

Composition de Mathématiques

Le 11 février 2026 – De 13 heures à 16 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices et les objets connectés sont interdits.

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- L'espace $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes à coefficients réels est muni de son produit scalaire canonique :

$$\forall X, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle X | Y \rangle = X^\top \cdot Y.$$

La norme associée à ce produit scalaire est notée $\|\cdot\|$.

- L'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées à coefficients réels est muni de son produit scalaire canonique :

$$\forall A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle A | B \rangle_2 = \text{tr}(A^\top \cdot B).$$

La norme associée à ce produit scalaire est notée $\|\cdot\|_2$.

- Une matrice symétrique A est dite *positive* (ce qu'on note $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$) lorsque

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top \cdot A \cdot X \geq 0.$$

Elle est dite *définie positive* (ce qu'on note $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) lorsque

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^\top \cdot A \cdot X > 0.$$

- Une partie non vide C d'un espace vectoriel réel E est dite *convexe* lorsque

$$\forall x, y \in C, \forall t \in [0, 1], \quad (1-t)x + ty \in C.$$

On admet que : si C est une partie convexe de E , alors pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, pour tous p -uplets $(x_1, \dots, x_p) \in C^p$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}_+^p$ tel que $\lambda_1 + \dots + \lambda_p = 1$,

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \in C.$$

Une application $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur une partie convexe C de E est dite *convexe* lorsque, quels que soient x et y dans C ,

$$\forall t \in [0, 1], \quad f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Une application $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *concave* lorsque $-f$ est convexe, c'est-à-dire, quels que soient x et y dans C ,

$$\forall t \in [0, 1], \quad f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Partie A.

1. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, une matrice symétrique réelle. Démontrer que S est positive si, et seulement si, $\text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$.
 On **admettra** dans la suite que qu'une matrice symétrique réelle S est définie positive si, et seulement si, son spectre est contenu dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. Démontrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ sont des parties convexes de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Ces parties sont-elles des sous-espaces vectoriels?
3. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = S^2$.
4. Soient I , un intervalle de $\mathbb{R}$ (de longueur strictement positive) et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, une application convexe. Démontrer que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout p -uplet $(x_1, \dots, x_p) \in I^p$ et tout p -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}_+^p$ tel que $\lambda_1 + \dots + \lambda_p = 1$,

$$f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i).$$

☞ On pourra procéder par récurrence sur p .

Partie B.

- Soit $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, une matrice *non nulle*.
5. Démontrer que

$$\frac{1}{n} \text{tr } M \geq (\det M)^{1/n}.$$

Dans la suite de cette partie, on admettra que, quels que soient les réels positifs $x_1, \dots, x_n$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - g)^2 \leq 2 \max\{x_1, \dots, x_n\} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k - g \right)$$

où on a posé

$$g = \prod_{k=1}^n x_k^{1/n}.$$

6. Exprimer la norme $\|M\|_2$ en fonction des valeurs propres de M .
7. En déduire que

$$\frac{1}{n} \text{tr}(M) - (\det M)^{1/n} \geq \frac{1}{2n\|M\|_2} \|M - (\det M)^{1/n} I_n\|_2^2.$$

Partie C.

8. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$B = Q \cdot D \cdot Q^T \quad \text{et} \quad A = Q \cdot Q^T.$$

Que dire des éléments diagonaux de D si $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$?

☞ On pourra utiliser le résultat établi en [3.].

9. Étudier la convexité de la fonction $f = [t \mapsto \ln(1 + e^t)]$ et tracer l'allure de son graphe.
10. Soient A et B , deux matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Démontrer que

$$[\det(A + B)]^{1/n} \geq (\det A)^{1/n} + (\det B)^{1/n}.$$

11. Soient A et B , deux matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Démontrer que

$$\forall s \in [0, 1], \quad \det((1-s)A + sB) \geq (\det A)^{1-s} (\det B)^s.$$

Démontrer que cette inégalité reste vraie pour A et B dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

12. Que peut-on en déduire sur la fonction $[A \mapsto \ln(\det A)]$ sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$?

Partie D.

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On considère l'application $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \det(I_n + tA).$$

13. Exprimer $g(t)$ en fonction de $t \in \mathbb{R}$ et des valeurs propres de la matrice A . En déduire que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
14. Démontrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \ln \det(I_n + tA) \leq (\text{tr } A)t.$$

Partie E.

Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On considère alors l'application $f_A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_A(t) = \det(A + tM).$$

15. Démontrer que f_A est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

16. Démontrer qu'il existe un réel $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\forall t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[, \quad A + tM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$$

17. Démontrer que $A^{-1}M$ est diagonalisable.

☞ On pourra appliquer le Théorème de réduction simultanée établi en [8.].

18. Démontrer que

$$f_A(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \det A + \det A \cdot \operatorname{tr}(A^{-1}M) \cdot t + o(t).$$

19. En déduire $f'_A(t)$ pour $t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$.

20. Démontrer que l'application Φ définie par

$$\forall t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[, \quad \Phi(t) = (A + tM)^{-1}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$. En déduire que

$$\Phi(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} A^{-1} - A^{-1}MA^{-1}t + o(t).$$

☞ On remarquera que $\Phi(t) \times (A + tM) = I_n$ pour tout $t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$.

Soit α , un réel non nul dans l'intervalle $]^{-1/n}, +\infty[$. On considère maintenant l'application φ_α définie par

$$\forall t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[, \quad \varphi_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha} [\det(A + tM)]^{-\alpha}.$$

21. Démontrer que φ_α est dérivable sur $] -\varepsilon_0, \varepsilon_0[$ et que

$$\forall t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[, \quad \varphi'_\alpha(t) = \frac{-\operatorname{tr}[(A + tM)^{-1}M]}{[\det(A + tM)]^\alpha}.$$

22. Démontrer que φ_α est deux fois dérivable en 0 et que

$$\varphi''_\alpha(0) = \frac{\alpha[\operatorname{tr}(A^{-1}M)]^2 + \operatorname{tr}[(A^{-1}M)^2]}{(\det A)^\alpha}.$$

23. En déduire que $\varphi''_\alpha(0) \geq 0$.

☞ On pourra appliquer le résultat de [17.].

24. On suppose que $\varphi''_\alpha(0) > 0$. Démontrer qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que

$$\forall t \in]-\eta, \eta[, \quad \frac{(\det A)^\alpha}{\alpha[\det(A + tM)]^\alpha} \geq \frac{1}{\alpha} - \operatorname{tr}(A^{-1}M)t.$$



Solution * Déterminant et convexité

Partie A.

1. Question de cours!

- Supposons que $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Par définition,

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top \cdot S \cdot X \geq 0.$$

Considérons une valeur propre λ de S et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, un vecteur propre de S associé à λ . On a donc

$$0 \leq X^\top \cdot S \cdot X = X^\top \cdot (\lambda X) = \lambda X^\top \cdot X = \lambda \|X\|^2$$

et comme $X \neq 0$ (puisque X est un vecteur propre), on a aussi $\|X\|^2 > 0$. En divisant l'inégalité précédente par $\|X\|^2$, on obtient $\lambda \geq 0$. Par conséquent, le spectre de S est contenu dans $\mathbb{R}_+$.

- Supposons réciproquement que $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que le spectre de S soit contenu dans $\mathbb{R}_+$.

Considérons $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. D'après le Théorème spectral, il existe une famille de colonnes $(X_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(S)}$ telles que

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(S), \quad S X_\lambda = \lambda X_\lambda \quad \text{et} \quad \forall \lambda \neq \mu, \quad X_\lambda^\top \cdot X_\mu = 0.$$

On en déduit que

$$X^\top \cdot S \cdot X = \left(\sum_{\lambda \in \text{Sp}(S)} X_\lambda \right)^\top \cdot \left(\sum_{\mu \in \text{Sp}(S)} \mu X_\mu \right) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(S)} \lambda X_\lambda^\top \cdot X_\lambda = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(S)} \underbrace{\lambda}_{\geq 0} \underbrace{\|X_\lambda\|^2}_{\geq 0} \geq 0$$

et donc que $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

- On a ainsi démontré qu'une matrice symétrique S est positive si, et seulement si, ses valeurs propres sont toutes positives.

Si $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$: pour toute valeur propre λ de S et pour tout vecteur propre X de S associé à λ ,

$$0 < X^\top \cdot S \cdot X = \lambda \|X\|^2$$

puisque un vecteur propre est, par définition, non nul. On en déduit que $\lambda > 0$ et donc que $\text{Sp}(S)$ est contenu dans $\mathbb{R}_+^*$.

☛ Réciproquement, si le spectre de $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est contenu dans $\mathbb{R}_+^*$, alors (avec les notations précédentes)

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^\top \cdot S \cdot X = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(S)} \underbrace{\lambda}_{> 0} \|X_\lambda\|^2 > 0$$

car l'un des vecteurs X_λ (au moins) n'est pas nul (sinon, la somme des X_λ serait nulle). Donc S est bien définie positive.

2. Exercice classique!

Soient A et B , deux matrices de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $t \in [0, 1]$.

- Comme $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice $S_t = (1-t)A + tB$ est une matrice symétrique (réelle).

- Pour toute colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X^\top \cdot S_t \cdot X = (1-t)X^\top \cdot A \cdot X + tX^\top \cdot B \cdot X \geq 0$$

puisque $(1-t) \geq 0$, $X^\top \cdot A \cdot X \geq 0$, $t \geq 0$ et $X^\top \cdot B \cdot X \geq 0$.

Par conséquent, $S_t \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ pour tout $t \in [0, 1]$, ce qui prouve que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est convexe.

- Si A et B sont définies positives, on reprend le raisonnement précédent. Si la colonne X n'est pas la colonne nulle, alors $X^\top \cdot A \cdot X > 0$ et $X^\top \cdot B \cdot X > 0$. De plus, $(1-t)$ et t sont deux réels positifs dont la somme est strictement positive (elle est égale à 1), donc l'un des deux (au moins) est strictement positif et par conséquent $X^\top \cdot S_t \cdot X > 0$. Ainsi, $S_t \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ pour tout $t \in [0, 1]$, ce qui prouve que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe.

- Aucun de ces deux ensembles n'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En effet, la matrice symétrique I_n est définie positive (et en particulier positive) et $\text{Sp}(-I_n) = \{-1\} \not\subset \mathbb{R}_+$, ce qui prouve [1.] que $-I_n$ n'appartient pas à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (et donc pas non plus à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$), ce qui devrait être le cas si cet ensemble était un sous-espace vectoriel.

3. Exercice classique!

Comme $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on déduit du Théorème spectral qu'il existe une matrice orthogonale P telle que

$$P^\top \cdot A \cdot P = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

où les valeurs propres λ_k sont strictement positives. On peut donc poser

$$\Delta = \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \quad \text{et} \quad S = P \cdot \Delta \cdot P^\top = P \cdot \Delta \cdot P^{-1}$$

(puisque P est orthogonale).

Comme une matrice diagonale est symétrique,

$$S^T = (P \cdot \Delta \cdot P^T)^T = P \cdot \Delta^T \cdot P^T = P \cdot \Delta \cdot P^T = S,$$

donc la matrice S est bien symétrique. D'autre part, les réels $\sqrt{\lambda_k}$ sont les valeurs propres de S et comme ils sont tous strictement positifs, on déduit de [1.] que $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Enfin,

$$S^2 = [P \cdot \Delta \cdot P^{-1}]^2 = P \cdot \Delta^2 \cdot P^{-1} = P \cdot \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot P^{-1} = A.$$

Dans le raisonnement précédent, on a supposé que les valeurs propres de A étaient positives, on n'a pas besoin de les supposer strictement positives. Le résultat s'applique donc à toutes les matrices symétriques positives et pas seulement aux matrices symétriques définies positives.

Exercice classique !

On peut démontrer que la matrice S qu'on vient de définir est en fait la seule matrice symétrique positive dont le carré est égal à A . Pour cela, il est plus simple de raisonner en termes d'endomorphismes auto-adjoints.

☞ Soit $u \in \mathcal{S}^+(E)$, un endomorphisme auto-adjoint positif. D'après le Théorème spectral,

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u) \quad \text{où} \quad \forall \lambda \in \text{Sp}(u), \quad E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda I_E). \quad (*)$$

S'il existe un endomorphisme $v \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $v^2 = u$, alors u et v commutent car $u \circ v = v^3 = v \circ u$. Par conséquent, les sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ de u sont stables par v .

Pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, on note v_λ , l'endomorphisme de $E_\lambda(u)$ induit par restriction de v . En tant qu'endomorphisme induit par restriction d'un endomorphisme auto-adjoint positif, v_λ est aussi auto-adjoint positif et

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(u), \forall x \in E_\lambda(u), \quad v_\lambda^2(x) = v^2(x) = u(x) = \lambda x.$$

Par conséquent, $X^2 - \lambda = (X - \sqrt{\lambda})(X + \sqrt{\lambda})$ est un polynôme annulateur de v_λ .

Si $\lambda > 0$, alors $-\sqrt{\lambda} < 0$ donc [1.] $-\sqrt{\lambda}$ n'est pas une valeur propre de v_λ . Par conséquent, $X - \sqrt{\lambda}$ est un polynôme annulateur de v_λ , ce qui prouve que $v_\lambda = \sqrt{\lambda} I_{E_\lambda(u)}$.

Si $\lambda = 0$, alors le polynôme minimal de v_0 divise X^2 . Comme v_0 est diagonalisable (Théorème spectral), son polynôme minimal est scindé à racines simples, donc le polynôme minimal de v_0 est égal à X , ce qui prouve que $v_0 = \omega_{E_0(u)}$.

On connaît donc une décomposition de E en somme directe :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$$

et, pour chaque sous-espace $E_\lambda(u)$, on a exhibé un endomorphisme φ_λ de $E_\lambda(u)$. D'après le Théorème de caractérisation des applications linéaires, il existe un, et un seul, endomorphisme v de E tel que

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(u), \forall x \in E_\lambda(u), \quad v(x) = \varphi_\lambda(x). \quad (**)$$

On a ainsi prouvé l'unicité de v .

☞ Quant à l'existence, on l'a déjà prouvée matriciellement. Mais on pourrait aussi vérifier directement sur (*) et (**) que l'endomorphisme v qu'on vient de définir est auto-adjoint, avant de conclure avec [1.], puisque les valeurs propres de v sont les scalaires $\sqrt{\lambda_k}$.

4. Question de cours !

Pour $p = 1$, l'inégalité à établir se réduit à l'inégalité évidente $f(x_1) \leq f(x_1)$ (puisque $\lambda_1 = 1$).

Pour $p = 2$, on a $\lambda_1 = 1 - \lambda_2$ et il s'agit exactement de la définition des fonctions convexes.

Supposons le résultat établi pour un certain entier $p \geq 2$. Considérons alors des abscisses $x_1, \dots, x_p, x_{p+1}$ dans l'intervalle I et des scalaires positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}$ dont la somme est égale à 1.

En particulier, $0 \leq \lambda_{p+1} \leq 1$.

Si $\lambda_{p+1} = 1$, alors $\lambda_k = 0$ pour tout $1 \leq k \leq p$ et l'inégalité à établir n'est autre que $f(x_{p+1}) \leq f(x_{p+1})$, ce qui est évidemment vrai.

Supposons alors que $0 \leq \lambda_{p+1} < 1$. Dans ces conditions,

$$\sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k x_k = (1 - \lambda_{p+1}) \left(\sum_{k=1}^p \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{p+1}} x_k \right) + \lambda_{p+1} x_{p+1} \quad (*)$$

et on remarque que

$$\forall 1 \leq k \leq p, \quad \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{p+1}} \geq 0 \quad \text{et que} \quad \sum_{k=1}^p \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{p+1}} = \frac{1 - \lambda_{p+1}}{1 - \lambda_{p+1}} = 1.$$

|| Tout notre raisonnement repose sur la propriété (*), dite **associativité** du barycentre : un barycentre de $x_1, \dots, x_p, x_{p+1}$ est le barycentre de x_{p+1} et d'un barycentre de $x_1, \dots, x_p$.

Par convexité de f ,

$$f\left(\sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k x_k\right) \leq (1 - \lambda_{p+1}) f\left(\sum_{k=1}^p \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{p+1}} x_k\right) + \lambda_{p+1} f(x_{p+1})$$

et par hypothèse de récurrence,

$$f\left(\sum_{k=1}^p \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{p+1}} x_k\right) \leq \sum_{k=1}^p \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{p+1}} f(x_k).$$

Comme $(1 - \lambda_{p+1}) > 0$, on en déduit que

$$f\left(\sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k x_k\right) \leq (1 - \lambda_{p+1}) \left[\sum_{k=1}^p \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{p+1}} f(x_k) \right] + \lambda_{p+1} f(x_{p+1}) = \sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k f(x_k).$$

La propriété (dite **inégalité discrète de Jensen**) est ainsi démontrée par récurrence.

Partie B.

5. Comme la matrice M est symétrique réelle, elle est diagonalisable (Théorème spectral), donc la trace de M est la somme des valeurs propres et le déterminant de M , le produit des valeurs propres.

De plus, comme $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, ses valeurs propres $\mu_1, \dots, \mu_n$ sont positives [1.]. La trace et le déterminant de M sont donc positifs.

• Si les valeurs propres $\mu_1, \dots, \mu_n$ de M sont *strictement* positives, alors on déduit de l'inégalité de Jensen et de la convexité de la fonction $-\ln$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$ que

$$\ln\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \mu_k\right) \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \mu_k = \frac{1}{n} \ln \prod_{k=1}^n \mu_k.$$

|| Précisons qu'on applique ici l'inégalité de Jensen avec les réels strictement positifs $x_k = \mu_k$ et avec les coefficients $\lambda_k = 1/n$ pour $1 \leq k \leq n$: ce sont bien des réels positifs dont la somme est égale à 1.
Les notations choisies par l'énoncé ne simplifient pas la tâche !

Comme la fonction $\exp$ est croissante, on en déduit que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mu_k \geq \left(\prod_{k=1}^n \mu_k \right)^{1/n}$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{n} \operatorname{tr} M \geq (\det M)^{1/n}.$$

• Si l'une des valeurs propres de M n'est pas strictement positive, c'est-à-dire si 0 est une valeur propre de M , alors le déterminant est nul et la trace positive, donc l'inégalité est évidente.

6. Comme M est symétrique réelle, elle est semblable à une matrice diagonale $\operatorname{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ et par conséquent, la matrice M^2 est semblable à $\operatorname{Diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2)$.

Par définition, $\|M\|_2^2 = \operatorname{tr}(M^\top \cdot M) = \operatorname{tr}(M^2)$ (puisque M est symétrique) et donc

$$\|M\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n \mu_k^2}.$$

|| Comme la matrice M n'est pas la matrice nulle, elle admet au moins une valeur propre non nulle et on a donc bien $\|M\|_2 > 0$. Le résultat a été établi en supposant que la matrice M était symétrique réelle, on n'a pas eu besoin de faire d'hypothèse sur le signe des valeurs propres de M . Il est donc vrai pour toute matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et pas seulement pour $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

7. Par hypothèse [1.], les valeurs propres $\mu_1, \dots, \mu_n$ de M sont positives. On peut donc appliquer l'inégalité donnée par l'énoncé aux réels $x_k = \mu_k \in \mathbb{R}_+$:

$$\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n \mu_k = \operatorname{tr} M \quad \text{et} \quad g = \prod_{k=1}^n x_k^{1/n} = (\det M)^{1/n}.$$

• Soit $m_n = \max\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ (toute partie finie de $\mathbb{R}$ admet un plus grand élément). Il est alors clair que

$$\|M\|_2^2 = \sum_{k=1}^n \mu_k^2 \geq m_n^2.$$

Comme la matrice M est symétrique, positive et non nulle, ses valeurs propres sont positives [1.] et non toutes nulles, donc

$$\|M\|_2 \geq m_n > 0.$$

|| Si toutes les valeurs propres de $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont nulles, alors M est diagonalisable (Théorème spectral), donc semblable à la matrice nulle et donc égale à la matrice nulle.

• Par ailleurs, la matrice $M - gI_n$ est symétrique réelle et v est une valeur propre de $M - gI_n$ si, et seulement si, il existe une valeur propre μ de M telle que $v = \mu - g$. On déduit alors de la question précédente que

$$\|M - gI_n\|_2^2 = \sum_{k=1}^n v_k^2 = \sum_{k=1}^n (\mu_k - g)^2.$$

|| La matrice $M - gI_n$ est symétrique mais ses valeurs propres ne sont pas toutes positives ! Il était donc essentiel de remarquer à la question précédente que l'expression de la norme était valable pour toutes les matrices symétriques et pas seulement pour les matrices symétriques positives.

• En appliquant le résultat donné par l'énoncé,

$$\frac{1}{n} \|M - gI_n\|_2^2 \leq 2m_n \left(\frac{\operatorname{tr} M}{n} - g \right)$$

donc, puisque $\|M\|_2 \geq m_n > 0$,

$$\frac{1}{n} \operatorname{tr} M - g \geq \frac{1}{2nm_n} \|M - gI_n\|_2^2 \geq \frac{1}{2n\|M\|_2} \|M - gI_n\|_2^2,$$

ce qui est bien la relation demandée.

Partie C.

8. Exercice classique !

Comme $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe une matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = S^2$ d'après [3.]. En particulier, la matrice S est inversible et son inverse S^{-1} est une matrice symétrique.

|| Si une matrice symétrique est inversible, alors son inverse est aussi une matrice symétrique.
Première démonstration : en transposant les égalités $SS^{-1} = S^{-1}S = I_n$, on obtient que $(S^{-1})^\top = (S^\top)^{-1} = S^{-1}$ puisque S est symétrique.
Deuxième démonstration : comme la matrice S est inversible, son inverse est un polynôme en S (grâce à l'existence d'un polynôme annulateur dont le coefficient constant n'est pas nul).

Considérons alors la matrice $S^{-1}BS^{-1}$: comme B et S^{-1} sont symétriques réelles, cette matrice est symétrique réelle :

$$(S^{-1}BS^{-1})^\top = (S^{-1})^\top \cdot B^\top \cdot (S^{-1})^\top = S^{-1} \cdot B \cdot S^{-1}.$$

D'après le Théorème spectral, il existe une matrice orthogonale $P \in O_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$P^\top \cdot (S^{-1}BS^{-1}) \cdot P = D.$$

On pose alors $Q = SP$: la matrice Q est inversible en tant que produit de matrices inversibles. Comme S est symétrique et que P est orthogonale,

$$Q \cdot D \cdot Q^\top = (SP)D(P^\top \cdot S^\top) = SP(P^\top \cdot S^{-1}BS^{-1} \cdot P)P^\top \cdot S = B$$

et

$$Q \cdot Q^\top = (SP)(P^\top \cdot S^\top) = S \cdot P \cdot P^\top \cdot S = S^2 = A.$$

Cet exercice est classique, mais difficile : il faut d'abord penser à définir la racine carrée définie positive de A (= la matrice S) et ensuite à considérer la matrice $S^{-1}BS^{-1}$, qui a la bonne idée d'être symétrique réelle.

Un raisonnement par condition nécessaire conduit à la matrice $S^{-1}BS^{-1}$.

S'il existe une matrice inversible Q telle que $A = S^2 = Q \cdot Q^T$, alors (sachant que S est symétrique et inversible),

$$I_n = Q^{-1} \cdot S^2 \cdot (Q^T)^{-1} = Q^{-1} \cdot S \cdot S^T \cdot (Q^{-1})^T = (Q^{-1}S) \cdot (Q^{-1}S)^T,$$

ce qui prouve que $P = Q^{-1}S$ est une matrice orthogonale. On cherche donc une matrice Q de la forme $Q = SP^{-1} = S \cdot P^T$, où P est orthogonale, et telle que $Q^{-1} \cdot D \cdot (Q^T)^{-1}$ soit diagonale. On peut alors constater qu'il s'agit d'appliquer le Théorème spectral à la matrice $S^{-1}BS^{-1}$.

• Supposons pour finir que $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Par construction, les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de la matrice symétrique $S^{-1}BS^{-1}$. Pour toute colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle, la colonne $Y = S^{-1}X$ est non nulle (puisque S^{-1} est inversible!) et

$$X^T \cdot S^{-1}BS^{-1} \cdot X = Y^T \cdot B \cdot Y > 0$$

puisque B est définie positive. D'après [1.], les valeurs propres de $S^{-1}BS^{-1}$, c'est-à-dire les coefficients diagonaux de D , sont donc des réels strictement positifs.

9. La fonction f est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

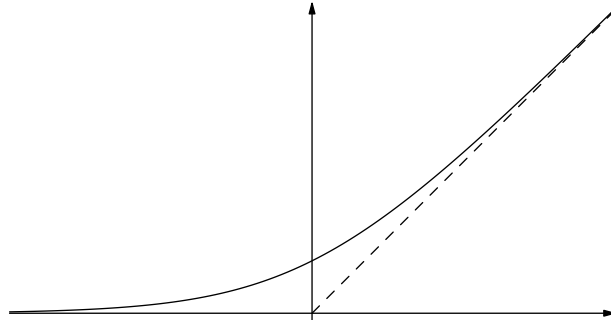
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = \frac{e^t}{1+e^t} = \frac{1}{1+e^{-t}}.$$

Il est clair que f' est positive mais aussi croissante. Donc f est croissante et convexe.

De plus, f tend vers 0 au voisinage de $-\infty$ par composition de limites (asymptote horizontale) et

$$f(t) = \ln[e^t(1+e^{-t})] = t + \ln(1+e^{-t}) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} t + o(1),$$

donc le graphe de f admet $y = t$ pour asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.



10. On applique (évidemment!) le résultat établi en [8.] :

$$\det A = \det Q \cdot \det(Q^T) = (\det Q)^2,$$

$$\det B = \det Q \cdot \det D \cdot \det(Q^T) = (\det Q)^2 \cdot \det D,$$

$$\det(A+B) = \det[Q \cdot (I_n + D) \cdot Q^T] = (\det Q)^2 \cdot \det(I_n + D).$$

Comme la matrice Q est inversible, le facteur $(\det Q)^2$ est strictement positif et il s'agit en fait d'établir l'inégalité

$$[\det(I_n + D)]^{1/n} \geq (\det I_n)^{1/n} + (\det D)^{1/n}. \quad (*)$$

Comme la matrice symétrique B est ici définie positive, on sait [8.] que les coefficients diagonaux de D sont strictement positifs : on notera donc

$$D = \text{Diag}(d_1, \dots, d_n) \quad \text{et} \quad \forall 1 \leq k \leq n, \quad \delta_k = \ln d_k.$$

L'inégalité (*) devient alors

$$\left[\prod_{k=1}^n (1 + d_k) \right]^{1/n} \geq 1 + \left(\prod_{k=1}^n d_k \right)^{1/n}$$

c'est-à-dire, en composant par $\ln$ (fonction croissante!),

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_k\right) = \ln\left[1 + \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_k\right)\right] \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(1 + e^{\delta_k}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\delta_k).$$

On reconnaît alors l'application de l'inégalité de Jensen [4.] à la fonction convexe f [9.], aux abscisses $\delta_1, \dots, \delta_n$ et aux coefficients $\lambda_k = 1/n$ pour $1 \leq k \leq n$.

11. Soit $s \in [0, 1]$. On reprend les calculs du [10.] :

$$\begin{aligned} \det((1-s)A + sB) &= (\det Q)^2 \det((1-s)I_n + sD) \\ (\det A)^{1-s} (\det B)^s &= [(\det Q)^2]^{1-s} [(\det Q)^2]^s (\det D)^s = (\det Q)^2 (\det D)^s \end{aligned}$$

Comme Q est inversible, on peut diviser par $(\det Q)^2 > 0$: il s'agit donc de démontrer que

$$\det((1-s)I_n + sD) \geq (\det D)^s$$

c'est-à-dire, avec les notations introduites en [10.],

$$\prod_{k=1}^n ((1-s)1 + sd_k) \geq \prod_{k=1}^n 1^{1-s} d_k^s.$$

• Comme B est supposée définie positive, les coefficients d_k sont strictement positifs [8.]. On peut donc invoquer la convexité de $-\ln$ sur $I = \mathbb{R}_+^+$:

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad -\ln((1-s)1 + sd_k) \leq (1-s)(-\ln 1) + s(-\ln d_k) = -s \ln d_k.$$

Par croissance de la fonction $\exp$, on en déduit que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad 0 < d_k^s \leq ((1-s) + sd_k)$$

et donc que

$$\prod_{k=1}^n d_k^s \leq \prod_{k=1}^n ((1-s) + sd_k)$$

(puisqu'on multiplie des inégalités entre réels *positifs*).

On a ainsi démontré que

$$\forall s \in [0, 1], \quad \det((1-s)A + sB) \geq (\det A)^{1-s} (\det B)^s$$

en supposant que A et B étaient définies positives.

• Supposons maintenant que A et B soient symétriques et positives (sans être nécessairement définies positives). Pour tout réel $h > 0$, les matrices $A_h = A + hI_n$ et $B_h = B + hI_n$ sont évidemment symétriques réelles et

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^\top \cdot A_h \cdot X = \underbrace{X^\top \cdot A \cdot X}_{\geq 0} + hX^\top \cdot X \geq h\|X\|^2 > 0$$

donc A_h est définie positive. De même, B_h est définie positive.

On peut donc déduire de ce qui précède que

$$\forall s \in [0, 1], \forall h > 0, \quad \det((1-s)A_h + sB_h) \geq (\det A_h)^{1-s} (\det B_h)^s. \quad (*)$$

Les fonctions

$$[h \mapsto \det A_h = \det(A + hI_n)], \quad [h \mapsto \det B_h] \quad \text{et} \quad [h \mapsto \det((1-s)A_h + sB_h) = \det(hI_n + (1-s)A + sB)]$$

sont continues sur $\mathbb{R}$ (polynomiales!) et à valeurs positives (par convexité de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ [2.] et par [1.]) et les fonctions $[x \mapsto x^s]$ et $[x \mapsto x^{1-s}]$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$. On peut donc faire tendre h vers 0 dans (*) et en déduire que

$$\forall s \in [0, 1], \quad \det((1-s)A + sB) \geq (\det A)^{1-s} (\det B)^s.$$

12. Lorsque A et B sont définies positives, les trois déterminants sont strictement positifs [1.]. Par croissance de $\ln$, on peut déduire de l'inégalité [11.] que

$$\forall s \in [0, 1], \quad \ln \det((1-s)A + sB) \geq (1-s) \ln \det A + s \ln \det B,$$

ce qui signifie que la fonction $[A \mapsto \ln(\det A)]$ est concave sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Partie D.

13. Comme $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe des réels *strictement* positifs $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et une matrice inversible P tels que

$$A = P \cdot \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot P^{-1}.$$

|| *Le Théorème spectral nous assure qu'on peut choisir une matrice de passage orthogonale. Ici, c'est sans intérêt.*

On en déduit que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$I_n + tA = P \cdot \text{Diag}(1 + t\alpha_1, \dots, 1 + t\alpha_n) \cdot P^{-1}.$$

Deux matrices semblables ayant même déterminant, on en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \prod_{k=1}^n (1 + t\alpha_k).$$

En particulier, g est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

|| *Le déterminant est une fonction polynomiale des coefficients et comme les coefficients de $I_n + tA$ sont tous polynomiaux en t , la fonction g est polynomiale, même lorsque la matrice A n'est pas diagonalisable. Cf [15.]*

14. Comme les valeurs propres α_k sont strictement positives, les expressions $1 + t\alpha_k$ sont strictement positives pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Par conséquent,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \ln g(t) = \sum_{k=1}^n \ln(1 + t\alpha_k).$$

Par concavité de $\ln$,

$$\forall 1 \leq k \leq n, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \ln(1 + t\alpha_k) \leq t\alpha_k$$

et, en sommant ces inégalités,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \ln \det(I_n + tA) \leq t \sum_{k=1}^n \alpha_k = (\text{tr } A)t$$

puisque la trace d'une matrice diagonalisable est la somme de ses valeurs propres.

|| *La trace d'une matrice est égale à la somme des valeurs propres pour toute matrice admettant un polynôme annulateur scindé, c'est-à-dire pour toute matrice trigonalisable (quel que soit le corps de base $\mathbb{K}$) et donc en particulier pour toute matrice diagonalisable.*

|| *Ce résultat n'est en revanche pas vrai pour toutes les matrices réelles !*

Partie E.

15. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f_A(t) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n (a_{k, \sigma(k)} + t m_{k, \sigma(k)}).$$

La fonction f_A est polynomiale en t et donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

|| *On aurait pu raisonner comme en [13.] et appliquer le Théorème de réduction simultanée [8.] : comme $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice inversible Q et des réels $\mu_1, \dots, \mu_n$ tels que*

$$A = Q^\top \cdot Q \quad \text{et} \quad M = Q^\top \cdot \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \cdot Q.$$

|| *Par conséquent, pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$f_A(t) = (\det Q)^2 \prod_{k=1}^n (1 + t\mu_k),$$

|| *ce qui prouve également que f_A est polynomiale.*

16. Comme $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel, la matrice $A + tM$ est symétrique pour tout $t \in \mathbb{R}$.

• D'après [8.], il existe une matrice inversible Q et des réels $\mu_1, \dots, \mu_n$ tels que

$$A + tM = Q \cdot \text{Diag}(1 + t\mu_1, \dots, 1 + t\mu_n) \cdot Q^\top.$$

Par conséquent, pour toute colonne $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X^\top \cdot (A + tM) \cdot X = (QX)^\top \cdot \text{Diag}(1 + t\mu_1, \dots, 1 + t\mu_n) \cdot (QX) = \sum_{k=1}^n (1 + t\mu_k) y_k^2$$

en notant $y_1, \dots, y_n$ les coefficients de la colonne $Y = QX$.

Si $X \neq 0$, alors $Y \neq 0$ (puisque Q est inversible) et par conséquent l'un des y_k^2 au moins est strictement positif.

L'ensemble $\{|\mu_k|, 1 \leq k \leq n\}$ est fini, donc il existe un réel r tel que $|\mu_k| < r$ pour tout $1 \leq k \leq n$. En prenant $\varepsilon_0 = 1/r > 0$, on a donc

$$\forall t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[, \quad 1 + t\mu_k \geq 1 - \varepsilon_0|\mu_k| > 1 - \varepsilon_0 r = 0.$$

Par conséquent, la somme

$$\sum_{k=1}^n (1 + t\mu_k) y_k^2$$

est strictement positive : tous les termes sont positifs et l'un d'eux (au moins) est strictement positif.

On a ainsi démontré que $A + tM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ pour tout $t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$.

Variante un peu savante

Le spectre de M est une partie finie de $\mathbb{R}$, donc le **rayon spectral** de M est bien défini :

$$\rho(M) = \max\{|\lambda|, : \lambda \in \text{Sp}(M)\}.$$

On déduit des calculs menés au [1.] que

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad |X^\top \cdot M \cdot X| \leq \sum_{\lambda \in \text{Sp}(M)} |\lambda| \|X_\lambda\|^2 \leq \rho(M) \sum_{\lambda \in \text{Sp}(M)} \|X_\lambda\|^2 = \rho(M) \|X\|^2.$$

De manière analogue, le spectre de A est une partie finie de $\mathbb{R}_+^*$, donc son plus petit élément est strictement positif :

$$\alpha = \min \text{Sp}(A) > 0.$$

Les calculs du [1.] donnent cette fois

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top \cdot A \cdot X = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda \|X_\lambda\|^2 \geq \alpha \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \|X_\lambda\|^2 = \alpha \|X\|^2.$$

Par conséquent, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top \cdot (A + tM) \cdot X \geq (\alpha - |t|\rho(M)) \|X\|^2.$$

En choisissant $\varepsilon_0 = \alpha/\rho(M) > 0$, on obtient alors

$$\forall t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[, \quad \forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^\top \cdot (A + tM) \cdot X > (\alpha - \varepsilon_0 \rho(M)) \|X\|^2 = 0.$$

Il est important de se rendre compte que ce qui précède est possible car $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert relatif à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

17. Comme $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et que $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on peut appliquer le théorème de réduction simultanée établi en [8.] :

$$A^{-1}M = (Q \cdot Q^\top)^{-1} \cdot (Q \cdot D \cdot Q^\top) = (Q^\top)^{-1} \cdot (Q^{-1}Q) \cdot D \cdot Q^\top = (Q^\top)^{-1} \cdot D \cdot Q^\top.$$

On vient d'écrire que $A^{-1}M$ était semblable à la matrice diagonale D , donc $A^{-1}M$ est bien diagonalisable.

18. Comme A est inversible (en tant que matrice symétrique définie positive),

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_A(t) = \det A \cdot \det(I_n + tA^{-1}M).$$

On reprend les notations de [10.] : $D = \text{Diag}(d_1, \dots, d_n)$ et comme $A^{-1}M$ est semblable à D , alors $I_n + tA^{-1}M$ est semblable à

$$\text{Diag}(1 + td_1, \dots, 1 + td_n),$$

ce qui nous donne

$$f_A(t) = \det A \cdot \left(\prod_{k=1}^n (1 + td_k) \right).$$

On en déduit (formule de Leibniz) que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'_A(t) = \det A \cdot \sum_{k=1}^n \left(d_k \cdot \prod_{\substack{1 \leq \ell \leq n \\ \ell \neq k}} (1 + td_\ell) \right)$$

et en particulier que

$$f'_A(0) = \det A \cdot \sum_{k=1}^n d_k = \det A \cdot \operatorname{tr}(A^{-1}M).$$

Comme f_A est de classe $\mathcal{C}^\infty$ [15.], on peut appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 :

$$f_A(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} f_A(0) + t f'_A(0) + o(t) = \det A + \det A \cdot \operatorname{tr}(A^{-1}M) \cdot t + o(t).$$

19. On a déjà calculé $f'_A(t)$ à la question précédente.

♣ On peut aussi remarquer [16.] que $A + t_0 M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ pour tout $t_0 \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ assez petit pour que $t_0 + t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$,

$$f_A(t_0 + t) = \det((A + t_0 M) + tM) = f_{A+t_0 M}(t)$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \forall t_0 \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[, \quad f'_A(t_0) &= f'_{A+t_0 M}(0) = \det(A + t_0 M) \cdot \operatorname{tr}((A + t_0 M)^{-1}M) \\ &= f_A(t_0) \cdot \operatorname{tr}((A + t_0 M)^{-1}M). \end{aligned}$$

20. Pour tout $t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$, la matrice $A + tM$ est symétrique définie positive, donc inversible. Par conséquent, la fonction f_A ne s'annule pas sur $]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$.

D'après les formules de Cramer,

$$\forall t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[, \quad \Phi(t) = \frac{1}{f_A(t)} \cdot \operatorname{Com}(A + tM)^\top.$$

Les coefficients de la comatrice $\operatorname{Com}(A + tM)$ sont des expressions polynomiales en t , donc la fonction

$$t \mapsto \operatorname{Com}(A + tM)^\top$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Comme f_A est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ [15.] et ne s'annule pas sur $]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$, on en déduit que Φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$.

♣ Comme Φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$ et que

$$\forall t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[, \quad \Phi(t) \cdot (A + tM) = I_n,$$

on déduit de la formule de Leibniz que

$$\forall t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[, \quad \Phi'(t) \cdot (A + tM) + \Phi(t) \cdot M = 0_n$$

et donc que

$$\forall t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[, \quad \Phi'(t) = \Phi(t) \cdot M \cdot (A + tM)^{-1} = (A + tM)^{-1} \cdot M \cdot (A + tM)^{-1}$$

puisque $A + tM$ est inversible [16.].

On déduit alors de la formule de Taylor-Young que

$$\Phi(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} A^{-1} + t A^{-1} M A^{-1} + o(t)$$

puisque $\Phi(0) = A^{-1}$ et $\Phi'(0) = A^{-1} M A^{-1}$.

21. D'après [16.], la fonction f_A est strictement positive sur $]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$. Par ailleurs, la fonction

$$[x \mapsto \alpha^{-1} \cdot x^{-\alpha} = \alpha^{-1} \cdot e^{-\alpha \ln x}]$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$. Par composition, la fonction φ_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$ et

$$\begin{aligned} \forall t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[, \quad \varphi'_\alpha(t) &= \frac{-\alpha}{\alpha} \cdot [f_A(t)]^{-\alpha-1} \cdot f'_A(t) \\ &= \frac{-\operatorname{tr}[(A + tM)^{-1}M]}{[f_A(t)]^\alpha} \end{aligned}$$

d'après [19.]

22. On a déjà démontré que φ_α était de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$ et que

$$\forall t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[, \quad \varphi'_\alpha(t) = -[f_A(t)]^{-\alpha} \cdot \operatorname{tr}(\Phi(t)M). \quad (\star)$$

On a calculé $f'_A(0)$ en [18.] et $\Phi'(0)$ en [20.]. L'application $[N \mapsto \text{tr}(NM)]$ étant linéaire (et donc de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on déduit de la formule de Leibniz (dérivation d'un produit de fonctions dérivables) et de la règle de la chaîne (différentiation d'une composée de fonctions différentiables) que

$$\forall t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[, \quad \varphi'_\alpha(t) = \alpha f'_A(t) [f_A(t)]^{-\alpha-1} \cdot \text{tr}[\Phi(t)M] - [f_A(t)]^{-\alpha} \cdot \text{tr}[\Phi'(t)M]$$

et en particulier que

$$\begin{aligned} \varphi'_\alpha(0) &= \alpha \cdot \frac{\det A \cdot \text{tr}(A^{-1}M)}{[f_A(0)]^{\alpha+1}} \cdot \text{tr}[A^{-1}M] + \frac{1}{[f_A(0)]^\alpha} \cdot \text{tr}[(A^{-1}MA^{-1})M] \\ &= \frac{\alpha[\text{tr}(A^{-1}M)]^2 + \text{tr}[(A^{-1}M)^2]}{(\det A)^\alpha}. \end{aligned}$$

À propos de la règle de la chaîne, on rappelle que : si $\varphi : I \rightarrow E$ est une application dérivable et si $\psi : E \rightarrow F$ est linéaire, alors $\psi \circ \varphi : I \rightarrow F$ est dérivable et que

$$\forall t \in I, \quad (\psi \circ \varphi)'(t) = \psi(\varphi'(t)).$$

On peut aussi voir cette règle de calcul comme une généralisation de la linéarité de la dérivation.

Variante moins savante

On pouvait se contenter de répondre à la question posée sans faire de zèle en justifiant l'existence d'un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de $t = 0$ pour la fonction φ'_α . D'après l'expression (*) et les développements limités calculés en [18.] et [20.],

$$\begin{aligned} \varphi'_\alpha(t) &\underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{-\text{tr}[(A^{-1} - tA^{-1}MA^{-1} + o(t))M]}{[\det A + t \det A \text{tr}(A^{-1}M) + o(t)]^\alpha} \\ &= \frac{-\text{tr}(A^{-1}M) + t \text{tr}(A^{-1}MA^{-1}M) + o(t)}{(\det A)^\alpha [1 + t \text{tr}(A^{-1}M) + o(t)]^\alpha} && \text{(linéarité et continuité de tr)} \\ &= \frac{1}{(\det A)^\alpha} \cdot [-\text{tr}(A^{-1}M) + t \text{tr}(A^{-1}MA^{-1}M) + o(t)] [1 - \alpha t \text{tr}(A^{-1}M) + o(t)] \\ &= \frac{-\text{tr}(A^{-1}M)}{(\det A)^\alpha} + t \cdot \frac{\alpha[\text{tr}(A^{-1}M)]^2 + \text{tr}[(A^{-1}M)^2]}{(\det A)^2} + o(t). \end{aligned}$$

23. Comme A est définie positive, ses valeurs propres sont strictement positives [1.], donc le dénominateur $(\det A)^\alpha$ est strictement positif.

• D'après [17.], la matrice $A^{-1}M$ est diagonalisable, donc semblable à une matrice $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et son carré $(A^{-1}M)^2$ est alors semblable à $\text{Diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$. On déduit alors de l'inégalité de Schwarz que

$$\text{tr}[(A^{-1}M)^2] = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot 1 \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n 1^2 \right) = n \text{tr}[(A^{-1}M)^2].$$

Comme $\alpha > -1/n$ et que $[\text{tr}(A^{-1}M)]^2 \geq 0$, on en déduit que

$$\alpha[\text{tr}(A^{-1}M)]^2 + \text{tr}[(A^{-1}M)^2] \geq \frac{-1}{n} \cdot [\text{tr}(A^{-1}M)]^2 + \frac{1}{n}[\text{tr}(A^{-1}M)]^2 = 0$$

et donc [22.] que $\varphi''_\alpha(0) \geq 0$.

L'inégalité de Schwarz (appliquée ici pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$) est un cas particulier de l'inégalité de convexité [4.] avec $f = [x \mapsto x^2]$.

24. On a démontré que φ_α était de classe $\mathcal{C}^2$ [21.]. En particulier, la fonction φ''_α est continue et si $\varphi''_\alpha(0) > 0$, alors il existe un réel $\eta > 0$ tel que $\varphi''_\alpha(t) > 0$ pour tout $t \in]-\eta, \eta[$.

Par conséquent, la fonction φ_α est convexe sur l'intervalle $]-\eta, \eta[$ et en particulier

$$\forall t \in]-\eta, \eta[, \quad \varphi_\alpha(t) \geq \varphi_\alpha(0) + t\varphi'_\alpha(0)$$

c'est-à-dire [21.]

$$\forall t \in]-\eta, \eta[, \quad \frac{1}{\alpha[\det(A + tM)]^\alpha} \geq \frac{1}{\alpha(\det A)^\alpha} + t \cdot \frac{-\text{tr}(A^{-1}M)}{(\det A)^\alpha}$$

c'est-à-dire, en multipliant par $(\det A)^\alpha > 0$,

$$\forall t \in]-\eta, \eta[, \quad \frac{(\det A)^\alpha}{\alpha[\det(A + tM)]^\alpha} \geq \frac{1}{\alpha} - t \text{tr}(A^{-1}M).$$

L'inégalité de l'énoncé était donc fausse pour $-1/n < \alpha < 0$.