
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 1

rms135-769

On considère l'équation différentielle

$$2xy''(x) + y'(x) - y(x) = 0 \quad (E)$$

1. Démontrer que (E) possède une, et une seule, solution f sur \mathbb{R} telle que $f(0) = 1$ et qui soit la somme d'une série entière.
2. Donner l'expression de f à l'aide de fonctions usuelles.
3. Résoudre l'équation (E) à l'aide du changement d'inconnue $y(x) = z(x)f(x)$.

Exercice 2

rms135-770

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Démontrer que les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + (\lambda - 1)x^2y(x) = 0 \quad (E)$$

sont de la forme $H(x)e^{-x^2/2}$ où H est développable en série entière.

Exercice 3

rms135-771

Résoudre l'équation différentielle

$$(1 + x^2)y'' + xy'(x) - y(x) = 0.$$

Exercice 4

rms135-772

Déterminer une solution de

$$y''(x) + xy'(x) + y(x) = 1$$

développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 5

rms135-773

On considère l'équation différentielle

$$\forall x > 0, \quad \alpha x^2 y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = 0. \quad (H)$$

1. Résoudre (H) avec le changement de variable $t = \ln x$.
2. Résoudre l'équation

$$\forall x > 0, \quad x^2 y''(x) + xy'(x) + y(x) = \sin(a \ln x) \quad (E)$$

Exercice 6

rms135-774

On considère l'équation différentielle

$$x^2 y''(x) + y(x) + x^2 = 0 \quad (E)$$

1. Résoudre (E) sur \mathbb{R}_+^* .
2. Démontrer que (E) admet une, et une seule, solution qui admet une limite finie en 0.
3. Existe-t-il des solutions de (E) qui admettent une limite finie en $+\infty$?
4. Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.

Exercice 7

rms135-775

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation différentielle

$$(1 + x^n)(1 - x^2)y'(x) + 2x(1 + x^n)y(x) = 2(1 - x^2). \quad (E_n)$$

1. Trouver les solutions de (E_n) sur $] -1, 1[$.
2. Existe-t-il une solution définie sur \mathbb{R} ?
3. Existe-t-il une solution définie sur $]1, +\infty[$ et bornée?

Exercice 8**rms135-776**

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une application continue et bornée. Déterminer les solutions bornées de l'équation différentielle suivante.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - y(x) = f(x).$$

Exercice 9**rms135-777**

Soit y , une solution sur \mathbb{R}_+^* de l'équation différentielle

$$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0 \quad (\text{E})$$

1. On pose

$$\forall x > 0, \quad u(x) = \sqrt{x}y(x).$$

Déterminer une équation différentielle vérifiée par u .

2. On considère une fonction $v \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad v''(x) + v(x) = 0.$$

Démontrer que

$$\int_a^b \frac{u(x)v(x)}{4x^2} dx = [u(x)v'(x) - u'(x)v(x)]_a^b$$

quels que soient les réels strictement positifs a et b .

3. Démontrer que, pour tout $a > 0$, il existe $x_a \in [a, a + \pi[$ tel que

$$y(x_a) = 0.$$

4. Démontrer que la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n (n!)^2}$$

s'annule une infinité de fois.

Exercice 10**rms135-778**

On note S , l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$\forall x > 0, \quad xy''(x) + xy'(x) - y(x) = 0 \quad (\text{E})$$

1. Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que (E) admette une solution de la forme $y(x) = x^\alpha$.

2. Étudier les variations de la fonction G définie par

$$\forall x > 0, \quad G(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^2} dt.$$

3. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. Démontrer que la fonction

$$s = [x \mapsto xf(x)]$$

appartient à S si, et seulement si, f' est solution d'une équation différentielle du premier ordre (à déterminer). Résoudre cette équation différentielle.

4. Déterminer S au moyen de la fonction G . Étudier les limites des solutions au voisinage droit de 0.

Exercice 11**rms135-779**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe \mathcal{C}^1 , monotone et tendant vers une limite réelle au voisinage de $+\infty$. Démontrer que la solutions de l'équation

$$y''(x) + y(x) = f(x)$$

sont bornées sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 12**rms135-780**Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(x) \geq 0.$$

Démontrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) + f(t + \pi) \geq 0.$$

Exercice 13**rms135-781**

Résoudre les systèmes différentiels suivants.

1.

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 3y(t) + 3z(t) + te^t \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) + 3z(t) + e^t \\ z'(t) = 3x(t) + 3y(t) + 2z(t) + t^2e^t \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x'(t) = 2y(t) - z(t) + te^t \\ y'(t) = 3x(t) - 2y(t) + e^t \\ z'(t) = -2x(t) - 2y(t) + z(t) + t^2e^t \end{cases}$$

Exercice 14**rms135-782**Soient m et n , deux entiers naturels non nuls et $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On considère le système différentiel

$$Y^{(m)}(t) = AY(t) \tag{S}$$

d'inconnue $Y \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.Démontrer que la matrice A est nilpotente si, et seulement si, toutes les solutions de (E) sont polynomiales.**Exercice 15****rms135-783**On munit \mathbb{R}^n de la norme euclidienne canonique. Démontrer que la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si, et seulement si, les solutions de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) = AY(t)$$

sont de norme constante.

Exercice 16**rms135-784**Soient $T \in \mathbb{R}_+$ et $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, une application continue et périodique, de période T .Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et une application $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ de classe \mathcal{C}^1 , non identiquement nulle telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = A(t)X(t) \quad \text{et} \quad X(t + T) = \lambda X(t).$$

Exercice 17**rms135-959**

On considère l'équation différentielle

$$x^2y'(x) + y(x) = x^2. \tag{E}$$

1. Démontrer que l'équation (E) n'admet pas de solution développable en série entière.
2. Résoudre l'équation (E) sur $]0, +\infty[$.
3. Démontrer qu'il existe une, et une seule, solution qui tend vers 0 au voisinage droit de 0.

Exercice 18**rms135-960**

On pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}e^{-x/t}}{\sqrt{t}} dt.$$

1. Démontrer que f est définie sur \mathbb{R}_+ .
2. Démontrer que f est de classe \mathcal{C}^2 et vérifie l'équation différentielle

$$2xy''(x) + y'(x) - 2y(x) = 0. \tag{E}$$

3. Résoudre l'équation différentielle (E) en posant $y(x) = z(\sqrt{x})$.

Exercice 19**rms135-961**

On considère une fonction développable en série entière

$$\forall x \in]-\mathbb{R}, \mathbb{R}[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

qui vérifie l'équation différentielle

$$x^2 y''(x) + 4xy'(x) + (2 - x^2)y(x) = 1. \quad (\text{E})$$

1. Démontrer que $a_0 = 1/2$, $a_1 = 0$ et que

$$\forall n \geq 2, \quad a_n = \frac{a_{n-2}}{(n+1)(n+2)}.$$

2. En déduire l'unicité de f .
3. Déterminer les coefficients a_n , le rayon de convergence de la série entière et exprimer la fonction f au moyen de fonctions usuelles.

Exercice 20**rms135-962**

On considère l'équation différentielle

$$x(1-x)y''(x) + (1-3x)y'(x) - y(x) = 0. \quad (\text{E})$$

1. Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation (E).
2. Déterminer les solutions de (E) sur des intervalles sans singularité.
3. Est-il possible de raccorder ces solutions entre elles?

Exercice 21**rms135-963**

On considère l'équation différentielle

$$x^2 y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 2(1+x) \quad (\text{E})$$

et on note (H), l'équation homogène associée.

1. Trouver les solutions de l'équation homogène (H) de la forme $y(x) = x^\alpha$.
2. Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur \mathbb{R} ?

Exercice 22**rms135-964**

Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{a,b,c}(t) = \begin{pmatrix} be^t + ce^{-t} \\ 2a - be^t \\ a + ce^{-t} \end{pmatrix}$$

et on note F , l'ensemble des fonctions $f_{a,b,c}$.

1. Démontrer que F est un espace vectoriel. Donner sa dimension ainsi qu'une base.
2. Trouver une matrice $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall f \in F, \forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = Mf(t).$$

3. Cette matrice M est-elle inversible?
4. Quelles sont les valeurs propres de M ? Commenter.

Exercice 23**rms135-1150**

On considère l'équation différentielle

$$x^2 y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = \ln(1+x). \quad (\text{E})$$

1. Déterminer les solutions de (E) qui sont développables en série entière.
2. Exprimer ces solutions au moyen de fonctions usuelles.

Exercice 24**rms135-1151**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{tr } A > 0$. On considère une fonction

$$\begin{aligned} x : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned}$$

de classe \mathcal{C}^1 et on suppose que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = Ax(t)$$

et que

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) = 0.$$

Démontrer qu'il existe une forme linéaire

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

non nulle telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x(t)) = 0.$$

Exercice 25**rms135-1152**

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

Pour toute fonction $u \in E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et pour tout entier $1 \leq i \leq n$, on considère les équations différentielles

$$\forall t \in [0, 1], \quad x_i'(t) = \lambda_i x_i(t) + u(t). \quad (\text{L}_i)$$

1. Résoudre le système différentiel $(\text{L}_i)_{1 \leq i \leq n}$ avec la condition initiale :

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad x_i(0) = 0.$$

2. On pose alors

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \varphi_i(u) = x_i(1)$$

et

$$\Phi(u) = (\varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u)).$$

Démontrer que Φ est une application linéaire de E dans \mathbb{R}^n .

3. Pour $1 \leq i \leq n$, on considère l'application

$$f_i = \left[t \mapsto e^{\lambda_i(1-t)} \right]$$

en tant que vecteur de $F = \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R})$.

Démontrer que la famille $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre dans $L(E, \mathbb{R})$ si, et seulement si, la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre dans F .

Exercice 26**rms135-1485**

On considère l'équation différentielle

$$y'(x) - 2xy(x) = 1. \quad (\text{E})$$

1. Démontrer que l'équation (E) admet une, et une seule, solution développable en série entière telle que $y(0) = 0$.

2. Résoudre le problème de Cauchy associé à la condition initiale $y(0) = 0$. (On laissera la solution sous forme intégrale.)

3. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Exercice 27**rms135-1486**

1. Soient a , un réel strictement positif, et $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, une application continue et bornée. Démontrer que l'équation différentielle

$$x'(t) - ax(t) = h(t)$$

a une, et une seule, solution bornée sur \mathbb{R}_+ .

2. Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle

$$4tx''(t) + 6x'(t) + x(t) = 0.$$

3. On note G , l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^3 sur \mathbb{R} qui vérifient l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x^{(3)}(t) + 2x''(t) - x'(t) - 2x(t) = 0 \quad (\text{E})$$

Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

4. On note Δ , la dérivation vue comme un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \Delta(f) = f' \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$G = \text{Ker } P(\Delta).$$

5. Démontrer que

$$G = \text{Ker}(\Delta^2 - I) \oplus \text{Ker}(\Delta + 2I).$$

6. Résoudre l'équation (E).

Exercice 28**rms135-1487**

Soient $E = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; P , le sous-espace des fonctions paires et I , le sous-espace des fonctions impaires.

1. Démontrer que

$$E = P \oplus I.$$

2. Résoudre l'équation différentielle

$$y''(x) - y(x) = \text{ch } x.$$

3. Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) - f(-x) = \text{ch } x.$$

Exercice 29**rms135-1489**

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- À quelle condition sur le réel a la suite $(a^n A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle vers une limite non nulle ?
- Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, une matrice non nulle telle que $A^2 = 0_3$. Quelle est la dimension du commutant de A ?
- Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Démontrer que la matrice A est diagonalisable.
- Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de A .
- Résoudre le système différentiel

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = AX(t).$$

Exercice 30**rms135-1575**

On considère l'équation différentielle

$$\forall t > 0, \quad t^2 x''(t) + tx'(t) + x(t) = t + \frac{1}{t} \quad (E)$$

1. Énoncer le Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.
2. Démontrer qu'une fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ est solution de (E) si, et seulement si, la fonction $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(e^x)$$

est solution d'une équation différentielle du second ordre (qu'on précisera).

3. Résoudre l'équation (E).

Exercice 31**rms135-1576**

Résoudre le système différentiel suivant.

$$\begin{cases} x'(t) = & y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) + z(t) \end{cases}$$

Exercice 32**rms135-1577**

On considère le système différentiel

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = AX(t) \quad (S)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que A est diagonalisable. Expliciter deux matrices P, inversible, et D, diagonale, telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

2. On pose $U(t) = P^{-1}X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Déterminer un système différentiel vérifié par la fonction U. En déduire les solutions du système (S).
3. On considère maintenant le système différentiel

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X''(t) = AX(t) \quad (S')$$

Déterminer les solutions réelles de (S').

4. Soit E, l'ensemble des solutions réelles bornées de (S'). Démontrer que E est un espace vectoriel et calculer sa dimension.

Exercice 33**LS G6 bis**

Soient $A > 0$; f et g, deux applications continues de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} telles que

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) \leq A + \int_0^x f(t)g(t) dt$$

et

$$\forall x \geq 0, \quad g(x) \geq 0.$$

Démontrer que

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) \leq A \exp\left(\int_0^x g(t) dt\right).$$