble des plans vectoriels de \mathbb{R}^3 .
 - 2.a. Soit $P \in \mathcal{P}$. On pose

$$S_1(P) = \{X \in P : \|X\| = 1\}.$$

Justifier l'existence du réel

$$\max\{q(X), X \in S_1(P)\}.$$

- 2.b. Démontrer que

$$\lambda_2 = \min_{P \in \mathcal{P}} \max_{X \in S_1(P)} q(X).$$

Exercice 4

rms135-1355

Soit E , un espace euclidien. On dit qu'un endomorphisme $f \in L(E)$ est une **similitude** lorsqu'il existe un réel positif λ tel que

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\| = \lambda \|x\|.$$

1. Démontrer que f est une similitude si, et seulement si, il existe un réel positif λ et une isométrie $g \in O(E)$ tels que

$$f = \lambda g.$$

2. Démontrer que f est une similitude si, et seulement si, f conserve l'orthogonalité :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle x | y \rangle = 0 \implies \langle f(x) | f(y) \rangle = 0.$$

Exercice 5**rms135-1356**

L'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique.

1. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1. a. Démontrer que

$$\|A^\top\| = \|A\| \quad \text{et que} \quad \|A^\top \cdot A\| = \|A \cdot A^\top\|.$$

1. b. Démontrer que

$$|\operatorname{tr} A| \leq \sqrt{n} \|A\|.$$

2. Soient A et B , deux matrices orthogonales telles que la matrice

$$C = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$$

soit orthogonale. Démontrer que $A = B$.

Exercice 6**rms135-1360**

Pour $n \geq 2$, on pose

$$A = (\min\{i, j\})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Trouver une matrice triangulaire supérieure B telle que $A = B^\top \cdot B$.

2. Démontrer que A est inversible.

3. Démontrer que les valeurs propres de A sont strictement positives.

Exercice 7**rms135-1361**

Soit E , un espace euclidien.

1. Soit $u \in \mathcal{S}^+(E)$, un endomorphisme auto-adjoint positif. Pour tout $x \in E$, démontrer que

$$\langle x | u(x) \rangle = 0 \iff x \in \operatorname{Ker} u.$$

2. Soient a et b , deux endomorphismes auto-adjoints positifs de E .

2. a. Démontrer qu'il existe un endomorphisme auto-adjoint positif $h \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $h^2 = b$.

2. b. On pose $f = ab$ et $g = hah$. Démontrer que g est diagonalisable.

2. c. On suppose ici que $b \in \mathcal{S}^{++}(E)$. En remarquant que $f = (ah)h$, démontrer que f et g ont les mêmes valeurs propres et que les sous-espaces propres associés ont même dimension. Qu'en conclure sur f ?

Exercice 8**rms135-1437**

Soient E , un espace euclidien et $f \in \mathcal{O}(E)$, une isométrie de E . On pose

$$g = I_E - f$$

et on note h , la projection orthogonale sur $\operatorname{Ker} g$.

1. Démontrer que

$$(\operatorname{Im} g)^\perp = \operatorname{Ker} g.$$

2. Soit $x \in E$. Démontrer que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} h(x).$$

Exercice 9**rms135-1438**

L'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique.

1. Soient M et N , deux matrices orthogonales. Démontrer que

$$\operatorname{tr}(M^\top \cdot N) \leq n.$$

2. Soient A et B , deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

2. a. Démontrer que

$$\operatorname{tr}((AB)^2) \leq \operatorname{tr}(A^2B^2).$$

2. b. Démontrer que

$$\operatorname{tr}((AB + BA)^2) \leq 4\sqrt{\operatorname{tr}(A^4)}\sqrt{\operatorname{tr}(B^4)}.$$

Exercice 10**rms135-1439**Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$M.M^T.M = -I_n. \quad (*)$$

1. Démontrer que $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer M .

Exercice 11**rms135-1440**Soit E , un espace euclidien.

1. Déterminer les éléments de $\mathcal{S}^+(E) \cap \mathcal{O}(E)$.
2. Démontrer que $\mathcal{S}^+(E)$ est stable par addition. Cet ensemble est-il un espace vectoriel?
3. Soit $u \in \mathcal{S}^+(E)$. Démontrer qu'il existe $w_u \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que

$$u = w_u^2.$$

4. En déduire que, quels que soient les endomorphismes auto-adjoints positifs u et v de E ,

$$\text{Ker}(u + v) = \text{Ker } u \cap \text{Ker } v \quad \text{et} \quad \text{Im}(u + v) = \text{Im } u + \text{Im } v.$$

Exercice 12**rms135-1522**Soient E , un espace euclidien; $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$, une base orthonormée de E et $(u_k)_{1 \leq k \leq n}$, une famille de vecteurs de E telle que

$$\sum_{k=1}^n \|u_k\|^2 < 1.$$

1. Démontrer que

$$\left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k \right\|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n \|u_k\|^2 \right).$$

2. En déduire que la famille

$$(e_1 + u_1, \dots, e_n + u_n)$$

est une base de E .**Exercice 13****rms135-1524**Pour P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$, on note

$$\langle P | Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0).$$

1. Démontrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On pose

$$F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] : P(1) = 0\}.$$

Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$. Quelle est sa dimension?

3. Calculer $d(1, F)$.

Exercice 14**rms135-1526**Soient E , un espace euclidien; $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$, une base orthonormée de E et p , un projecteur orthogonal de E .

1. Démontrer que

$$\forall x \in E, \quad \langle p(x) | x \rangle = \|p(x)\|^2.$$

2. Démontrer que

$$\sum_{k=1}^n \|p(e_k)\|^2 = \text{rg}(p).$$

Exercice 15**rms135-1528**

Soit $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose que $\det M = 0$ et que

$$M^\top = M^2. \quad (*)$$

1. Démontrer que $M^4 = M$.
2. En déduire que M est semblable à une matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \{0, 1\}$.

3. On suppose que $b = 0$. Que dire de M ?
4. Démontrer que $M^2 = M$.

Exercice 16**rms135-1529**

1. Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, un vecteur propre de A . On pose alors

$$B = \begin{pmatrix} A & X.X^\top \\ X.X^\top & A \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_a = \begin{pmatrix} X \\ aX \end{pmatrix}.$$

1. a. Pour quelles valeurs de a le vecteur Y_a est-il un vecteur propre de B ?
 1. b. La matrice B est-elle diagonalisable? Si oui, expliciter une base de vecteurs propres.
2. Avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

trouver un polynôme annulateur de B de degré trois.

Exercice 17**rms135-1530**

Soient $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = X.X^\top$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable?
2. Déterminer le rang de A . Quel est le spectre de A ?
3. Déterminer le polynôme caractéristique de A .

Exercice 18**rms135-1531**

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$M^3 = I_n, \quad M \neq I_n \quad \text{et} \quad M.M^\top = M^\top.M.$$

Démontrer que $M^\top.M$ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres. En déduire que la matrice M est orthogonale.

Exercice 19**rms135-1532**

1. Démontrer que, pour tout entier $r \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r, \quad \left(\sum_{k=1}^r \lambda_k \right)^2 \leq r \sum_{k=1}^r \lambda_k^2.$$

2. Soit $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que

$$(\operatorname{tr} B)^2 \leq \operatorname{rg} B \operatorname{tr}(B^2).$$

3. Soit $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, telle que

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad b_{i,i} = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \neq j, \quad |b_{i,j}| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

3. a. Exprimer $\operatorname{tr}(B^2)$. En déduire que $\operatorname{tr}(B^2) \leq 2n$.
3. b. Démontrer que $\operatorname{rg} B \geq n/2$.

Exercice 20**rms120-447**

Soient E , un espace vectoriel de dimension impaire; p et q , deux projecteurs de E . Démontrer que p et q ont un vecteur propre commun.

Exercice 21**rms120-451**

Soient A et B , deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $BA = 0_n$. Démontrer que A et B sont cotrigonalisables.

Exercice 22**rms120-455**

Soient E , un espace euclidien et f , un endomorphisme de E . Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f soit triangulaire supérieure.

Exercice 23**rms120-456**

Soient E , un espace euclidien et f , un endomorphisme de trace nulle. Démontrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E telle que

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \langle f(e_i) | e_i \rangle = 0.$$

Exercice 24**rms120-465**

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, non nulle. Démontrer que

$$\frac{(\operatorname{tr} A)^2}{\operatorname{tr}(A^2)} \leq \operatorname{rg} A.$$

Exercice 25**rms120-470**

Soient E , un espace euclidien; $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$, un endomorphisme auto-adjoint défini positif et $x \in E$, un vecteur non nul. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_k = \frac{f^k(x)}{\|f^k(x)\|}.$$

Démontrer que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers un vecteur propre de f .

Exercice 26**rms120-471**

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe un réel $0 < a < 1$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x^\top \cdot A \cdot x \leq a x^\top \cdot x.$$

Démontrer que la série de matrices

$$\sum (-1)^k \frac{A^k}{2k+1}$$

converge.

Exercice 27**rms120-473**

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle Ax | x \rangle \leq \|x\|^2.$$

1. Démontrer que $\det A \in [0, 1]$.
2. Démontrer que

$$\forall s \in [0, 1], \quad (\det A)^s \leq \det(sA + (1-s)I_n).$$

Exercice 28**rms120-474**

Soit $A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe un entier $n \geq 2$ tel que

$$A^n = A^\top.$$

1. Que dire de la matrice A^{n+1} ?
2. On suppose que A est inversible. Démontrer que A est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_p(\mathbb{C})$.
3. Déterminer les matrices $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$A^2 = A^T.$$