

Solution * Fonction ζ et probabilités

Partie A.

1. a. Série dont le terme général est $\mathcal{O}(1/n^2)$.

1. b. Calcul immédiat.

1. c. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, il est clair que $x+1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Par télescopage, $g(x+1) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Pour justifier ce télescopage correctement (= sans faire apparaître de séries divergentes), il faut revenir aux sommes partielles.

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{(x+1)+n} + \frac{1}{(x+1)-n} \right) &= \frac{1}{x+1} + \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{x+n} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{x-n} \\ &= \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{x-n} \\ &= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right) + \frac{1}{x+(N+1)} - \frac{1}{x-N}. \end{aligned}$$

Le membre de gauche converge vers $g(x+1)$ et celui de droite vers $g(x)$.

• Comme $\sin$ et $\cos$ admettent π pour anti-période, la fonction f est périodique de période 1. Donc D est périodique de période 1 par combinaison linéaire.

1. d. Comme g est périodique de période 1, il suffit de prouver qu'elle est continue sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$ pour conclure qu'elle est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

On peut isoler les termes à problème :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad g(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x}{(x+n)(x-n)}.$$

Les trois premiers termes sont continus sur $]0, 1[$. D'autre part, pour tout $n \geq 2$,

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \left| \frac{2x}{(x+n)(x-n)} \right| = \frac{2x}{(n+x)(n-x)} \leq \frac{2}{(n-1)^2}.$$

Le majorant est indépendant de $x \in [-1, 1]$ et c'est aussi le terme général d'une série convergente. On a ainsi prouvé la convergence normale sur $[-1, 1]$ d'une série de fonctions continues sur $[-1, 1]$. Par conséquent, la somme, définie par

$$\forall x \in [-1, 1], \quad S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x}{(x+n)(x-n)}$$

est continue sur $[-1, 1]$. Par combinaison linéaire, la fonction g est continue sur $]0, 1[$ et, par périodicité, sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

• Il est clair que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Par combinaison linéaire, la fonction D est donc continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

2. a. Si $x/2$ ou $(1+x)/2$ appartient à $\mathbb{Z}$, alors $x \in \mathbb{Z}$. Par conséquent, si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors $x/2$ et $(1+x)/2$ appartiennent tous deux à l'ensemble de définition de f et de g .

• Un peu de trigonométrie ensuite en se rappelant que $\cos(\theta + \pi/2) = -\sin \theta$ et $\sin(\theta + \pi/2) = \cos \theta$. **Ajouter $\pi/2$, c'est dériver.**

2. b. Comme au [1.c.], il faut revenir aux sommes partielles pour justifier correctement le télescopage.

3. a. Par périodicité, si on peut prolonger D en une fonction continue en 0 avec $\tilde{D}(0) = 0$, alors on prolonge D en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ en posant

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \tilde{D}(n) = 0.$$

• Comme f et g ont des limites infinies au voisinage de 0, il faut calculer un développement asymptotique pour lever l'indétermination.

Un équivalent ne suffit pas, car $f(x)$ et $g(x)$ sont clairement équivalents à $1/x$ et par conséquent

$$f(x) - g(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \left(\frac{1}{x} + o(1/x) \right) - \left(\frac{1}{x} + o(1/x) \right) = o(1/x),$$

ce qui ne lève pas l'indétermination.

• Avec $\sin u = u + o(u^2)$ et $\cos u = 1 + o(u)$, on obtient

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi}{x} \cdot \frac{1 + o(x)}{1 + o(x)} = \frac{\pi}{x} + o(1).$$

Inutile de faire plus compliqué! Mais si on fait moins précis, on ne pourra pas conclure.

• D'après [1.d.], la fonction S est continue en 0 et comme $S(0) = 0$, on en déduit que $S(x) = o(1)$ lorsque x tend vers 0. Donc

$$g(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + S(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} + o(1)$$

et par différence,

$$f(x) - g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(1),$$

ce qui signifie que D tend vers 0 au voisinage de 0.

|| On a gagné beaucoup de temps en traitant [1.d.] d'une manière qui permettait de répondre facilement à [3.a.] : si on n'avait pas anticipé, il aurait fallu produire deux raisonnements analogues. Il est toujours bon de lire une partie en entier avant de se lancer.

3.b. La fonction $\tilde{D}$ est continue sur le segment $[0, 1]$, on peut appliquer le théorème des bornes atteintes (Weierstrass).

• Par combinaison linéaire, la fonction D vérifie la même équation fonctionnelle que f et g . De plus, $\tilde{D}$ est nulle sur $\mathbb{Z}$, donc cette propriété est encore vraie sur $\mathbb{R}$.

Comme $0 \leq \alpha \leq 1$, alors $\alpha/2 \in [0, 1]$ et $(1 + \alpha)/2 \in [0, 1]$. Donc

$$\tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq M \quad \text{et} \quad \tilde{D}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \leq M$$

et par conséquent,

$$0 = 2\tilde{D}(\alpha) - \left[\tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \tilde{D}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \right] = \underbrace{\left[M - \tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right]}_{\geq 0} + \underbrace{\left[M - \tilde{D}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \right]}_{\geq 0}.$$

Une somme de termes positifs est nulle si, et seulement si, les termes sont tous nuls. Par conséquent,

$$\tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \tilde{D}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) = M$$

et on conclut par récurrence.

4. Par continuité de $\tilde{D}$ en 0 et unicité de la limite, on obtient

$$M = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = \tilde{D}(0) = 0.$$

Par définition de M , on en déduit que $\tilde{D}$ est négative sur $[0, 1]$.

|| Contrairement aux habitudes, on a étudié ici le maximum de $\tilde{D}$ et non pas le maximum de $|\tilde{D}|$. Il faut faire attention aux valeurs absolues — même quand il n'y en a pas.

Par périodicité, la fonction $\tilde{D}$ est négative sur $\mathbb{R}$. Par imparité, elle est aussi positive sur $\mathbb{R}$, donc elle est identiquement nulle.

5.a. Le rapport du jury indique que "le changement d'ordre de permutation devait être méticuleusement justifié", ce qui signifie sans doute que l'affirmation "tous les termes sont positifs" ne doit pas être considérée comme satisfaisante (même si le programme le permet). Le jury est souverain (= il a toujours raison).

Il fallait donc d'abord définir une famille $(u_{k,n})_{(k,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$:

$$\forall k, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{k,n} = 2 \left(\frac{x}{2\pi n} \right)^{2k}$$

en indiquant très clairement que ces nombres réels étaient positifs.

Ensuite, rappeler que $|x| < 2\pi$ et donc $|x/(2\pi n)|^2 < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la sous-famille $(u_{k,n})_{k \in \mathbb{N}^*}$ est sommable (série géométrique dont la raison appartient à $]0, 1[$) et sa somme est connue :

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sum_{k=1}^{+\infty} u_{k,n} = 2 \frac{[x/(2\pi n)]^2}{1 - [x/(2\pi n)]^2} \\ &= \frac{2x^2}{(2\pi n)^2 - x^2}. \end{aligned}$$

Enfin, il suffit de constater que la série $\sum \sigma_n$ est absolument convergente puisque $\sigma_n = \mathcal{O}(1/n^2)$ pour pouvoir conclure : la famille $(u_{k,n})_{(k,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ est sommable et par conséquent,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} u_{k,n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} u_{k,n}.$$

Le reste des calculs est sans mystère.

5.b. Un peu de trigonométrie dans $\mathbb{C}$.

6. On connaît deux fonctions f et g développables en série entière : f est la somme d'une série entière dont le rayon de convergence est infini (fonction de référence) et g est la somme d'une série entière dont le rayon de convergence est au moins égal à 2π (d'après [5.a.]).

D'après le Théorème du produit de Cauchy, le produit fg est la somme d'une série entière dont le rayon de convergence est au moins égal à 2π .

D'après [5.b.], on a

$$\forall x \in]-2\pi, 2\pi[, \quad f(ix)g(ix) = ix.$$

(Bien sûr, on indique clairement qu'on a traité à part le cas $x = 0$.)

Par conséquent, la fonction

$$z \mapsto f(iz)g(iz) - iz$$

est développable en série entière avec un rayon de convergence R strictement positif ($R \geq 2\pi$) et cette fonction est identiquement nulle sur l'intervalle ouvert $]-2\pi, 2\pi[$. Par conséquent, elle est identiquement nulle sur le disque ouvert $D(0, 2\pi)$.

7.a. Il est clair sur la définition que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. D'après [6.], la fonction h est développable en série entière sur $]-2\pi, 2\pi[$, donc elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Il reste à invoquer la formule de Taylor pour les séries entières.

7.b. On a invoqué le théorème sur le produit de Cauchy en [6.] sans faire de calculs, c'est le moment de s'y mettre ! On sait que, sur un voisinage de 0,

$$z = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} z^k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^k \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n$$

avec pour le terme d'ordre 1 :

$$1 = c_1 = 0 \cdot b_1 + 1 \cdot b_0 = b_0$$

et pour les termes d'ordre $n \geq 2$:

$$0 = c_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{(n-k)!}.$$

Il reste à remarquer que l'énoncé a procédé à un changement d'indice pour conclure.

7.c. Calculs longs, sujets à erreurs (il y a des fractions partout). À moins d'aimer vraiment ça (ou de ne déjà plus savoir quoi faire dans le sujet), il me paraît avisé de passer directement à la suite.

À titre culturel, on pourra retenir que $\zeta(2k)$ est le produit d'un rationnel et de π^{2k} pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$. (On déduit facilement de la relation établie à la question précédente que les b_{2n} sont tous rationnels.)

Partie B.

8.a. Pour un ensemble fini ou dénombrable E , la tribu par défaut est la tribu discrète $\mathcal{E} = \mathfrak{P}(E)$. Toute mesure de probabilité sur E est donc une application

$$\mu : \mathfrak{P}(E) \rightarrow [0, 1].$$

8.b. Question de cours.

Il faut bien évidemment *commencer* par indiquer que $\|f\|$ est bien défini en tant que réel positif. *Si cela va sans dire, cela va toujours mieux en le disant.*

Ensuite, il reste à vérifier les propriétés des normes : homogénéité, séparation, inégalité triangulaire.

Un seul oubli et la question ne rapporte aucun point.

9. La convergence uniforme sur $\mathfrak{P}(E)$ implique la convergence simple, en particulier en se restreignant aux singletons.

10.a. On peut choisir la voie probabiliste (Théorème de convergence croissante) ou la voie analytique (le reste d'une série convergence tend vers 0) pour justifier l'existence de F_ε .

♣ Comme F_ε est un ensemble *fini*, la somme

$$\sum_{x \in F_\varepsilon} |\mu_n(x) - \mu(x)|$$

est une somme de suites de limite nulle, donc c'est aussi une suite de limite nulle et l'existence de l'entier N_ε s'en déduit.

10.b. On décompose A sur le système complet $(F_\varepsilon, F_\varepsilon^c)$: pour toute mesure de probabilité ν ,

$$\nu(A) = \nu(A \cap F_\varepsilon) + \nu(A \cap F_\varepsilon^c) \leq \nu(A \cap F_\varepsilon) + \nu(F_\varepsilon^c)$$

puisque $A \cap F_\varepsilon^c \subset F_\varepsilon^c$. On obtient alors l'encadrement par inégalité triangulaire.

♣ Par définition de la norme,

$$|\mu_n(A \cap F_\varepsilon) - \mu(A \cap F_\varepsilon)| \leq \|\mu_n - \mu\|.$$

La borne supérieure est un majorant.

Par astuce taupinale,

$$\begin{aligned} \mu_n(F_\varepsilon^c) &= [\mu_n(F_\varepsilon) - \mu(F_\varepsilon)] + \mu(F_\varepsilon^c) \\ &\leq |\mu_n(F_\varepsilon) - \mu(F_\varepsilon)| + \mu(F_\varepsilon^c) \\ &\leq \|\mu_n - \mu\| + \mu(F_\varepsilon^c). \end{aligned}$$

Il ne reste qu'à rassembler les morceaux.

10. c. Il n'y a qu'une remarque à faire, mais elle est essentielle : l'entier N_ε est indépendant de la partie $A \in \mathfrak{P}(E)$ choisie. Pour cette raison seulement, on peut passer à la borne supérieure dans la majoration précédente et conclure que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, \|\mu_n - \mu\| \leq \varepsilon.$$

|| Il fallait ici prendre conscience qu'une hypothèse de convergence simple (sur les singletons de E) se révélait en propriété de convergence uniforme sur $\mathfrak{P}(E)$.

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la distance $\|\delta_n - \delta_{n+1}\|$ est égale à 1, donc la suite est nécessairement divergente. Pire, aucune suite extraite ne converge !

|| Certains ont cru pouvoir appliquer le résultat qui venait d'être démontré. Catastrophe ! C'était indiquer d'une part qu'on n'avait vraiment pas pris conscience que la convergence considérée était la convergence uniforme (définie par la norme) et d'autre part qu'on n'avait pas bien lu le contexte de la question [10.] où on supposait que la "limite simple" μ était une mesure de probabilité. (Ceux qui se sont fourvoyés ont en général bien identifié la "limite", il s'agissait de la mesure nulle — qui n'est évidemment pas une mesure de probabilité.)

12. Application typique du procédé diagonal d'extraction, soigneusement guidée (merci!).

Un point délicat : justifier que ψ est strictement croissante (ce n'est pas une composée d'applications strictement croissantes). Inutile cependant de se compliquer la tâche, il suffit de comparer $\psi(k)$ et $\psi(k+1)$!

Si fastidieux que ce soit, il faut écrire suffisamment de termes pour justifier correctement les différentes propriétés étudiées ici.

12. d. En tant que valeur d'adhérence d'une suite de réels positifs, $\mu_\infty(x_i)$ est positif pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.

♣ Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^N \mu_{\psi(k)}(x_i) = \mu_{\psi(k)}(\{x_1, \dots, x_N\}) \leq 1.$$

Comme N est fixé, on peut faire tendre k vers $+\infty$ et en déduire que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^N \mu_\infty(x_i) \leq 1.$$

La série $\sum \mu_\infty(x_i)$ est une série de terme général positif et on vient de prouver que ses sommes partielles sont toutes majorées par 1, donc la série converge et sa somme est elle aussi majorée par 1.

|| Si cette somme est strictement inférieure à 1, alors μ_∞ n'est pas une mesure de probabilité sur E !

12. e. Il faut dans un premier temps adapter le raisonnement précédent pour démontrer que, sous l'hypothèse de tension, la somme de la série $\sum \mu_\infty(x_i)$ est bien égale à 1.

|| Cela ne suffit pas ! Si la somme est bien égale à 1, alors la famille $(\mu_\infty(x_i))_{i \in \mathbb{N}^*}$ est bien une distribution de probabilité discrète sur E , mais l'application μ_∞ est-elle encore σ -additive sur $\mathfrak{P}(E)$? C'est bien le cas, mais pour le prouver, il faudrait reprendre les calculs qui ont prouvé que la somme de la série était égale à 1 et en déduire que μ_∞ est bien σ -additive. Très fastidieux et ce n'était probablement pas attendu par le jury !

♣ Dans un second temps, il faut vérifier que $\|\mu_{\psi(k)} - \mu_\infty\|$ tend bien vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$! C'est une conséquence simple de la question [10.] : cette fois, on sait que $\mu_\infty \in \mathcal{M}(E)$, on peut donc appliquer le résultat établi en [10.].

Partie C.

13. Question de cours, pas toujours bien traitée.

14. Pour tout $A \in \mathfrak{P}(E)$, on peut associer à l'évènement $[X \in A]$ la variable aléatoire de Bernoulli $\mathbb{1}_{[X \in A]}$, dont le paramètre est aussi l'espérance :

$$\mathbf{E}(\mathbb{1}_{[X \in A]}) = \mathbf{P}(X \in A) = \mu_X(A).$$

Par linéarité et inégalité triangulaire,

$$|\mu_X(A) - \mu_Y(A)| = |\mathbf{E}[\mathbb{1}_{[X \in A]} - \mathbb{1}_{[Y \in A]}]| \leq \mathbf{E}(|\mathbb{1}_{[X \in A]} - \mathbb{1}_{[Y \in A]}|).$$

Il est clair que $|\mathbb{1}_{[X \in A]} - \mathbb{1}_{[Y \in A]}|$ est une variable aléatoire de Bernoulli (quelles sont les valeurs prises?) et on montre rapidement que

$$|\mathbb{1}_{[X \in A]} - \mathbb{1}_{[Y \in A]}| = \mathbb{1}_{[X \in A] \Delta [Y \in A]} \leq \mathbb{1}_{[X \neq Y]}.$$

On conclut par croissance de l'espérance :

$$\forall A \in \mathfrak{P}(E), \quad |\mu_X(A) - \mu_Y(A)| \leq \mathbf{P}(X \neq Y)$$

et comme le majorant est indépendant de A , on peut passer à la borne supérieure.

15. a. Pour $\omega \in \Omega$, on considère l'ensemble

$$Z(\omega) = \{n \in \mathbb{N} : X_n(\omega) \neq X(\omega)\}.$$

C'est une partie de $\mathbb{N}$: ou bien elle est vide (et alors $L(\omega)$ est, par définition, égal à 0); ou bien elle n'est pas vide et on déduit des hypothèses qu'elle est majorée, ce qui prouve l'existence du maximum.

15. b. On revient à la définition de l'ensemble aléatoire $Z(\omega)$ pour remarquer que : si

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X_n(\omega) \neq X(\omega),$$

alors l'ensemble aléatoire $Z(\omega)$ contient au moins l'entier n , ce qui prouve que $L(\omega) \geq n$.

On conclut par croissance de la mesure $\mathbf{P}$.

15. c. Question classique (sur la fonction de répartition), il suffit d'invoquer le théorème de continuité décroissante et de remarquer que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [L \geq n] = \emptyset$$

puisque L est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Partie D.