

Composition de Mathématiques

Le 11 février 2026 – De 13 heures à 17 heures

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel *non nul*.

• On notera $S^1(E)$, la sphère unité d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$:

$$\forall x \in E, \quad x \in S^1(E) \iff \|x\| = 1.$$

Pour tout $r > 0$, on note $B(0, r)$, la boule ouverte de centre 0 et de rayon r pour la norme $\|\cdot\|$.

• On considère une application $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi(0) = 0$ et, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on étudie le problème de Cauchy suivant.

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}_+, & x'(t) = \varphi(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (C)$$

• Dans le cas particulier $x_0 = 0$, la fonction nulle $[t \mapsto 0]$ est la solution de ce problème de Cauchy : on dit que le point $0 \in \mathbb{R}^n$ est un **point d'équilibre**.

L'objectif de ce problème est d'établir une condition suffisante sur l'application linéaire tangente $d\varphi(0)$ de l'application φ au point d'équilibre pour assurer la **stabilité** de l'équilibre. À cet effet, on démontre le théorème suivant.

Théorème de Liapounov

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi(0) = 0$ et que toutes les valeurs propres complexes de $d\varphi(0)$ aient une partie réelle strictement négative.

Alors il existe trois constantes strictement positives α_0 , C et β telles que

$$\forall x_0 \in B(0, \alpha_0), \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \|f_{x_0}(t)\| \leq C e^{-\beta t} \|x_0\|$$

où f_{x_0} désigne l'unique solution du problème de Cauchy (C).

Dans une première partie, on étudie une norme sur les endomorphismes des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. Dans la seconde partie, on établit des résultats sur un système différentiel linéaire rattaché au problème de Cauchy (C). Enfin, la troisième partie est consacrée à la démonstration du théorème de Liapounov. Cette dernière partie est très largement indépendante des deux premières, à l'exception du résultat obtenu à la fin de la seconde partie.

Partie A. Une norme sur $L(E)$

Soient $\|\cdot\|$, une norme sur $\mathbb{K}^n$ et E , un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ distinct de $\{0\}$.

1. Soit u , un endomorphisme de E . Démontrer que

$$\sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in S^1(E)} \|u(x)\|.$$

☞ On prendra soin de justifier l'existence de ces bornes supérieures.

2. Pour tout endomorphisme u de E , on pose

$$\|u\| = \sup_{x \in S^1(E)} \|u(x)\|.$$

Démontrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $L(E)$.

☞ Cette norme est dite **subordonnée à la norme $\|\cdot\|$ sur le sous-espace E** .

3. Démontrer que cette norme est sous-multiplicative, au sens où

$$\forall u, v \in L(E), \quad \|u \circ v\| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

(La notation uv est un raccourci pour désigner la composée $u \circ v$.)

En déduire une majoration de $\|u^k\|$ en fonction de $\|u\|$ et de $k \in \mathbb{N}$.

Partie B. Stabilité d'un système différentiel linéaire

Dans cette partie, on étudie un endomorphisme α de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$.

4. Démontrer qu'il existe un entier naturel non nul r , des nombres complexes distincts $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ et des entiers naturels non nuls $m_1, \dots, m_r$ tels que

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^r \text{Ker}(\alpha - \lambda_k I_{\mathbb{C}^n})^{m_k} \quad \text{avec} \quad \forall 1 \leq k \leq r, \quad \dim \text{Ker}(\alpha - \lambda_k I_{\mathbb{C}^n})^{m_k} > 0.$$

Dans la suite de cette partie, on notera

$$E_k = \text{Ker}(\alpha - \lambda_k I_{\mathbb{C}^n})^{m_k}$$

pour tout entier $1 \leq k \leq r$.

D'après la question précédente, pour tout vecteur $x \in \mathbb{C}^n$, il existe un, et un seul, r -uplet $(x_1, \dots, x_r) \in E_1 \times \dots \times E_r$ tel que

$$x = \sum_{k=1}^r x_k.$$

Pour tout entier $1 \leq k \leq r$, on définit les applications linéaires

$$\begin{aligned} p_k : \mathbb{C}^n &\longrightarrow E_k & \text{et} & & q_k : E_k &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ x &\longmapsto x_k & & & x_k &\longmapsto x_k \end{aligned}$$

et on notera

$$a_k = p_k \circ \alpha \circ q_k \in L(E_k).$$

Une norme $\|\cdot\|$ étant donnée sur $\mathbb{C}^n$, on notera $|||\cdot|||_c$, la norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{C}^n$:

$$\forall u \in L(\mathbb{C}^n), \quad |||u|||_c = \sup_{x \in S^1(\mathbb{C}^n)} \|u(x)\|$$

et, pour tout entier $1 \leq k \leq r$, on notera $|||\cdot|||_k$, la norme subordonnée à $\|\cdot\|$ sur le sous-espace vectoriel E_k :

$$\forall 1 \leq k \leq r, \forall u_k \in L(E_k), \quad |||u_k|||_k = \sup_{x \in S^1(E_k)} \|u_k(x)\|.$$

5. Démontrer que, pour tout entier $1 \leq k \leq r$, il existe une constante $C_k > 0$ telle que

$$\forall u \in L(E_k), \quad |||q_k \circ u \circ p_k|||_c \leq C_k |||u|||_k.$$

6. Démontrer que, pour tout entier $1 \leq k \leq r$, le sous-espace E_k est stable par α .
7. Pour $1 \leq k, \ell \leq r$, identifier l'application linéaire $p_k \circ q_\ell$ puis reconnaître l'endomorphisme

$$\sum_{k=1}^r q_k \circ p_k.$$

8. Démontrer que

$$\alpha = \sum_{k=1}^r q_k \circ a_k \circ p_k.$$

9. En déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(t\alpha) = \sum_{k=1}^r q_k \circ \exp(ta_k) \circ p_k.$$

10. Démontrer par ailleurs que

$$\forall 1 \leq k \leq r, \forall t \in \mathbb{R}, \quad |||\exp(ta_k)|||_k \leq |e^{t\lambda_k}| \sum_{\ell=0}^{m_k-1} \frac{|t|^\ell}{\ell!} |||a_k - \lambda_k I_{E_k}|||_k^\ell.$$

11. En déduire l'existence d'un polynôme P à coefficients réels tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |||\exp(t\alpha)|||_c \leq P(|t|) \sum_{k=1}^r e^{t \Re(\lambda_k)}.$$

Dans la fin de cette partie, les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ sont identifiés aux colonnes de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et on considère un endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$, représenté par la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Les coefficients de la matrice A étant réels, on peut aussi considérer A comme une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On notera α , l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à la matrice A .

On considérera dorénavant la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire usuel $\langle \cdot | \cdot \rangle$ sur $\mathbb{R}^n$ défini par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x | y \rangle = x^\top \cdot y.$$

On peut définir une norme sur $\mathbb{C}^n$, également notée $\|\cdot\|$, en posant

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \quad \|x\|^2 = \bar{x}^\top \cdot x.$$

On distinguera alors la norme subordonnée sur $L(\mathbb{R}^n)$ définie par

$$\forall v \in L(\mathbb{R}^n), \quad \|v\|_r = \sup_{x \in S^1(\mathbb{R}^n)} \|v(x)\|$$

et la norme subordonnée sur $L(\mathbb{C}^n)$ définie par

$$\forall v \in L(\mathbb{C}^n), \quad \|v\|_c = \sup_{x \in S^1(\mathbb{C}^n)} \|v(x)\|.$$

12. Pourquoi est-il possible d'utiliser la même notation pour la norme sur $\mathbb{R}^n$ et la norme sur $\mathbb{C}^n$?
Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|\exp(tu)\|_r \leq C \|\exp(t\alpha)\|_c.$$

On note $\text{Sp}(A)$, le spectre complexe de l'endomorphisme $u \in L(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire le spectre de l'endomorphisme $\alpha \in L(\mathbb{C}^n)$.

13. Démontrer que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une, et une seule, fonction $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ telle que

$$y(0) = x_0 \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad y'(t) = u(y(t)).$$

Cette fonction sera dorénavant notée g_{x_0} .

Démontrer que

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|g_{x_0}(t)\| = 0 \iff \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_-^* + i\mathbb{R}.$$

14. On suppose dans cette question que la partie réelle de chaque valeur propre de A est strictement négative. Démontrer qu'il existe deux constantes strictement positives C_2 et α telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \|\exp(tu)\|_r \leq C_2 e^{-\alpha t}.$$

En déduire une majoration de $\|g_{x_0}(t)\|$ pour $t \in \mathbb{R}_+$.

Partie C. Le théorème de Liapounov

On considère dans cette partie une application $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi(0) = 0$ et on note $u = d\varphi(0) \in L(\mathbb{R}^n)$. On suppose que le spectre complexe de u est contenu dans $\mathbb{R}_-^* + i\mathbb{R}$.

On **admet** que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy (C) admet une, et une seule, solution définie sur $\mathbb{R}_+$, solution qui sera notée f_{x_0} .

15. Démontrer que l'application

$$\begin{aligned} b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \int_0^{+\infty} \langle \exp(tu)(x) | \exp(tu)(y) \rangle dt \end{aligned}$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

On notera q , la forme quadratique associée à ce produit scalaire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad q(x) = b(x, x).$$

16. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad dq(x)(u(x)) = 2b(x, u(x)) = -\|x\|^2.$$

Pour toute fonction $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, on définit la fonction $\varepsilon(y) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ en posant

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \varepsilon(y)(t) = \varphi(y(t)) - u(y(t)).$$

17. Vérifier que

$$(q \circ f_{x_0})'(t) = -\|f_{x_0}(t)\|^2 + 2b(f_{x_0}(t), \varepsilon(f_{x_0}(t))).$$

18. Démontrer qu'il existe deux réels strictement positifs α et β tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, si $q(f_{x_0}(t)) \leq \alpha$, alors

$$-\|f_{x_0}(t)\|^2 + 2b(f_{x_0}(t), \varepsilon(f_{x_0}(t))) \leq -\beta q(f_{x_0}(t)).$$

|| On fixe un tel couple (α, β) pour la fin du problème.

19. Démontrer que : si $q(x_0) < \alpha$, alors

$$\forall t \geq 0, \quad q(f_{x_0}(t)) \leq e^{-\beta t} q(x_0).$$

20. En déduire trois constantes strictement positives α_0 , C et β telles que

$$\forall x_0 \in B(0, \alpha_0), \forall t \geq 0, \quad \|f_{x_0}(t)\| \leq C e^{-\beta t/2} \|x_0\|.$$



Solution * Théorème de stabilité de Liapounov

Partie A. Une norme sur $L(E)$

1. Question de cours!

Comme E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ de dimension finie et que u est un endomorphisme de E , il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leq K\|x\|.$$

Il y a plusieurs façons de traduire la continuité d'une application linéaire, autant choisir celle qui est la mieux adaptée pour justifier l'existence des deux bornes supérieures. Une question de cours a pour but de faire démontrer un point particulier du cours et non de refaire la totalité du cours.

Considérons les deux ensembles

$$C_1 = \left\{ \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}, x \in E \setminus \{0\} \right\} \quad \text{et} \quad C_2 = \{ \|u(y)\|, y \in S^1(E) \}.$$

Comme $n \geq 1$, il existe au moins un vecteur unitaire dans E et comme un vecteur unitaire n'est pas nul, on en déduit que C_1 et C_2 sont deux parties non vides de $\mathbb{R}_+$.

D'après la remarque initiale,

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leq K \quad \text{et} \quad \forall y \in S^1(E), \quad \|u(y)\| \leq K \times 1$$

donc C_1 et C_2 sont toutes les deux majorées par K . D'après l'Axiome de la borne supérieure, les deux parties C_1 et C_2 admettent une borne supérieure réelle.

Si $q \in C_1$, alors il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que

$$\begin{aligned} q &= \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \left\| \frac{u(x)}{\|x\|} \right\| && \text{(homogénéité de la norme } \|\cdot\|) \\ &= \left\| u\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| && \text{(linéarité de } u) \\ &\in C_2 \end{aligned}$$

puisque $y = x/\|x\|$ est un vecteur unitaire.

Réciproquement, si $x \in C_2$, alors il existe un vecteur unitaire $x \in E$ tel que

$$x = \|u(x)\| = \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \in C_1.$$

On a ainsi démontré par double inclusion que $C_1 = C_2$. Par conséquent, les bornes supérieures de ces deux ensembles sont égales.

On peut bien entendu démontrer l'égalité des deux bornes supérieures par double inégalité. Mais en la circonstance, le mieux est de justifier (par double inclusion) l'égalité des deux ensembles — de la même manière qu'on démontre que $P(A) = P(B)$ en vérifiant que les deux événements A et B sont égaux.

2. Question de cours!

D'après [1.], $\|u\|$ est bien définie pour tout $u \in L(E)$ et c'est un réel positif. Donc $\|\cdot\|$ est une application de $L(E)$ dans $\mathbb{R}_+$.

De plus, l'égalité des bornes supérieures établies en [1.] prouve que

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leq \|u\|$$

(la borne supérieure est un majorant) et donc que

$$\forall u \in L(E), \forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leq \|u\| \|x\|. \quad (\star)$$

puisque cette dernière inégalité est évidente pour $x = 0_E$.

• **Homogénéité** — Par homogénéité de $\|\cdot\|$,

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in L(E), \forall x \in S^1(E), \quad \|(\lambda u)(x)\| = |\lambda| \|u(x)\|$$

et comme $|\lambda| \geq 0$, on en déduit que

$$\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|.$$

|| Une démonstration complète de l'homogénéité est nécessairement un peu longue et délicate — en tout cas, pas rentable !

♣ **Séparation** — Si $|||u||| = 0$, alors $(\star)$

$$\forall x \in S^1(E), \quad 0 \leq ||u(x)|| \leq |||u||| \|x\| = 0$$

donc $u(x) = 0_E$ et u est bien le vecteur nul de $L(E)$.

♣ **Inégalité triangulaire** — Quels que soient u et v dans $L(E)$,

$$\begin{aligned} \forall x \in S^1(E), \quad ||(u+v)(x)|| &\leq ||u(x)|| + ||v(x)|| && \text{(inégalité triangulaire pour } \|\cdot\|) \\ &\leq |||u||| + |||v||| && \text{(majoration par une borne supérieure)} \end{aligned}$$

et comme le majorant trouvé est indépendant de $x \in S^1(E)$, on peut passer à la borne supérieure pour obtenir l'inégalité triangulaire :

$$\forall u, v \in L(E), \quad |||u+v||| \leq |||u||| + |||v|||.$$

♣ On a ainsi démontré que $|||\cdot|||$ était bien une norme sur l'espace $L(E)$.

3. Question de cours !

Soient u et v , deux endomorphismes de E . D'après la propriété $(\star)$ établie en [2.],

$$\forall x \in S^1(E), \quad ||(u \circ v)(x)|| \leq |||u||| ||v(x)|| \leq |||u||| |||v|||.$$

Le majorant trouvé est indépendant du paramètre $x \in S^1(E)$, on peut donc passer à la borne supérieure, ce qui nous donne :

$$\forall u, v \in L(E), \quad |||u \circ v||| \leq |||u||| |||v|||.$$

♣ Pour $k = 0$, $|||u^0||| = |||I_E||| = 1 = |||u|||^0$ car

$$\forall x \in S^1(E), \quad ||I_E(x)|| = \|x\| = 1.$$

Pour $k = 1$, il est clair que $|||u^1||| = |||u|||$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $|||u^k||| \leq |||u|||^k$. Par sous-multiplicativité et par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} |||u^{k+1}||| &= |||u \circ u^k||| \leq |||u||| |||u^k||| && \text{(sous-multiplicativité)} \\ &\leq |||u||| |||u|||^k && \text{(hypothèse de récurrence, car } |||u||| \geq 0) \end{aligned}$$

donc $|||u^{k+1}||| \leq |||u|||^{k+1}$.

On a ainsi démontré par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |||u^k||| \leq |||u|||^k.$$

|| Bien penser à traiter le cas particulier $k = 0$!

Partie B. Stabilité d'un système différentiel linéaire

4. Considérons le polynôme caractéristique de a : c'est un polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, donc il est scindé (Théorème de d'Alembert-Gauss). Il existe donc des complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ deux à deux distincts et des entiers $m_1, \dots, m_r$ supérieurs à 1 tels que

$$\chi_a = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{m_k}.$$

D'après le Théorème de Cayley-Hamilton, ce polynôme est un polynôme annulateur de a et comme les λ_k sont deux à deux distincts, les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux. On déduit alors du Théorème de décomposition des noyaux que

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^r \text{Ker}(a - \lambda_k I_{\mathbb{C}^n})^{m_k}.$$

En outre, comme les λ_k sont les valeurs propres de a ,

$$\forall 1 \leq k \leq r, \quad 1 \leq \dim \text{Ker}(a - \lambda_k I_{\mathbb{C}^n}) \leq \dim \text{Ker}(a - \lambda_k I_{\mathbb{C}^n})^{m_k}.$$

5. Soit u est un endomorphisme de E_k . L'application $q_k \circ u \circ p_k$ est donc un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$.

$$\mathbb{C}^n \xrightarrow{p_k} E_k \xrightarrow{u} E_k \xrightarrow{q_k} \mathbb{C}^n$$

Pour tout $x \in S^1(\mathbb{C}^n)$,

$$\begin{aligned} \|(q_k \circ u \circ p_k)(x)\| &= \|q_k((u \circ p_k)(x))\| \\ &= \|(u \circ p_k)(x)\| && \text{car } y_k = (u \circ p_k)(x) \in E_k \text{ et donc } q_k(y_k) = y_k \\ &= \|u(p_k(x))\| \\ &\leq \|u\|_k \|p_k(x)\| && \text{d'après } (*). \end{aligned}$$

Comme p_k est une application linéaire définie sur un espace vectoriel de dimension finie, elle est continue et donc [1.] bornée sur la sphère unité : il existe donc $C_k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x \in S^1(\mathbb{C}^n), \quad \|p_k(x)\| \leq C_k$$

et par conséquent

$$\forall x \in S^1(\mathbb{C}^n), \quad \|(q_k \circ u \circ p_k)(x)\| \leq C_k \|u\|_k.$$

Le majorant étant indépendant du paramètre $x \in S^1(\mathbb{C}^n)$, on peut passer à la borne supérieure : par définition de $\|\cdot\|_c$,

$$\|q_k \circ u \circ p_k\|_c = \sup_{x \in S^1(\mathbb{C}^n)} \|(q_k \circ u \circ p_k)(x)\| \leq C_k \|u\|_k.$$

On ne peut pas invoquer ici la sous-multiplicativité de la norme subordonnée (puisque l'on ne compose pas des endomorphismes), même si cela revient au même.

On pourrait également démontrer que l'application N_k définie par

$$\forall u \in L(E_k), \quad N_k(u) = \|q_k \circ u \circ p_k\|_c$$

est une norme sur $L(E_k)$ et conclure en rappelant que sur $L(E_k)$, espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Il faudrait beaucoup plus de temps pour rédiger avec soin la séparation des points, les autres propriétés (définition, homogénéité, inégalité triangulaire) découlant directement du fait que $\|\cdot\|_c$ est une norme sur $L(\mathbb{C}^n)$. C'est néanmoins un exercice intéressant.

6. Par définition, le sous-espace E_k est le noyau d'un polynôme en a (et donc d'un endomorphisme qui commute avec a), donc E_k est stable par a .

7. Par construction, $p_k \circ q_\ell$ est une application linéaire de E_ℓ dans E_k :

$$E_\ell \xrightarrow{q_\ell} \mathbb{C}^n \xrightarrow{p_k} E_k$$

Tout vecteur $x \in E_\ell$ peut être considéré comme un vecteur de $\mathbb{C}^n$ et l'unique décomposition de x dans la décomposition en somme directe

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^r E_k \quad \text{est} \quad x = 0 + \cdots + 0 + \underbrace{x}_{\in E_\ell} + 0 + \cdots + 0,$$

si bien que

$$\forall x \in E_\ell, \quad (p_k \circ q_\ell)(x) = p_k(x) = p(0 + \cdots + 0 + x + 0 + \cdots + 0) = \begin{cases} x & \text{si } k = \ell, \\ 0 & \text{si } k \neq \ell. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\forall 1 \leq k \leq r, \quad (p_k \circ q_k) = I_{E_k}$$

et, si $k \neq \ell$, l'application $(p_k \circ q_\ell) \in L(E_\ell, E_k)$ est l'application nulle.

✱ Pour tout entier $1 \leq k \leq r$, la composée $q_k \circ p_k$ est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$:

$$\mathbb{C}^n \xrightarrow{p_k} E_k \xrightarrow{q_k} \mathbb{C}^n$$

donc l'application $\sum_{k=1}^r q_k \circ p_k$ est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$.

Par définition des applications p_k ,

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \quad x = \underbrace{p_1(x)}_{\in E_1} + \cdots + \underbrace{p_k(x)}_{\in E_k} + \cdots + \underbrace{p_r(x)}_{\in E_r} \quad (†)$$

et comme $p_k(x) \in E_k$, alors $q_k(p_k(x)) = p_k(x)$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \quad \sum_{k=1}^r (q_k \circ p_k)(x) = \sum_{k=1}^r p_k(x) = x$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^r q_k \circ p_k = I_{\mathbb{C}^n}.$$

8. Tout d'abord, $a \in L(\mathbb{C}^n)$ et comme a_k est l'endomorphisme de E_k induit par restriction de a à E_k , sous-espace vectoriel stable par a ,

$$\forall 1 \leq k \leq r, \quad \mathbb{C}^n \xrightarrow{p_k} E_k \xrightarrow{a_k} E_k \xrightarrow{q_k} \mathbb{C}^n$$

donc $\sum_{k=1}^r q_k \circ a_k \circ p_k$ est aussi un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{C}^n, \quad a(x) &= a\left(\sum_{k=1}^r p_k(x)\right) = \sum_{k=1}^r a(p_k(x)) && \text{par (†) et par linéarité de } a \\ &= \sum_{k=1}^r a_k(p_k(x)) && \text{car } p_k(x) \in E_k \text{ et } a_k \text{ induit par restriction de } a \text{ à } E_k \\ &= \sum_{k=1}^r q_k(a_k(p_k(x))) && \text{car } a_k(p_k(x)) \in E_k \\ &= \left(\sum_{k=1}^r (q_k \circ a_k \circ p_k)\right)(x). \end{aligned}$$

De la même manière,

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \quad a(x) = \sum_{k=1}^r (a_k \circ p_k)(x)$$

et bien que ces deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$ soient égaux pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, l'application a n'est pas égale à $\sum_{k=1}^r (a_k \circ p_k)$: l'application a est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ alors que la seconde expression n'est pas définie ! (Les différents termes ne sont pas définis sur le même espace vectoriel.)

Il faut avoir cette subtilité en tête pour justifier correctement l'égalité demandée, la difficulté n'est pas dans les calculs.

9. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, considérons l'égalité

$$a^m = \sum_{k=1}^r q_k \circ a_k^m \circ p_k. \quad (\text{HR}_m)$$

Cette égalité a déjà été prouvée pour $m = 0$ en [7.] puisque $a^0 = I_{\mathbb{C}^n}$ et $a_k = I_{E_k}$. Elle a également été prouvée pour $m = 1$ en [8.].

Supposons que HR_m soit vraie pour un entier $m \in \mathbb{N}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} a^{m+1} &= a^m \circ a = \left(\sum_{k=1}^r q_k \circ a_k^m \circ p_k\right) \circ \left(\sum_{\ell=1}^r q_\ell \circ a_\ell \circ p_\ell\right) && (\text{par } \text{HR}_m) \\ &= \sum_{k=1}^r \sum_{\ell=1}^r q_k \circ a_k^m \circ (p_k \circ q_\ell) \circ a_\ell \circ p_\ell \\ &= \sum_{k=1}^r q_k \circ a_k^m \circ a_k \circ p_k && (\text{par [7.]}) \\ &= \sum_{k=1}^r q_k \circ a_k^{m+1} \circ p_k \end{aligned}$$

donc HR_{m+1} est vraie aussi.

On déduit du principe de récurrence que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad a^m = \sum_{k=1}^r q_k \circ a_k^m \circ p_k.$$

|| Ne pas rédiger cette démonstration par récurrence revient à considérer que les deux questions précédentes sont sans intérêt.

♣ Par combinaison linéaire et par linéarité des applications q_k , pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathbb{N}, \quad \sum_{m=0}^M \frac{t^m}{m!} a^m &= \sum_{k=1}^r q_k \circ \left(\sum_{m=0}^M \frac{t^m}{m!} a_k^m \right) \circ p_k \\ &= \sum_{k=1}^r q_k \circ \exp(ta_k) \circ p_k + \sum_{k=1}^r q_k \circ \left(-\exp(ta_k) + \sum_{m=0}^M \frac{t^m}{m!} a_k^m \right) \circ p_k. \end{aligned}$$

Par définition de l'exponentielle, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \left\| \exp(ta) - \sum_{m=0}^M \frac{t^m}{m!} a^m \right\|_c = 0 \quad \text{et} \quad \forall 1 \leq k \leq r, \quad \lim_{M \rightarrow +\infty} \left\| \exp(ta_k) - \sum_{m=0}^M \frac{t^m}{m!} a_k^m \right\|_k = 0.$$

On déduit alors de [5.] (par encadrement) que

$$\forall 1 \leq k \leq r, \quad \lim_{M \rightarrow +\infty} \left\| q_k \circ \left(-\exp(ta_k) + \sum_{m=0}^M \frac{t^m}{m!} a_k^m \right) \circ p_k \right\|_c = 0$$

et par inégalité triangulaire

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{k=1}^r q_k \circ \left(-\exp(ta_k) + \sum_{m=0}^M \frac{t^m}{m!} a_k^m \right) \circ p_k \right\|_c = 0.$$

Par unicité de la limite, on peut conclure :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(ta) = \sum_{k=1}^r q_k \circ \exp(ta_k) \circ p_k.$$

|| Dans cette question aussi, manquer de précision sur les normes considérées, c'est prendre le sujet de haut.

10. Par définition du sous-espace $E_k = \text{Ker}(a - \lambda_k I_{\mathbb{C}^n})^{m_k}$, l'endomorphisme $(a_k - \lambda_k I_{E_k})$ est nilpotent (d'indice inférieur à m_k) et, bien évidemment,

$$a_k = \lambda_k I_{E_k} + (a_k - \lambda_k I_{E_k}).$$

Les deux endomorphismes I_{E_k} et $(a_k - \lambda_k I_{E_k})$ commutent, donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(ta_k) = \exp(t\lambda_k I_{E_k}) \circ \exp[t(a_k - \lambda_k I_{E_k})] = e^{t\lambda_k} \cdot \exp[t(a_k - \lambda_k I_{E_k})].$$

Comme l'indice de nilpotence de $(a_k - \lambda_k I_{E_k})$ est inférieur à m_k , on déduit de la définition de l'exponentielle que

$$\exp[t(a_k - \lambda_k I_{E_k})] = \sum_{\ell=0}^{m_k-1} \frac{t^\ell}{\ell!} \cdot (a_k - \lambda_k I_{E_k})^\ell.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \left\| \exp[t(a_k - \lambda_k I_{E_k})] \right\|_k &\leq \sum_{\ell=0}^{m_k-1} \left\| \frac{t^\ell}{\ell!} \cdot (a_k - \lambda_k I_{E_k})^\ell \right\|_k && \text{(inégalité triangulaire pour } \|\cdot\|_k) \\ &\leq \sum_{\ell=0}^{m_k-1} \frac{|t|^\ell}{\ell!} \left\| (a_k - \lambda_k I_{E_k})^\ell \right\|_k && \text{(homogénéité)} \\ &\leq \sum_{\ell=0}^{m_k-1} \frac{|t|^\ell}{\ell!} \|a_k - \lambda_k I_{E_k}\|_k^\ell. && \text{(sous-multiplicativité, cf [3.])} \end{aligned}$$

♣ Finalement, pour tout $1 \leq k \leq r$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left\| \exp(ta_k) \right\|_k \leq |e^{t\lambda_k}| \sum_{\ell=0}^{m_k-1} \frac{|t|^\ell}{\ell!} \|a_k - \lambda_k I_{E_k}\|_k^\ell$$

à nouveau par homogénéité de $\|\cdot\|_k$.

11. Soit $t \in \mathbb{R}$.

D'après [9.], l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_c$ et [5.],

$$\|\exp(ta)\|_c \leq \sum_{k=1}^r \|q_k \circ \exp(ta_k) \circ p_k\|_c \leq \sum_{k=1}^r C_k \|\exp(ta_k)\|_k$$

et d'après [10.],

$$\|\exp(ta)\|_c \leq \sum_{k=1}^r C_k e^{t \Re(\lambda_k)} \sum_{\ell=0}^{m_k-1} \frac{|t|^\ell}{\ell!} \|a_k - \lambda_k I_{E_k}\|_k^\ell.$$

On rappelle que $\exp(a + ib) = e^a \cdot e^{ib}$ et donc que $|\exp(a + ib)| = e^a$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Autrement dit,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |\exp(z)| = e^{\Re(z)} \quad \text{et} \quad \text{Arg} \exp(z) \equiv b \pmod{2\pi}.$$

Chaque terme de cette somme est un produit de réels positifs. Toute famille finie de réels admet un plus grand élément : on peut donc poser

$$C = \max_{1 \leq k \leq r} C_k > 0 \quad \text{et} \quad N_a = \max_{1 \leq k \leq r} \|a_k - \lambda_k I_{E_k}\|_k \geq 0.$$

En se rappelant que $1 \leq m_k \leq n$, on en déduit que

$$\|\exp(ta)\|_c \leq \sum_{k=1}^r C e^{t \Re(\lambda_k)} \sum_{\ell=0}^n \frac{|t|^\ell}{\ell!} N_a^\ell = \left(\sum_{\ell=0}^n \frac{N_a^\ell}{\ell!} \cdot |t|^\ell \right) \left(\sum_{k=1}^r e^{t \Re(\lambda_k)} \right) = P(|t|) \sum_{k=1}^r e^{t \Re(\lambda_k)}$$

où P est un polynôme à coefficients réels.

On peut facilement proposer un polynôme P qui donne une majoration finale moins grossière, mais c'est sans importance pour la suite.

12. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Par définition de la norme sur $\mathbb{R}^n$,

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

Si on considère $\mathbb{R}$ comme une partie de $\mathbb{C}$ (ce qui n'est pas vraiment faux), tout élément de $\mathbb{R}^n$ appartient aussi à $\mathbb{C}^n$.

Si on considère x comme un vecteur de $\mathbb{C}^n$,

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$$

puisque $x_k^2 = |x_k|^2$ pour tout réel x_k .

Il n'y aura donc pas d'ambiguïté :

- ou bien $x \in \mathbb{C}^n$ peut être considéré comme un vecteur de $\mathbb{R}^n$, et dans ce cas, on vient de voir que les deux normes de x sont égales;
- ou bien l'une des coordonnées de x n'est pas réelle et dans ce cas, seule la norme définie sur $\mathbb{C}^n$ peut s'appliquer à x .

Il est donc possible d'utiliser la même notation pour ces deux normes.

Par définition de u et de a , on a $A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(u)$ et $A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(a)$.

La base canonique est "la même" dans les deux cas, bien que ce ne soit pas le même espace vectoriel !

L'application $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$ est une application linéaire de $L(\mathbb{K}^n)$, espace vectoriel de dimension finie, dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, donc c'est aussi une application continue (*). Par conséquent

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\exp(tu)) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_{\text{can}}}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} u^k\right) \stackrel{(*)}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(u^k) = \exp(tA)$$

et, pour les mêmes raisons,

$$\exp(tA) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\exp(ta)).$$

On en déduit que

$$\|\exp(tu)\|_r = \sup_{x \in S^1(\mathbb{R}^n)} \|\exp(tA)x\| \quad \text{et} \quad \|\exp(tu)\|_c = \sup_{x \in S^1(\mathbb{C}^n)} \|\exp(tA)x\|.$$

D'après la discussion précédente, $S^1(\mathbb{R}^n) \subset S^1(\mathbb{C}^n)$, donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|\exp(tu)\|_r \leq \|\exp(tu)\|_c.$$

13. L'application u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, espace vectoriel de dimension finie, et $\mathbb{R}_+$ est un intervalle. On peut donc appliquer le Théorème de Cauchy-Lipschitz à l'équation différentielle $y' = u(y)$ (linéaire, homogène, à "coefficients" constants, sous forme résolue) : pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, il existe une, et une seule, solution $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ telle que $y(t_0) = x_0$.

On se restreint ici au cas $t_0 = 0$.

D'après le cours,

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad g_{x_0}(t) = \exp(tu)(x_0).$$

♣ Supposons que $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_-^* + i\mathbb{R}$: les valeurs propres λ_k de a vérifient donc

$$\forall 1 \leq k \leq r, \quad \Re(\lambda_k) < 0.$$

Une famille finie de réels admet un plus grand élément, donc

$$\alpha_0 = \max_{1 \leq k \leq r} \Re(\lambda_k) < 0$$

et, d'après [12.] et [11.], il existe un polynôme P tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \|\exp(tu)\|_r \leq P(t) \sum_{k=1}^r e^{t \Re(\lambda_k)} \leq rP(t)e^{\alpha_0 t}.$$

Comme $\alpha_0 < 0$, par croissances comparées de $e^{\alpha_0 t}$ et des puissances t^k , on en déduit que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\exp(tu)\|_r = 0.$$

Par définition de la norme subordonnée (cf (*) en [2.]),

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq \|\exp(tu)(x_0)\| \leq \|\exp(tu)\|_r \|x_0\|,$$

donc

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} g_{x_0}(t) = 0$$

par encadrement.

♣ Réciproquement, supposons que la matrice A admette une valeur propre (complexe) λ telle que $\Re(\lambda) \geq 0$.

Il existe donc un vecteur propre (complexe) x tel que $Ax = \lambda x$ et comme les coefficients de A sont supposés réels, on en déduit que $A\bar{x} = \bar{\lambda} \bar{x}$ en conjuguant.

Par conséquent,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \exp(tA)x = e^{t\lambda} \cdot x \quad \text{et} \quad \exp(tA)\bar{x} = e^{t\bar{\lambda}} \cdot \bar{x}.$$

14.

Partie C. Le théorème de Liapounov

15.

16.

17.

18.

19.

20.