
CALCUL DIFFÉRENTIEL

Index des démonstrations rédigées

Chapitre 18 — Calcul différentiel

[23.3]	16-01	[46.7]	16-07	[107]	16-19
[27.3]	16-01	[74.2]	16-03	[108]	16-09
[46.1]	16-01	[74.3]	16-03	[112]	16-20
[46.2]	16-10	[78.1]	16-04	[113.1]	16-14
[46.3]	16-06	[78.2]	16-04	[113.3]	16-15
[46.4]	16-12	[79]	16-05	[118]	16-21
[46.5]	16-11	[94]	16-13		

Chapitre 19 — Recherche d'extrema

[10.5]	16-08	[28]	16-22	[46]	16-16
[22.1]	16-23	[32]	16-24		

Exercice 1**16-01**

Étudier l'application définie par

$$\forall (x, y) \neq (0, 0), \quad f(x, y) = \frac{xy}{|x| + |y|}.$$

Exercice 2**16-02**On pose $\Omega = \mathbb{R}^2$.

1. Résoudre à l'EDP

$$\forall M = (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(M) - 2 \frac{\partial f}{\partial y}(M) = 0. \quad (H)$$

2. Résoudre l'EDP (E) :

$$\forall M = (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(M) - 2 \frac{\partial f}{\partial y}(M) = y. \quad (E)$$

Exercice 3**16-03**

1. Calculer les dérivées partielles de

$$F(x, y) = f(z(x, y))$$

avec $f(z) = \sin z$ et $z(x, y) = 3x - 4y$.

2. Calculer les dérivées partielles de

$$F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$$

avec $f(u, v) = u - v$, $u(x, y) = x^2y$ et $v(x, y) = xy^2$.**Exercice 4****16-04**On suppose que $g = g(u)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.1. Si $u = u(x_1, \dots, x_n)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, alors la fonction f définie par

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(u(x_1, \dots, x_n))$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ et son laplacien est donné par

$$\Delta f = g''(u) \|\nabla u\|^2 + g'(u) \Delta u.$$

2. Sur $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on pose

$$u(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

2. a.

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \frac{1}{u} - \frac{x_k^2}{u^3}$$

2. b. La fonction f est harmonique sur Ω si, et seulement si,

$$\forall u > 0, \quad g''(u) + \frac{n-1}{u} \cdot g'(u) = 0$$

2. c. Si $n \geq 3$ et si f est une fonction harmonique radiale sur Ω , alors il existe deux constantes a et b telles que

$$\forall x \neq 0, \quad f(x) = \frac{a}{\|x\|^{n-2}} + b.$$

Exercice 5**16-05**Soit $f = f(x, y)$, une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.1. La fonction g définie par

$$g(u, v) = f(u + v, uv)$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.2. Si g est harmonique sur $\mathbb{R}^2$, alors

$$2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (x^2 - 2y) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

sur l'ouvert $\Omega = [x^2 - 4y > 0]$.**Exercice 6****16-06**L'application f définie par $f(0, 0) = 0$ et par

$$\forall (x, y) \neq (0, 0), \quad f(x, y) = (x^2 - y^2) \ln(x^2 + y^2)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(y, x).$$

Exercice 7**16-07**La fonction f définie par $f(0, y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ et par

$$f(x, y) = x^2 \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

sur $[x \neq 0]$ est différentiable au point $(0, 0)$ mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.**Exercice 8****16-08**La fonction f définie sur $A = [0 < x \leq a \leq b \leq y] \subset \mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x, y) \in A, \quad f(x, y) = \frac{(x + y)^2}{xy}$$

atteint un minimum absolu sur A .**Exercice 9****16-09**1. On suppose que trois fonctions f , g et h sont reliées par

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad f(x, y) = xg(y) + h(y).$$

Si $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, alors g et h sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]c, d[$.2. Une fonction $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ vérifie l'équation

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0$$

si, et seulement si, il existe g et h de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]c, d[$ telles que

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad f(x, y) = xg(y) + h(y).$$

3. Une fonction $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ vérifie l'équation

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

si, et seulement si, il existe $g \in \mathcal{C}^2([a, b])$ et $h \in \mathcal{C}^2([c, d])$ telles que

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad f(x, y) = g(x) + h(y).$$

Exercice 10**16-10**

La fonction f définie par $f(0, 0) = 0$ et par

$$\forall (x, y) \neq (0, 0), \quad f(x, y) = \frac{x^4 y}{x^2 + y^2}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11**16-11**

L'application f définie sur $D =]-1, 1[\times]-1, 1[$ par

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1 + y^{2n}}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 12**16-12**

La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(0, 0) = 0$ et par

$$\forall (x, y) \neq (0, 0), \quad f(x, y) = xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

est différentiable au point $(0, 0)$ sans être de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 13**16-13**

Soient φ et ψ , deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$u(x, y) = x\varphi(x + y) + y\psi(x + y)$$

vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

2. La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $v(x, y) = \psi(x + \varphi(y))$ vérifie l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Exercice 14**16-14**

Dans un cadre scolaire (et dans un cadre scolaire uniquement!), il suffit souvent d'un changement de variables linéaire pour pouvoir résoudre une EDP, en se ramenant à une EDP de référence.

Résoudre les EDP suivantes en effectuant les changements de variables indiqués.

1.

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3 \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \{u = 2x + y, v = 3x + y\}$$

2.

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f(x, y) \quad \{u = x, v = y - x\}$$

3.

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = (x + y)^2 \quad \{u = x + y, v = x - y\}$$

Exercice 15**16-15**

On poursuit l'étude menée au [16-14] avec des EDP du second ordre, en reprenant les mêmes notations. Nous devons dans un premier temps appliquer la règle de la chaîne pour les dérivées partielles secondes (**méthode à connaître**). Autre nouveauté : il faut ici trouver soi-même le changement de variables.

Résoudre les EDP suivantes au moyen de changements de variables linéaires.

1.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

2.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

3.

$$2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Exercice 16**16-16**

Soit $f : U \rightarrow F$ et $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$, deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Si $\gamma(0) = a \in U$ et $\gamma(1) = b \in U$, alors

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt.$$

2. Soient U , un ouvert convexe et $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$. L'application f est constante si, et seulement si, l'application linéaire tangente $df(M)$ est l'application nulle pour tout $M \in U$.

Exercice 17**16-17**

Soit E , un espace euclidien.

1. La fonction f définie par

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \|x\|^2$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur E et $\nabla f(x) = 2 \cdot x$ pour tout $x \in E$.

2. Les fonctions définies par

$$g_1(x) = \|x\|, \quad g_2(x) = \frac{1}{\|x\|} \quad \text{et} \quad g_3(x) = \frac{1}{\|x\|^2}$$

sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $E \setminus \{0_E\}$ et

$$\nabla g_1(x) = \frac{x}{\|x\|}, \quad \nabla g_2(x) = -\frac{x}{\|x\|^3}, \quad \nabla g_3(x) = -2 \cdot \frac{x}{\|x\|^4}$$

pour tout $x \neq 0_E$. Les dérivées partielles des fonctions g_i ne sont pas définies en $x = 0_E$.

3. La fonction φ définie par

$$\forall x \neq 0_E, \quad \varphi(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $E \setminus \{0_E\}$ et

$$\forall x \neq 0_E, \forall h \in E, \quad d\varphi(x)(h) = \frac{1}{\|x\|^2} \cdot \left(h - 2 \frac{(x|h)}{\|x\|^2} \cdot x \right).$$

Exercice 18**16-18**

On suppose que $w = x + y + z$ avec $z = x + y$. D'après la règle de la chaîne,

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \\ &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}$$

et une interprétation erronée conduit à $\partial w / \partial z = 0$ alors que manifestement $\partial w / \partial z = 1$. Expliquer ce paradoxe !

Exercice 19**16-19**

Soit $\Omega =]a, b[\times]c, d[$.

1. Une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ vérifie l'équation

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$$

si, et seulement si, il existe $g \in \mathcal{C}^1([c, d], \mathbb{R})$ telle que

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad f(x, y) = g(y).$$

2. Sur l'ouvert $\Omega = [y \neq 0] \cup [x < 0] \subset \mathbb{R}^2$, qui est connexe par arcs, il existe une application $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

et dont la valeur dépend quand même de y .

Exercice 20**16-20**

Soit $c > 0$.

1. Si g et h sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, alors la fonction f définie par

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, t) = g(x + ct) + h(x - ct)$$

vérifie l'équation des ondes :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) = 0.$$

2. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, une solution de l'équation des ondes.

- 2.a. L'application définie par

$$\varphi(x, t) = (x + ct, x - ct)$$

est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et la fonction $F = f \circ \varphi^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

- 2.b. Il existe deux fonctions g et h de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, t) = g(x + ct) + h(x - ct).$$

Exercice 21**16-21**

Un autre exemple de changement de variables non linéaire. La bijectivité de φ est ici établie en exprimant la réciproque φ^{-1} . Cette expression ne nous servira à rien d'autre... Comme d'habitude, le changement de variables nous sert à transformer l'EDP en une équation différentielle (qu'on sait résoudre).

1. L'application φ définie sur l'ouvert $\Delta = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par

$$\varphi(u, v) = \left(\frac{u^2 + v^2}{2}, v \right)$$

réalise une bijection de Δ sur l'ouvert $U = [y^2 < 2x]$. Cette bijection et sa réciproque sont de classe $\mathcal{C}^2$.

2. Une fonction $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ vérifie l'équation

$$(2x - y^2) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x} - f = 0$$

si, et seulement si, il existe deux fonctions A et B de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$f(x, y) = A(y) \operatorname{ch} \sqrt{2x - y^2} + B(y) \operatorname{sh} \sqrt{2x - y^2}$$

pour tout $(x, y) \in U$.

Exercice 22**16-22**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 5x - y.$$

1. Il existe une matrice symétrique et inversible $S \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et une matrice colonne $B \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad f(x, y) = \frac{1}{2} X^\top . S . X - B^\top . X.$$

2. Quelles que soient X_0 et H dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$,

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + (X_0^\top . S - B^\top) H + \frac{1}{2} H^\top . S . H.$$

On choisit $X_0 = S^{-1} B$. Pourquoi ?

3. Soit $\Delta = \operatorname{Diag}(3, 1)$. Il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ telle que $P^\top . S . P = \Delta$.

4. Pour tout $H \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non nul,

$$H^\top . S . H = H^\top . P . \Delta . P^\top . H \geq H^\top . P . P^\top . H = H^\top . H > 0.$$

5. La fonction f atteint son minimum global strict en X_0 et n'est pas majorée sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 23**16-23**

Lorsqu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert, la recherche de ses extrema éventuels commence par l'identification de ses points critiques.

Dans un second temps, il faut réussir à déterminer la nature des points critiques : lieu d'un extremum local, point selle, autre chose encore... Pour cela, il faut passer par un développement limité.

Le développement limité à l'ordre 2 et le spectre de la hessienne permettent alors (parfois) de conclure.

Attention ! Il se peut que la recherche d'extrema sur un ouvert reste vaine : sur une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ comme sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, une fonction peut très bien n'avoir ni maximum, ni minimum tout en étant continue et bornée (en pareil cas, le sup n'est pas un max et l'inf n'est pas un min).

1. La fonction $[(x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy]$ n'est ni majorée, ni minorée sur $\mathbb{R}^2$.

2. Elle admet deux points critiques : $M_0 = (0, 0)$ et $M_1 = (1, 1)$.

3. Elle atteint un minimum local strict en M_1 . La valeur en M_0 n'est pas un extremum local.

Exercice 24**16-24**

L'expression définie sur $]0, 1[^n \cap [x_1 + \dots + x_n = 1]$ par

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - x_k}$$

atteint son minimum absolu en $x_1 = \dots = x_n = 1/n$.

Exercice 25**16K h-01**

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle \nabla f(x) | x \rangle \geq 0.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Démontrer que la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = f(t \cdot x)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $g'(t)$.

2. En déduire que f atteint un minimum global au point $O = (0, \dots, 0)$.

Exercice 26**16K h-02**

On pose $M_0 = (0, 0)$ et on considère la fonction définie par $f(M_0) = 0$ et par

$$\forall M = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{M_0\}, \quad f(M) = \frac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2}.$$

1. L'ensemble $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{M_0\}$ est un ouvert.
2. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{M_0\}$.
3. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
4. La fonction f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 27**16K h-03**

Soit $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, dérivable. Calculer la dérivée de

$$[t \mapsto \det A(t)].$$

Exercice 28**CCP33**

On pose $f(0, 0) = 0$ et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
4. La fonction f est-elle différentiable au point O ?

Exercice 29**rms128-718**

On pose $H(0, 0) = 0$ et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad H(x, y) = \frac{x^4 y}{x^4 + y^2}.$$

1. Démontrer que H est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. L'application H est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 30**rms130-920**

Soit $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$$

pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{y} \sqrt{x^3 + y^3}.$$

Exercice 31**rms130-981**

Soient U , un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et f , une application de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$.

Démontrer que f est convexe sur U si, et seulement si,

$$\forall a, b \in U, \quad f(b) \geq f(a) + \langle \nabla f(a) | b - a \rangle.$$

Exercice 32**rms130-1038**

On note S_C , l'ensemble des fonctions f à valeurs réelles, continues sur le fermé $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$\forall (t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + f(t, x) \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = 0. \quad (S)$$

On considère une fonction $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et croissante.

1. Soient $t \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}$. Démontrer qu'il existe un, et un seul, réel $a(t, x)$ tel que

$$x = a(t, x) + tu(a(t, x)).$$

On admettra que la fonction

$$[(t, x) \mapsto a(t, x)]$$

est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad f(t, x) = u(a(t, x)).$$

2.a. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(0, x) = f(x).$$

2.b. Démontrer que $f \in S_C$.

Exercice 33**rms130-1176**

On définit une application $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en posant $f(1, 1) = 0$ et

$$\forall (x, y) \neq (1, 1), \quad f(x, y) = \frac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy}.$$

1. Démontrer que f est continue.
2. Déterminer le maximum de f .

Exercice 34**rms132-642**

Démontrer qu'une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ est une solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\forall M = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2xy \frac{\partial f}{\partial x}(M) + (1 + y^2) \frac{\partial f}{\partial y}(M) = 0$$

si, et seulement si, il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = g\left(\frac{x}{1 + y^2}\right).$$

Exercice 35**rms132-1165**

On cherche à résoudre l'équation

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt \quad (E)$$

où l'inconnue f est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + cy = 0.$$

(On discutera sur $c \in \mathbb{R}$.)

2. Soit f , une solution de (E) autre que la fonction identiquement nulle. On pose

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt.$$

Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et que

$$\forall M \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(M) - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(M) = 0.$$

3. Soit f , une solution de (E). Calculer $f(0)$ et

$$f''(x)f(y) - f(x)f''(y).$$

4. En déduire les solutions de (E).

Solution 1

16-01

✎ Notations et préliminaires topologiques

On note comme d'habitude $O = (0, 0)$ l'origine du plan; on pose

$$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad V = [x \neq 0] \cap [y \neq 0].$$

Tout ensemble fini est fermé, donc la partie U est un ouvert (en tant que complémentaire d'une partie fermée).

Les ensembles $[x \neq 0]$ et $[y \neq 0]$ sont ouverts puisque ce sont les images réciproques respectives de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par les applications continues (polynomiales!)

$$[(x, y) \mapsto x] \quad \text{et} \quad [(x, y) \mapsto y].$$

La partie V est donc ouverte en tant qu'intersection de deux ouverts.

Il est clair que la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{xy}{|x| + |y|}$$

est définie sur U .

✎ Régularité de f sur l'ouvert V

On sait que les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et que les applications $[t \mapsto |t|]$ et $[t \mapsto 1/t]$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

Les composées

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x \longmapsto |x| \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & y \longmapsto |y| \end{array}$$

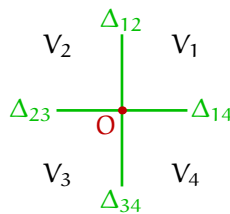
sont donc de classe $\mathcal{C}^\infty$. La somme de deux applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur V est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur V . Par conséquent, la composée

$$\begin{array}{ccccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & |x| + |y| & \longmapsto & \frac{1}{|x| + |y|} \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur V .

La fonction (polynomiale) $[(x, y) \mapsto xy]$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur V . Par produit, la fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur V .

✎ L'ouvert V est l'union de quatre quarts de plan ouverts V_1, V_2, V_3 et V_4 sur lesquels on peut calculer les dérivées partielles de f .



► Pour tout point $M = (x, y) \in V_1$,

$$f(M) = \frac{xy}{x + y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{y^2}{(x + y)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{x^2}{(x + y)^2}.$$

► Pour tout point $M = (x, y) \in V_2$,

$$f(M) = \frac{xy}{-x + y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{y^2}{(x - y)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{-x^2}{(x - y)^2}.$$

► Pour tout point $M = (x, y) \in V_3$,

$$f(M) = \frac{-xy}{x + y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{-y^2}{(x + y)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{-x^2}{(x + y)^2}.$$

► Pour tout point $M = (x, y) \in V_4$,

$$f(M) = \frac{xy}{x-y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{-y^2}{(x-y)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{x^2}{(x-y)^2}.$$

🔗 Il faut penser à utiliser les symétries de f pour éviter de faire plusieurs fois le même calcul ou presque !

✦ Régularité de f sur l'ouvert U

La fonction $[t \mapsto |t|]$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Les composées

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x \longmapsto |x| \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & y \longmapsto |y| \end{array}$$

sont donc continues. La somme de deux applications de classe continues sur U est continue sur U . Par conséquent, la composée

$$\begin{array}{ccccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & |x| + |y| & \longmapsto & \frac{1}{|x| + |y|} \end{array}$$

est continue sur U .

La fonction (polynomiale) $[(x, y) \mapsto xy]$ est continue sur U . Par produit, la fonction f est donc continue sur U .

🔗 Deux problèmes se posent donc.

— Peut-on prolonger la fonction f , qui est continue sur U , en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier ?

— La fonction f , qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V , est-elle aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U (qui contient l'ouvert V) ?

✦ Prolongement par continuité

On prolonge la fonction f à $\mathbb{R}^2$ en posant $f(O) = 0$.

🔗 On choisit cette valeur après avoir fait les calculs qui suivent, on ne la choisit surtout pas par hasard !

🔗 Pour justifier la continuité de f au point O , il faut définir une norme sur $\mathbb{R}^2$. Peu importe laquelle : sur $\mathbb{R}^2$, espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, donc le choix de la norme n'aura aucune conséquence sur la continuité du prolongement. Il s'agit de choisir la norme qui rendra les calculs aussi commodes que possible.

On choisit de munir l'espace $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne canonique. Autrement dit, on passe en coordonnées polaires : pour tout point $M \neq O$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$M = (r \cos \theta, r \sin \theta) \quad \text{où} \quad r = \|OM\|.$$

On en déduit que

$$\forall M \neq O, \quad |f(M) - f(O)| = r \cdot \frac{|\cos \theta \sin \theta|}{|\cos \theta| + |\sin \theta|} \leq \frac{r}{m_0} = \frac{\|OM\|}{m_0}$$

où on a posé

$$m_0 = \min_{0 \leq \theta \leq \pi/2} |\cos \theta| + |\sin \theta| > 0.$$

En effet, la fonction $[\theta \mapsto |\cos \theta| + |\sin \theta|]$ est strictement positive (le sinus et le cosinus ne peuvent pas s'annuler simultanément), continue et $\pi/2$ -périodique, donc elle atteint un minimum m_0 strictement positif (puisque la fonction ne prend que des valeurs strictement positives).

L'encadrement ainsi obtenu prouve que

$$\lim_{\|OM\| \rightarrow 0} f(M) = f(O)$$

et donc que la fonction f , telle que nous l'avons prolongée, est continue au point O .

La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

🔗 Toute fonction différentiable est continue, mais toute fonction continue n'est pas différentiable.

Il est donc naturel de se demander si ce prolongement de f , qui est continu au point O , est aussi différentiable au point O .

✦ Différentiabilité à l'origine

🔗 Par définition, la fonction f est différentiable au point O si, et seulement si, elle admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de O .

On sait de plus que le seul développement limité possible est de la forme

$$f(\mathbf{O} + \mathbf{h}) \underset{\mathbf{h}=(x,y) \rightarrow 0}{=} f(\mathbf{O}) + x \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{O}) + y \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{O}) + o(\|\mathbf{h}\|).$$

Nous allons donc d'abord calculer les dérivées partielles avant de vérifier si nous avons bien un développement limité à l'ordre 1.

Pour tout $t \neq 0$,

$$\frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0$$

donc les deux dérivées partielles de f sont définies en $\mathbf{O}$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{O}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{O}) = 0.$$

Comme $f(\mathbf{O}) = 0$, il reste donc à vérifier si

$$f(\mathbf{O} + \mathbf{h}) \underset{\mathbf{h} \rightarrow 0}{=} o(\|\mathbf{h}\|).$$

✎ Comme pour la continuité, le calcul sur les ordres de grandeur impose de choisir une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Nous conservons la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^2$ pour calculer en coordonnées polaires. Comme on l'a déjà vu,

$$f(\mathbf{O} + \mathbf{h}) = r \cdot \frac{|\cos \theta \sin \theta|}{|\cos \theta| + |\sin \theta|}$$

et comme le facteur de $r = \|\mathbf{h}\|$ est indépendant de r , il ne peut pas tendre vers 0 lorsque r tend vers 0. Par conséquent,

$$f(\mathbf{O} + \mathbf{h}) \underset{\mathbf{h} \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(\mathbf{h}) \quad \text{mais} \quad f(\mathbf{O} + \mathbf{h}) \underset{\mathbf{h} \rightarrow 0}{\neq} o(\mathbf{h}).$$

Par conséquent, la fonction f n'est pas différentiable au point $\mathbf{O}$.

✎ Variante

On peut aussi raisonner par l'absurde.

Supposons que f soit différentiable au point $\mathbf{O}$. Alors l'application linéaire tangente $df(\mathbf{O})$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ et cette forme linéaire est alors caractérisée par l'image de la base canonique $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$:

$$df(\mathbf{O})(\mathbf{e}_1) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{O}) = 0, \quad df(\mathbf{O})(\mathbf{e}_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{O}) = 0.$$

Par conséquent, la forme linéaire $df(\mathbf{O})$ est identiquement nulle.

Considérons maintenant le vecteur $\mathbf{u} = (1, 1)$. On sait que la dérivée de f au point $\mathbf{O}$ suivant $\mathbf{u}$ peut se déduire de l'application linéaire tangente :

$$D_{\mathbf{u}}(f)(\mathbf{O}) = df(\mathbf{O})(\mathbf{u}) = 0$$

(puisque l'application linéaire tangente est identiquement nulle).

Mais si on revient à la définition de la dérivée suivant $\mathbf{u}$, on obtient

$$D_{\mathbf{u}}(f)(\mathbf{O}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{O} + t \cdot \mathbf{u}) - f(\mathbf{O})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2|t|},$$

ce qui est absurde (la limite à gauche diffère de la limite à droite).

Par conséquent, l'application f n'est pas différentiable au point $\mathbf{O}$.

♣ Différentiabilité sur $\mathcal{U}$

🔗 Pour démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$, il nous suffit d'étudier f sur les quatre demi-axes ouverts de coordonnées (on sait déjà que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{V}$).

Dans ce but, nous allons bien entendu appliquer le Théorème fondamental :

- dans un premier temps, nous allons vérifier que les dérivées partielles de f sont bien définies en chaque point M_0 de $\mathcal{V}$;
- ensuite, nous allons vérifier que les dérivées partielles de f sont continues en chaque point M_0 de $\mathcal{V}$.

Le premier point est très facile, il ne demande que de revenir à la définition des dérivées partielles.

Le second point est plus délicat et il impose une fois de plus de choisir une norme sur $\mathbb{R}^2$ pour étudier la limite.

♣ Nous noterons Δ_{14} (resp. Δ_{12} , resp. Δ_{23} , resp. Δ_{34}), la demi-droite ouverte qui sépare les quarts de plan V_1 et V_4 (resp. V_1 et V_2 , resp. V_2 et V_3 , resp. V_3 et V_4).

Il s'agit de vérifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$, sachant qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{V}$, et donc d'étudier f au voisinage des points M_0 appartenant à l'une de ces quatre demi-droites Δ_{ij} .

♣ La fonction f admet deux dérivées partielles en chacun de ces points.

► Si $M_0 \in \Delta_{14} \cup \Delta_{23}$, alors $M_0 = (x_0, 0)$ avec $x_0 \neq 0$ et, pour tout $t \neq 0$ assez petit,

$$\begin{aligned} \frac{f(M_0 + t \cdot \mathbf{e}_1) - f(M_0)}{t} &= \frac{f(x_0 + t, 0) - f(x_0, 0)}{t} = 0, \\ \frac{f(M_0 + t \cdot \mathbf{e}_2) - f(M_0)}{t} &= \frac{f(x_0, t) - f(x_0, 0)}{t} = \frac{x_0}{x_0 + |t|}. \end{aligned}$$

En faisant tendre t vers 0, on en déduit que les dérivées partielles sont définies et que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 1.$$

► Si $M_0 \in \Delta_{12} \cup \Delta_{34}$, alors $M_0 = (0, y_0)$ avec $y_0 \neq 0$ et, pour tout $t \neq 0$ assez petit,

$$\begin{aligned} \frac{f(M_0 + t \cdot \mathbf{e}_1) - f(M_0)}{t} &= \frac{f(t, y_0) - f(0, y_0)}{t} = \frac{y_0}{|t| + y_0}, \\ \frac{f(M_0 + t \cdot \mathbf{e}_2) - f(M_0)}{t} &= \frac{f(0, y_0 + t) - f(0, y_0)}{t} = 0. \end{aligned}$$

En faisant tendre t vers 0, on en déduit que les dérivées partielles sont définies et que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0.$$

♣ Il reste à démontrer que les deux dérivées partielles de f sont continues en chaque point M_0 considéré.

Pour éviter de faire plusieurs fois presque la même chose, nous allons nous restreindre aux points $M_0 \in \Delta_{14}$, de coordonnées $(x_0, 0)$ avec $x_0 > 0$.

Pour étudier la continuité, nous allons choisir la norme produit (la norme euclidienne canonique n'est pas plus simple).

À ce sujet, on rappelle que, pour tout point $M = (x, y)$, le vecteur $\mathbf{h} = \mathbf{M}_0\mathbf{M}$ est en fait égal à $(x - x_0, y)$. Par conséquent, la norme produit de ce vecteur est définie par

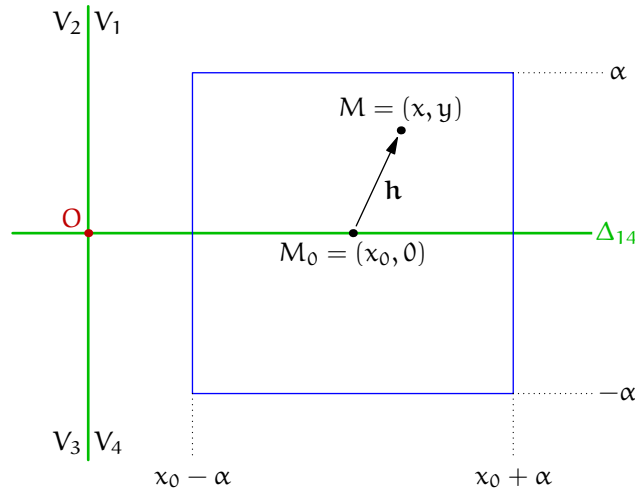
$$\|\mathbf{M}_0\mathbf{M}\| = \max\{|x - x_0|, |y|\}$$

et nous utiliserons les deux encadrements suivants.

$$|x - x_0| \leq \|\mathbf{M}_0\mathbf{M}\| \quad |y| \leq \|\mathbf{M}_0\mathbf{M}\|$$

♣ Puisqu'il s'agit d'étudier f au voisinage du point M_0 , nous allons choisir un réel $\alpha > 0$ tel que $0 < \alpha < x_0$ et nous restreindre aux points $M = (x, y)$ tels que $\|\mathbf{M}_0\mathbf{M}\| \leq \alpha$.

Il s'agit des points M situés à l'intérieur du carré bleu sur la figure ci-dessous. On constate qu'il faudra distinguer trois cas : $M \in V_1$ (c'est-à-dire $y > 0$); $M \in \Delta_{12}$ (c'est-à-dire $y = 0$) et $M \in V_4$ (c'est-à-dire $y < 0$).



✱ Étudions la continuité de la première dérivée partielle.

► Pour $M = (x, y) \in V_1$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(M) - \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \right| = \frac{y^2}{(x+y)^2} \leq \frac{\|M_0 M\|^2}{(x_0 - \alpha)^2}$$

puisque $0 < x_0 - \alpha \leq x + y$ (car $0 < x_0 - \alpha \leq x$ et $y > 0$).

► Pour $M = (x, y) \in V_4$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(M) - \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \right| = \frac{y^2}{(x-y)^2} \leq \frac{\|M_0 M\|^2}{(x_0 - \alpha)^2}$$

puisque $0 < x_0 - \alpha \leq x - y$ (car $0 < x_0 - \alpha \leq x$ et $y < 0$).

► Pour $M = (x, 0) \in \Delta_{14}$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(M) - \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \right| = 0.$$

Bref : pour tout point M tel que $\|M_0 M\| \leq \alpha$ avec $0 < \alpha < x_0$, on a démontré que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(M) - \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \right| \leq \frac{\|M_0 M\|^2}{(x_0 - \alpha)^2}.$$

Lorsque le point M tend vers le point M_0 , le numérateur tend vers 0 et le dénominateur reste constant. Par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)$$

et donc que la première dérivée partielle est continue au point M_0 .

✱ On reprend la même démarche pour la seconde dérivée partielle.

► Pour $M = (x, y) \in V_1$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(M) - \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \right| = \frac{|2xy + y^2|}{(x+y)^2} \leq \frac{[2(x_0 + \alpha) + \alpha] \cdot \|M_0 M\|}{(x_0 - \alpha)^2}$$

puisque $0 < x \leq x_0 + \alpha$, $0 < y \leq \alpha$ et $0 < x_0 - \alpha \leq x + y$ (comme plus haut).

► Pour $M = (x, y) \in V_4$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(M) - \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \right| = \frac{|2xy - y^2|}{(x-y)^2} \leq \frac{[2(x_0 + \alpha) + \alpha] \cdot \|M_0 M\|}{(x_0 - \alpha)^2}$$

puisque $0 < x \leq x_0 + \alpha$, $0 < |y| \leq \alpha$ et $0 < x_0 - \alpha \leq x - y$.

► Pour $M = (x, 0) \in \Delta_{14}$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(M) - \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \right| = 0.$$

À nouveau, pour tout point M tel que $\|M_0 M\| \leq \alpha$ avec $0 < \alpha < x_0$, on a démontré que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(M) - \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \right| \leq \frac{2x_0 + 3\alpha}{(x_0 - \alpha)^2} \cdot \|M_0 M\|.$$

Le premier facteur est indépendant de M . On en déduit par encadrement que

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)$$

et donc que la seconde dérivée partielle est continue au point M_0 .

- ♣ D'après le Théorème fondamental, la fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ en chaque point de la demi-droite Δ_{14} .
- ♣ En répétant la démarche sur les trois autres demi-droites, on peut conclure : la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U .

Solution 2

16-02

🔗 On sait, après avoir traité différents exemples, qu'on peut résoudre ces EDP à l'aide d'un changement de variables linéaire. Comment choisir un changement de variables convenable ? Quelles différences voit-on apparaître entre deux changements de variables ?

1. ♣ L'EDP (H) nous dit que le gradient d'une solution est constamment orthogonal au vecteur $(1, -2)$. Le gradient de f en un point M quelconque est donc proportionnel au vecteur $(2, 1)$, c'est-à-dire au gradient de la forme linéaire

$$\varphi = [(x, y) \mapsto 2x + y].$$

On devine ainsi que la fonction f est constante sur les droites affines d'équation

$$[2x + y = C]$$

et qu'il est donc intéressant de poser $u = 2x + y$.

- ♣ Considérons le changement de variables linéaire $(u, v) = \Phi(x, y)$ défini par

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_J \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La matrice J est (clairement) inversible, ce qui prouve que Φ est bien un changement de variables et la matrice inverse

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

nous donne les variables x et y en fonction de u et v :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u - 2v \end{pmatrix}. \quad (\clubsuit)$$

- ♣ On pose

$$\forall M \in \Omega, \quad f(M) = g(\Phi(M)).$$

Comme l'application Φ réalise une bijection de Ω sur Ω , qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et que sa réciproque est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω , on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω si, et seulement si, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω :

$$\forall N \in \Omega, \quad g(N) = f(\Phi^{-1}(N)).$$

- ♣ D'après la règle de la chaîne,

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} - 2 \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Plus précisément,

$$\forall M \in \Omega, \quad \frac{\partial g}{\partial v}(\Phi(M)) = \frac{\partial f}{\partial x}(M) - 2 \frac{\partial f}{\partial y}(M) \quad (\spadesuit)$$

et comme Φ réalise une bijection de Ω sur Ω , on en déduit que la fonction f est une solution de l'EDP (H) si, et seulement si, la fonction g est une solution de l'EDP (H') :

$$\forall N = (u, v) \in \Omega, \quad \frac{\partial g}{\partial v}(N) = 0. \quad (H')$$

- ♣ Le cours nous donne les solutions de (H') : une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω est solution de (H') si, et seulement si, il existe une fonction G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (u, v) \in \Omega, \quad g(u, v) = G(u).$$

Par conséquent, une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω est solution de (H) si, et seulement si, il existe une fonction G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad f(x, y) = g(\Phi(x, y)) = G(u(x, y)) = G(2x + y).$$

2. D'après la règle de la chaîne (♠) et le changement de variables (♣), la fonction f est une solution de (E) si, et seulement si, la fonction $g = f \circ \Phi^{-1}$ est une solution de (E') :

$$\forall N = (u, v) \in \Omega, \quad \frac{\partial g}{\partial v}(N) = u - 2v. \quad (E')$$

D'après le cours, une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω est une solution de l'EDP (E') si, et seulement si, il existe une fonction G_1 de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (u, v) \in \Omega, \quad g(u, v) = uv - v^2 + G_1(u)$$

où on reconnaît la superposition d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène (H).

On en déduit qu'une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω est une solution de (E) si, et seulement si, il existe une fonction $G_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad f(x, y) = (x + y) \cdot x + G_1(2x + y).$$

♣ Variante : Autre changement de variables

Considérons maintenant le changement de variables linéaire $(s, t) = \Psi(x, y)$ défini par

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette fois,

$$J^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Psi^{-1} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (s-t)/2 \\ t \end{pmatrix}.$$

♣ On pose maintenant $f(x, y) = h(\Psi(x, y))$: comme plus haut, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω si, et seulement si, la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et, d'après la règle de la chaîne,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{-1}{2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} - 2 \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

On en déduit que la fonction f est solution de (E) si, et seulement si, la fonction h est solution de

$$\forall P = (s, t) \in \Omega, \quad -2 \cdot \frac{\partial h}{\partial t}(P) = y(s, t) = t$$

c'est-à-dire solution de (E'') :

$$\forall P = (s, t) \in \Omega, \quad \frac{\partial h}{\partial t}(P) = \frac{-t}{2}. \quad (E'')$$

Comme plus haut, la fonction $h \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ est solution de l'EDP (E'') si, et seulement si, il existe une fonction $G_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (s, t) \in \Omega, \quad h(s, t) = \frac{-t^2}{4} + G_2(s).$$

On en déduit que $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ est solution de (E) si, et seulement si, il existe une fonction $G_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad f(x, y) = \frac{-y^2}{4} + G_2(2x + y).$$

♣ Les solutions de (E) trouvées avec ces deux changements de variables ne diffèrent qu'en apparence !

En effet, pour tout $(x, y) \in \Omega$,

$$(x + y) \cdot x = \frac{-y^2}{4} + \frac{(2x + y)^2}{4}$$

donc

$$(x + y) \cdot x + G_1(2x + y) = \frac{-y^2}{4} + \left[\frac{(2x + y)^2}{4} + G_1(2x + y) \right]$$

et par conséquent les fonctions G_1 et G_2 sont liées par la relation suivante :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad G_2(z) = G_1(z) + \frac{z^2}{4}.$$

Solution 3**16-03**

1. Si on fixe y , on se retrouve avec la composée de

$$x \mapsto g(x, y)$$

par

$$z \mapsto F(z).$$

Il s'agit donc de la composée de deux fonctions d'une variable réelle et il suffit d'appliquer la règle de dérivation des fonctions composées : la règle de la chaîne est ici hors sujet.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \frac{df}{dz}[g(x, y)] \times \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \\ &= \cos[3x - 4y] \times 3 = 3 \cos(3x - 4y). \end{aligned}$$

► Même chose en fixant x ...

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \frac{df}{dz}[g(x, y)] \times \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \\ &= \cos[3x - 4y] \times (-4) = -4 \cos(3x - 4y). \end{aligned}$$

► On retrouve (heureusement !) ces résultats en explicitant la fonction F et en dérivant directement (= sans faire apparaître f et g) :

$$F(x, y) = \sin(3x - 4y).$$

🔗 Quand on maîtrise vraiment le fonctionnement de la règle de la chaîne, on peut sous-entendre le point où les dérivées partielles sont évaluées. Dans un délai raisonnable, vous écrirez donc

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{df}{dz}[g(x, y)] \times \frac{\partial g}{\partial x}(x, y).$$

Pour le moment, privilégiez encore la sécurité à la vitesse d'exécution !

🔗 Savez-vous démontrer rapidement que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

2. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial u}(g(x, y), h(x, y)) \times \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}(g(x, y), h(x, y)) \times \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \\ &= 1 \times (2xy) + (-1) \times y^2 = (2x - y)y \end{aligned}$$

puisque $u(x, y) = yx^2$ et $v(x, y) = y^2x$.

De même,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial u}(g(x, y), h(x, y)) \times \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}(g(x, y), h(x, y)) \times \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \\ &= 1 \times (x^2) + (-1) \times (2xy) = (x - 2y)x. \end{aligned}$$

🔗 Les dérivées partielles de f étant constantes, il serait très agréable de pouvoir se contenter d'écrire

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

pour s'épargner de la peine. C'est possible à condition de bien maîtriser son outil !

🔗 Ici encore, on peut retrouver ces résultats sans passer par la règle de la chaîne, en partant directement de l'expression simplifiée de $F(x, y)$.

$$F(x, y) = x^2y - xy^2 = xy(x - y).$$

🔗 Savez-vous démontrer rapidement que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Solution 4

16-04

On voit ici des calculs assez simples, parce que la situation physique est elle-même très simple : on sait, grâce à une propriété de symétrie, que les quantités étudiées ne dépendent du vecteur position $(x_1, \dots, x_n)$ que par l'intermédiaire d'une fonction $u(u_1, \dots, u_n)$ — par exemple que les quantités sont radiales et sont donc représentées mathématiquement par $g(r)$.

C'est bien d'une composition de fonctions qu'il s'agit :

$$f(x_1, \dots, x_n) = (g \circ u)(x_1, \dots, x_n).$$

Mais ce n'est pas un changement de variables (on n'a pas le même nombre de paramètres pour calculer f et g), c'est beaucoup plus simple.

1. Comme g et u sont de classe $\mathcal{C}^2$, la fonction composée $f = g \circ u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$.

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{u=u(x_1, \dots, x_n)} \mathbb{R} \xrightarrow{g=g(u)} \mathbb{R}$$

On suppose que l'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa norme euclidienne canonique, pour laquelle la base canonique est une base orthonormée. Dans cette base, les coordonnées du gradient de u sont égales à

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial u}{\partial x_n}$$

et comme cette base est orthonormée

$$\|\nabla u\|^2 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2.$$

D'après la règle de la chaîne,

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{dg}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k}.$$

Comme g est une fonction d'une seule variable, on peut remplacer les ∂ par des d .

Pour calculer la dérivée partielle seconde, on applique la formule précédente à elle-même. Pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{dg}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{dg}{du} \right) \right] \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} + \frac{dg}{du} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} && \text{(dérivée d'un produit)} \\ &= \left[\frac{d}{du} \left(\frac{dg}{du} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} \right] \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} + \frac{dg}{du} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} && \text{(Fle du 1er ordre)} \\ &= \frac{d^2 g}{du^2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{dg}{du} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \end{aligned}$$

et en sommant sur $1 \leq k \leq n$:

$$\Delta f = \frac{d^2 g}{du^2} \cdot \|\nabla u\|^2 + \frac{dg}{du} \cdot \Delta u.$$

Cette égalité doit être comprise comme une égalité entre fonctions des variables $x_1, \dots, x_n$ (car f et u sont des fonctions de $x_1, \dots, x_n$). On peut alourdir la formule pour la rendre plus explicite :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \Delta f(\mathbf{x}) = g''(u(\mathbf{x})) \cdot \|\nabla u(\mathbf{x})\|^2 + g'(u(\mathbf{x})) \cdot \Delta u(\mathbf{x})$$

en notant $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ pour que la formule reste lisible !

2. a. On rappelle l'astuce usuelle du calcul radial. Comme $u^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$, alors

$$\frac{\partial u^2}{\partial x_k} = 2u \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} = 2x_k \quad \text{et donc} \quad \frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{x_k}{u}.$$

On en déduit en particulier que

$$\|\nabla u\|^2 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 = \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{u^2} = \frac{u^2}{u^2} = 1.$$

✎ On calcule ici dans la base canonique, qui est orthonormée pour le produit scalaire canonique.

✎ Pour tout $1 \leq k \leq n$, on peut dériver cette expression comme un *produit* de deux fonctions de x_k :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} &= \frac{\partial x_k}{\partial x_k} \cdot \frac{1}{u} + x_k \cdot \frac{\partial [1/u]}{\partial x_k} && \text{(dérivée du produit)} \\ &= 1 \cdot \frac{1}{u} + x_k \cdot \frac{-1}{u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} && \text{(dérivée de l'inverse)} \\ &= \frac{1}{u} - \frac{x_k^2}{u^3}. \end{aligned}$$

✎ On rappelle que u est une fonction de $x_1, \dots, x_n$.

✎ En sommant sur $1 \leq k \leq n$, on obtient

$$\Delta u = \frac{n}{u} - \frac{1}{u^3} \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 = \frac{n}{u} - \frac{u^2}{u^3} = \frac{n-1}{u}.$$

2. b. D'après la relation générale établie à la première question,

$$\forall x \in \Omega, \quad \Delta f(x) = g''(u(x)) \cdot 1 + g'(u(x)) \cdot \frac{n-1}{u(x)}.$$

✎ La fonction $u = u(x_1, \dots, x_n)$ est une application de Ω dans $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent, si

$$\forall r > 0, \quad g''(r) + \frac{n-1}{r} \cdot g'(r) = 0,$$

alors en particulier

$$\forall x \in \Omega, \quad g''(u(x)) \cdot 1 + g'(u(x)) \cdot \frac{n-1}{u(x)} = 0$$

et $\Delta f(x) = 0$.

✎ Réciproquement, la fonction $u = u(x_1, \dots, x_n)$ est clairement surjective sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, pour tout $r > 0$, il existe (au moins) un $x \in \Omega$ tel que $r = u(x)$ et si $\Delta f(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$, alors

$$\forall r > 0, \exists x \in \Omega, \quad \begin{cases} r = u(x) \\ g''(u(x)) \cdot 1 + g'(u(x)) \cdot \frac{n-1}{u(x)} = 0 \end{cases}$$

et donc

$$\forall r > 0, \quad g''(r) + \frac{n-1}{r} \cdot g'(r) = 0.$$

✎ Une fois de plus, j'ai détaillé exagérément les calculs pour distinguer les deux moments de l'équivalence et en particulier mettre en valeur la propriété de **surjectivité** de la fonction u , qui est essentielle pour conclure ici.

2. c. Soit f , une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et harmonique radiale sur Ω . On **admet** qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*)$ telle que

$$\forall x \in \Omega, \quad f(x) = g(u(x)).$$

✎ Ceux qui refusent d'admettre une telle propriété n'auront qu'à la prendre pour définition des fonctions harmoniques radiales.

✎ D'après la question précédente, cette fonction g est une solution de l'équation différentielle

$$\forall r > 0, \quad g''(r) + \frac{n-1}{r} \cdot g'(r) = 0.$$

On remarque qu'il s'agit ici d'une équation différentielle linéaire, homogène, du premier ordre en $g'(r)$. On en déduit qu'il existe une constante K telle que

$$\forall r > 0, \quad g'(r) = \frac{K}{r^{n-1}}$$

et donc qu'il existe deux constantes $a = \frac{K}{2-n}$ et b telles que

$$\forall r > 0, \quad g(r) = \frac{a}{r^{n-2}} + b$$

et donc telles que

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad f(\mathbf{x}) = \frac{a}{\|\mathbf{x}\|^{n-2}} + b.$$

✎ En particulier, si une fonction harmonique et radiale est bornée sur Ω , alors $a = 0$ et cette fonction est nécessairement constante.

Solution 5

16-05

1.

✎ On utilise ici un changement de variables non linéaire. Comme on doit s'y attendre en pareil cas, il n'est pas simple de justifier la bijectivité de φ et encore moins simple d'exprimer la réciproque φ^{-1} .

Posons $\varphi(u, v) = (u + v, uv)$ pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Il est clair que $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$, car ses deux composantes :

$$x = [(u, v) \mapsto u + v] \quad \text{et} \quad y = [(u, v) \mapsto uv]$$

sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ (polynomiales).

✎ Comme $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ par hypothèse, on en déduit que la composée

$$g : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\varphi \in \mathcal{C}^\infty} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f \in \mathcal{C}^2} \mathbb{R}$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

✎ Avant d'aller plus loin, étudions φ pour voir s'il s'agit bien d'un changement de variables.

► Tout d'abord, φ n'est pas injectif ! En effet, $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$ pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

On pourrait se restreindre au demi-plan $[u \geq v]$, mais ce demi-plan n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$. En effet, ce demi-plan contient l'origine mais n'est pas un voisinage de l'origine (faites une figure !).

Nous allons donc nous restreindre au demi-plan $U = [u > v]$, qui est bien un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (faites une figure !).

► Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Il existe $(u, v) \in U$ tel que $\varphi(u, v) = (x, y)$ si, et seulement si, u et v sont les racines du polynôme $X^2 - xX + y$ (cf. relations entre coefficients et racines d'un polynôme).

Dans U , il faut que $u > v$ et donc que les racines du polynôme soient réelles et distinctes. Il faut donc que son discriminant : $x^2 - 4y$ soit strictement positif.

Réciproquement, si $x^2 - 4y > 0$, alors le polynôme $X^2 - xX + y$ admet deux racines réelles u et v et si on impose $u > v$, alors le couple (u, v) est unique.

► On vient ainsi de démontrer que φ réalise une bijection de l'ouvert U sur l'ouvert

$$\Omega = [x^2 - 4y > 0].$$

✎ Faites une figure pour démontrer que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$!

▷ Par ailleurs,

$$u(x, y) = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4y}}{2} \quad \text{et} \quad v(x, y) = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4y}}{2}$$

mais, fort heureusement, nous n'utiliserons pas ces formules...

2.

✎ Il nous reste à relier l'EDP $\Delta g = 0$ à l'EDP en f et pour cela il faut exprimer les dérivées partielles secondes d'une des fonctions à l'aide des dérivées partielles de l'autre. Mais dans quel sens procéder ?

✎ D'après l'expression de φ ,

$$\forall (u, v) \in U, \quad \text{Jac } \varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v & u \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Avec les formules de Cramer, on en déduit que

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \Omega, \quad \text{Jac}(\varphi^{-1})(x, y) &= [\text{Jac } \varphi(u(x, y), v(x, y))]^{-1} \\ &= \frac{1}{u-v} \begin{pmatrix} u & -1 \\ -v & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

Bien entendu, dans cette expression, il faut comprendre que u et v sont des **fonctions** de x et y (puisque le membre de gauche est lui-même une fonction de x et y) et non pas des variables comme dans la jacobienne de φ .

Plus précisément,

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad (u, v) = (u(x, y), v(x, y)) = (\varphi^{-1})(x, y).$$

▮ *Même si l'expression de $\varphi^{-1}(x, y)$ est compliquée (voire impossible à formuler), on peut facilement calculer la jacobienne de φ^{-1} : il suffit d'inverser la jacobienne de φ .*

♣ Appliquons la règle de la chaîne en tenant compte de la jacobienne (1) de φ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} + u \cdot \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

Avant de continuer, il faut bien comprendre le sens exact de ces deux relations. La première signifie :

$$\forall (u, v) \in \mathcal{U}, \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v)) + v \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v))$$

et la signification de la seconde est analogue.

♣ On en déduit les dérivées partielles secondes de g . Comme f est supposée de classe $\mathcal{C}^2$, on peut simplifier les dérivées partielles secondes croisées avec le Théorème de Schwarz.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right\} + v \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right\} \\ &= \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + v \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right\} + v \cdot \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + v \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right\} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2v \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + v^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (\text{par (2)})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + u \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right\} + u \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + u \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right\} \\ &= \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + u \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right\} + u \cdot \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + u \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right\} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2u \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + u^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (\text{par (2) aussi})$$

♣ On peut alors calculer le laplacien de g .

$$\Delta g = 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2(u+v) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (u^2 + v^2) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Une fois encore, il faut faire apparaître le changement de variables φ pour expliciter le sens de cette égalité (c'est une égalité entre fonctions de u et v).

$$\begin{aligned} \forall (u, v) \in \mathcal{U}, \quad \Delta g(u, v) &= 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\varphi(u, v)) + 2(u+v) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\varphi(u, v)) \\ &\quad + (u^2 + v^2) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\varphi(u, v)) \end{aligned}$$

♣ Tenons maintenant compte de l'hypothèse d'harmonicité pour g .

Comme φ réalise une **bijection** de U sur Ω , on en déduit que

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2[u(x, y) + v(x, y)] \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + [u^2(x, y) + v^2(x, y)] \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Par définition de φ^{-1} , on a

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \begin{cases} u(x, y) + v(x, y) = x \\ u^2(x, y) + v^2(x, y) = [u(x, y) + v(x, y)]^2 - 2u(x, y)v(x, y) \\ \quad = x^2 - 2y. \end{cases}$$

Par conséquent, la fonction f vérifie l'équation

$$2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2x \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (x^2 - 2y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

sur l'ouvert Ω .

Solution 6

16-06

Les applications

$$[(x, y) \mapsto x], \quad [(x, y) \mapsto x^2 + y^2] \quad \text{et} \quad [(x, y) \mapsto x^2 - y^2]$$

sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonctions *polynomiales*.

En tant que composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^2 + y^2 \longmapsto \ln(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$.

🔵 Toute partie finie est fermée, donc U est un ouvert (en tant que complémentaire d'un fermé).

En tant que produit d'applications de classe $\mathcal{C}^\infty$, l'application f est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert U .

🔵 L'énoncé définit la fonction f sur $\mathbb{R}^2$ tout entier : est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ ou seulement sur U ?

♣ Pour $M = (x, y) \neq O$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = 2x \left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \ln(x^2 + y^2) \right], \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = 2y \left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \ln(x^2 + y^2) \right].$$

Pour $M = O$, on a

$$\frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = h \ln h^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = -h \ln h^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(O) = \frac{\partial f}{\partial y}(O) = 0.$$

Ainsi, les dérivées partielles de f sont définies sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

♣ On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique.

🔵 Autrement dit : on passe en coordonnées polaires. De la sorte, le point M tend vers l'origine O si, et seulement si, le réel $r = \|\mathbf{OM}\|$ tend vers 0.

D'après les expressions des dérivées partielles de f calculées plus haut,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(M) - \frac{\partial f}{\partial x}(O) \right| = 2r |\cos \theta| |2 \ln r + \cos 2\theta| \leq 2r + 4r |\ln r|$$

et de même

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(M) - \frac{\partial f}{\partial y}(O) \right| \leq 2r + 4r |\ln r|.$$

On a trouvé un majorant *indépendant de* θ et qui tend vers 0 lorsque r tend vers 0, donc on a démontré que les deux dérivées partielles de f étaient continues en 0.

Ainsi, les dérivées partielles de f sont définies et continues sur $\mathbb{R}^2$ tout entier, donc la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ tout entier (théorème fondamental).

☞ Si on sait bien appliquer la règle de la chaîne, on peut se contenter de ne calculer qu'une seule des deux dérivées partielles de f . Pour exploiter la forme de symétrie de f , on considère l'application linéaire φ définie par

$$\varphi(x, y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)) = (y, x).$$

On sait alors que

$$\partial_2 \varphi_1(x, y) = \frac{\partial y}{\partial y} = 1, \quad \partial_2 \varphi_2(x, y) = \frac{\partial x}{\partial y} = 0$$

et que

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = -(f \circ \varphi)(x, y).$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U (démontré plus haut) et que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de U dans U (en tant qu'application linéaire injective définie sur un espace de dimension finie), on en déduit que la composée $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et que, pour tout $M = (x, y) \in U$,

$$\begin{aligned} \partial_2 f(M) &= -\partial_1 f(\varphi(M)) \partial_2 \varphi_1(M) - \partial_2 f(\varphi(M)) \partial_2 \varphi_2(M) \\ &= -\partial_1 f(\varphi(M)) \end{aligned}$$

c'est-à-dire, avec les notations habituelles (Leibniz)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y, x).$$

Solution 7

16-07

On note U , l'ouvert $[x \neq 0]$.

☞ La partie U est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ (= union de deux intervalles ouverts) par l'application continue $[(x, y) \mapsto x]$, donc c'est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

L'application polynomiale $[(x, y) \mapsto x^2]$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et l'application

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto y/x \longmapsto \cos y/x \end{aligned}$$

est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U en tant que composée d'une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur U par une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

En particulier, la fonction f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur U .

☞ L'énoncé définit f sur $\mathbb{R}^2$ tout entier : cette fonction est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

• Pour $M = (x, y) \in U$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = 2x \cos \frac{y}{x} + y \sin \frac{y}{x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = -x \sin \frac{y}{x}.$$

Pour $M = (0, y) \in [x = 0]$,

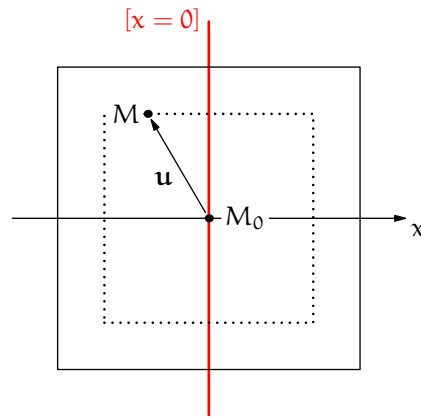
$$\frac{f(0+h, y) - f(0, y)}{h} = h \cos \frac{y}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad \frac{f(0, y+h) - f(0, y)}{h} = 0$$

donc les dérivées partielles de f sont bien définies sur $[x = 0]$ et

$$\forall M \in [x = 0], \quad \frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{\partial f}{\partial y}(M) = 0.$$

• Nous allons étudier la continuité de $\partial f / \partial y$ en un point $M_0 = (0, y_0)$. Nous allons mesurer les distances avec la norme produit : si $M = (x, y)$, alors

$$M_0 M = (x, y - y_0) \quad \text{et} \quad \|M_0 M\| = \max\{|x|, |y - y_0|\}.$$



D'après les calculs précédents,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(M) - \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \right| = \left| -x \sin \frac{y}{x} \right| \leq |x| \leq \|M_0 M\|$$

donc

$$\frac{\partial f}{\partial y}(M) \xrightarrow{M \rightarrow M_0} \frac{\partial f}{\partial y}(M_0).$$

Autrement dit : la dérivée partielle $\partial f / \partial y$ est continue en chaque point M_0 de l'axe $[x = 0]$ et comme f est $\mathcal{C}^1$ sur U , on en déduit que $\partial f / \partial y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

• Nous allons maintenant étudier la continuité de $\partial f / \partial x$ en un point $M_0 = (0, y_0) \in [x = 0]$ distinct de l'origine. En conservant les notations précédentes,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) - \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 2x \cos \frac{y}{x} + y \sin \frac{y}{x}.$$

Comme précédemment,

$$\left| 2x \cos \frac{y}{x} \right| \leq 2 \|M_0 M\|$$

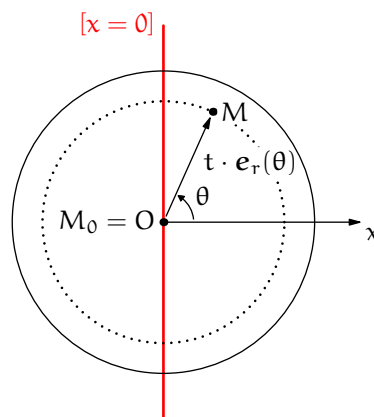
donc le premier terme tend bien vers 0 lorsque M tend vers M_0 .

En revanche, lorsque M tend vers M_0 , le quotient y/x est équivalent à y_0/x et tend donc vers $\pm\infty$ (selon le signe de y_0). Comme $\sin$ n'a pas de limite en $+\infty$, ni en $-\infty$ et que y tend vers $y_0 \neq 0$, on en déduit que la variation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) - \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)$$

n'a pas de limite lorsque M tend vers M_0 et donc que la dérivée partielle $\partial f / \partial x$ n'est pas continue en M_0 .

• Enfin, nous allons étudier la continuité de $\partial f / \partial x$ à l'origine et pour cela, nous allons utiliser la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$ (passer en polaires).



Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(O + t \cdot e_r) - \frac{\partial f}{\partial x}(O) \right| \leq 2|x| + |y| \leq 3|t| \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

Ainsi, la dérivée partielle $\partial f / \partial x$ est continue à l'origine.

• En conclusion, les dérivées partielles de f sont définies sur $\mathbb{R}^2$ tout entier ; la dérivée partielle $\partial f / \partial y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier mais la dérivée partielle $\partial f / \partial x$ n'est continue en aucun point de l'axe $[x = 0]$ autre que l'origine.

La fonction f n'est donc pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

✎ Au voisinage de l'origine, avec $\mathbf{h} = (h_x, h_y)$ et $h_x \neq 0$,

$$|f(\mathbf{O} + \mathbf{h})| = h_x^2 \left| \cos \frac{h_y}{h_x} \right| \leq h_x^2 \leq \|\mathbf{h}\|^2$$

(qu'on choisisse la norme euclidienne canonique ou la norme produit). Il est clair que l'encadrement

$$|f(\mathbf{O} + \mathbf{h})| \leq \|\mathbf{h}\|^2$$

est encore vrai si $h_x = 0$: il est donc vrai au voisinage de l'origine et on en déduit que

$$f(\mathbf{O} + \mathbf{h}) = \mathcal{O}(\|\mathbf{h}\|^2)$$

et donc que

$$f(\mathbf{O} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{O}) + \omega(\mathbf{h}) + o(\mathbf{h})$$

pour $\mathbf{h}$ voisin de $\mathbf{O}$. La fonction f est donc différentiable à l'origine et l'application linéaire tangente à f en $\mathbf{O}$ est l'application nulle ω (ce dernier point étant prévu, puisque les deux dérivées partielles de f en $\mathbf{O}$ sont nulles).

Solution 8

16-08

✎ Pour justifier l'existence d'un extremum sur une partie qui n'est pas compacte, on peut quand même recourir à un argument de compacité.

• La partie A sur laquelle la fonction f est définie est un rectangle infini :

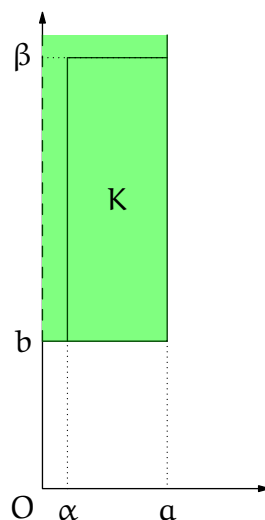
$$A = [0 < x \leq a] \cap [b \leq y] =]0, a] \times [b, +\infty[.$$

La partie A n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$: le point (a, b) appartient à A mais visiblement A n'est pas un voisinage de ce point.

La partie A n'est pas fermée non plus : la suite de terme général

$$M_n = \left(\frac{a}{n}, b \right)$$

est constituée de points de A , elle converge vers le point $M_\infty = (0, b)$, mais ce point n'appartient pas à A , donc A n'est pas stable par passage à la limite.



• La fonction f est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur A (ni x , ni y ne s'annulent sur A), donc f est continue sur A .

• Pour $0 < \alpha < a$ et $\beta > b$, on peut définir une partie compacte

$$K = [\alpha, a] \times [b, \beta] \subset A.$$

(Il est clair que K est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$, espace vectoriel de dimension finie.)

Sur ce compact, la fonction continue f est bornée et atteint ses bornes : il existe (au moins) deux points $P_0 \in K$ et $P_1 \in K$ tels que

$$\forall M \in K, \quad f(P_1) \leq f(M) \leq f(P_0).$$

Le réel $f(P_0)$ est le maximum de la fonction f restreinte au compact K et le réel $f(P_1)$ est son minimum. Pour le moment, on peut choisir librement α et β . Il nous reste à voir comment bien les choisir.

► Soit $P = (x, y) \in A$, un point situé en dehors du compact K : on distingue deux cas.

— Ou bien $y > \beta$ et, dans ce cas,

$$\begin{cases} (x+y)^2 \geq y^2 > \beta y > 0 \\ 0 < xy \leq \alpha y, \end{cases} \quad \text{donc} \quad f(x, y) \geq \frac{\beta}{\alpha}.$$

— Ou bien $y \leq \beta$ et $0 < x < \alpha$ et, dans ce cas,

$$\begin{cases} (x+y)^2 \geq y^2 \geq b^2 \\ 0 < xy < \beta x, \end{cases} \quad \text{donc} \quad f(x, y) \geq \frac{b^2}{\beta x} \geq \frac{b^2}{\alpha \beta}.$$

► Comme $(a, b) \in A$, nous allons enfin prendre $f(a, b)$ comme valeur de référence.

On peut choisir β assez grand pour que

$$\frac{\beta}{\alpha} \geq f(a, b)$$

et, maintenant que β est fixé, on peut choisir α assez proche de 0 pour que

$$\frac{b^2}{\alpha \beta} \geq f(a, b).$$

Pour un tel couple (α, β) , on a démontré ci-dessus qu'il existait un point $P_1 \in K \subset A$ tel que

$$\forall M \in K, \quad f(M) \geq f(P_1)$$

et en particulier tel que $f(a, b) \geq f(P_1)$ (puisque $(a, b) \in K$). On a également démontré que

$$\forall M \in A \setminus K, \quad f(M) \geq f(a, b) \geq f(P_1).$$

Par conséquent, on a bien démontré que

$$\forall M \in A, \quad f(M) \geq f(P_1)$$

c'est-à-dire que f atteint une valeur minimale sur A (égale à $f(P_1)$).

Et $f(P_1)$? Cette valeur maximale sur K est sans intérêt ! Lorsque x tend vers 0, la valeur de $f(x, b)$ tend vers $+\infty$, donc f n'est pas majorée sur A .

Nous avons prouvé que f atteignait un minimum sur A . Allons-nous en rester là ? Ou au moins essayer de calculer la valeur de ce minimum ?

• Première méthode.

Il n'y a que deux possibilités : ou bien f atteint son minimum à l'intérieur de A , c'est-à-dire sur l'ouvert

$$A^\circ =]0, a[\times]b, +\infty[,$$

ou bien f atteint son minimum sur le bord de A , c'est-à-dire sur l'un des deux intervalles suivants :

$$H = \{(x, b), 0 < x \leq a\}, \quad V = \{(a, y), b \leq y\}.$$

► [Premier cas] Si f atteint son minimum en un point P_1 de l'ouvert A° , alors le point P_1 est un point critique de f . Or

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x-y)(x+y)}{x^2 y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(y-x)(x+y)}{x y^2},$$

donc les points critiques de f sont les points de la médiatrice $[y = x]$.

Seulement voilà : la médiatrice ne rencontre pas A° ! En effet, si $(x, y) \in A^\circ$, alors $x < a \leq b < y$, donc $x < y$.

La fonction f n'a donc aucun point critique sur l'ouvert A° et, faute de point critique, elle n'atteint pas son minimum sur A° .

► [Second cas] La fonction f atteint donc son minimum sur l'intervalle horizontal H ou sur l'intervalle vertical V .

Pour tout $(x, y) \in H$, on a

$$0 < x \leq a \quad \text{et} \quad f(x, y) = f(x, b) = \frac{x}{b} + 2 + \frac{b}{x}.$$

Une étude de fonction montre que le second membre est décroissant sur $]0, b]$ et croissant sur $[b, +\infty[$. Or $x \in]0, a] \subset]0, b]$, donc

$$\min_{(x,y) \in H} f(x, y) = f(a, b).$$

De même, pour tout $(x, y) \in V$, on a

$$b \leq y \quad \text{et} \quad f(x, y) = f(a, y) = \frac{a}{y} + 2 + \frac{y}{a}.$$

C'est la même chose ! Et comme $y \in [b, +\infty[\subset [a, +\infty[$, on en déduit que

$$\min_{(x,y) \in V} f(x, y) = f(a, b).$$

Conclusion : On connaît la valeur minimale de f

$$\min_{(x,y) \in A} f(x, y) = f(a, b)$$

et le raisonnement précédent nous assure aussi que cette valeur n'est atteinte qu'au seul point (a, b) (*minimum global strict*).

✱ Deuxième méthode.

On peut aussi appliquer la méthode des crêtes puisque f est définie sur un rectangle.

► [Balayage en y] On fixe $0 < x_0 \leq a$ et on étudie les variations de la fonction

$$\left[y \mapsto f(x_0, y) = \frac{x_0}{y} + 2 + \frac{y}{x_0} \right]$$

sur l'intervalle $[b, +\infty[$. C'est déjà fait ! Comme

$$y \in [b, +\infty[\subset [x_0, +\infty[,$$

on sait que

$$\forall 0 < x_0 \leq a, \quad \min_{y \geq b} f(x_0, y) = f(x_0, b).$$

► [Balayage en x] Il reste à étudier les variations de

$$[x \mapsto f(x, b)]$$

sur l'intervalle $]0, a]$ et c'est déjà fait. Comme

$$x \in]0, a] \subset]0, b] ,$$

on sait que

$$\min_{0 < x \leq a} f(x, b) = f(a, b).$$

Par conséquent,

$$\min_{(x,y) \in A} f(x, y) = \min_{0 < x \leq a} \left[\min_{y \geq b} f(x, y) \right] = f(a, b).$$

Solution 9

16-09

1.

✍ Tout est dans l'analyse du problème ! Il faut ici comprendre que $f(x, y)$ est une fonction **affine** de x et se souvenir que les deux coefficients d'une fonction affine sont déterminés par la donnée de deux points du graphe.

► Soient donc $a < x_1 < x_2 < b$. On sait alors que

$$\forall y \in]c, d[, \quad \begin{cases} f(x_1, y) = g(y) + x_1 h(y) \\ f(x_2, y) = g(y) + x_2 h(y) \end{cases}$$

et comme $x_2 - x_1 \neq 0$,

$$\forall y \in]c, d[, \quad \begin{cases} h(y) = \frac{f(x_2, y) - f(x_1, y)}{x_2 - x_1} & \text{pente} \\ g(y) = \frac{x_2 f(x_1, y) - x_1 f(x_2, y)}{x_2 - x_1} & \text{ordonnée à l'origine} \end{cases}$$

Ainsi les fonctions g et h sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]c, d[$ en tant que combinaisons linéaires de $[y \mapsto f(x_1, y)]$ et de $[y \mapsto f(x_2, y)]$, qui sont toutes les deux de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]c, d[$.

$$\begin{array}{ccccc}]c, d[& \xrightarrow{\text{polyn.}} & \Omega & \xrightarrow{f \in \mathcal{C}^2(\Omega)} & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & (x_0, y) & \longmapsto & f(x_0, y) \end{array}$$

2. On suppose qu'il existe deux fonctions g et h de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]c, d[$ et on pose

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad f(x, y) = xg(y) + h(y).$$

• La fonction $[(x, y) \mapsto x]$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω (application linéaire sur $\mathbb{R}^2$). Les fonctions $[(x, y) \mapsto g(y)]$ et $[(x, y) \mapsto h(y)]$ sont aussi de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω .

$$\begin{array}{ccccc} \Omega & \xrightarrow{\text{lin.}} &]c, d[& \xrightarrow{\varphi \in \mathcal{C}^2([c, d])} & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & y & \longmapsto & \varphi(y) \end{array}$$

Par produit et somme (dans cet ordre), la fonction f est aussi de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω .

🔗 Il n'y a aucun calcul compliqué ici ! Mais il y a quand même une vraie difficulté théorique : il est crucial de tenir compte que f est une fonction de deux variables (c'est-à-dire une **fonction du couple** (x, y) en fait) et qu'il faut justifier la **régularité de f en tant que fonction de deux variables** — et surtout pas en examinant la régularité selon x et selon y séparément.

Cela dit, on vérifie facilement que

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g(y) \quad \text{et donc que} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0.$$

• Réciproquement, on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω et que

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0.$$

► Fixons $y_0 \in]c, d[$. La fonction

$$[x \mapsto f(x, y_0)]$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $]a, b[$ comme composée :

$$x \longmapsto (x, y_0) \longmapsto f(x, y_0)$$

et que cette fonction est affine (puisque sa dérivée seconde est identiquement nulle sur un *intervalle*). Il existe donc deux constantes réelles, qui dépendent *a priori* de l'ordonnée y_0 choisie et qu'on note donc $g(y_0)$ et $h(y_0)$, telles que

$$\forall x \in]a, b[, \quad f(x, y_0) = xg(y_0) + h(y_0).$$

► On a ainsi défini deux fonctions $g, h :]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad f(x, y) = xg(y) + h(y).$$

D'après la question précédente, ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]c, d[$.

3. On applique exactement la même méthode.

• On suppose qu'il existe deux fonctions $g \in \mathcal{C}^2([a, b])$ et $h \in \mathcal{C}^2([c, d])$ telles que

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad f(x, y) = g(x) + h(y).$$

► La fonction f ainsi définie est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω , en tant que somme de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω .

$$\begin{array}{ccccc} \Omega & \xrightarrow{\text{lin.}} &]a, b[& \xrightarrow{\mathcal{C}^2} & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x & \longmapsto & g(x) \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} \Omega & \xrightarrow{\text{lin.}} &]c, d[& \xrightarrow{\mathcal{C}^2} & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & y & \longmapsto & h(y) \end{array}$$

✎ On voit une fois de plus sur ce diagramme sagittal qu'il est toujours possible de considérer une fonction d'une variable comme s'il s'agissait d'une fonction de deux variables...

Pour une fonction de plusieurs variables, il est vraiment nécessaire de faire un diagramme sagittal avant de s'en servir. (Pardon!)

▷ Le calcul des dérivées partielles est sans mystère.

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g'(x) \quad \text{et donc} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial[g'(x)]}{\partial y}(x, y) = 0$$

Ceux qui ne font pas confiance au Théorème de Schwarz peuvent recommencer.

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = h'(y) \quad \text{et donc} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial[h'(y)]}{\partial x}(x, y) = 0$$

✎ Réciproquement, supposons que f soit une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω et que

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0.$$

▷ Cela signifie que

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)(x, y) = 0.$$

On sait dans ce cas qu'il existe une fonction $\eta = \eta(y)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]c, d[$ telle que

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \eta(y).$$

▷ Pour tout $x_0 \in]a, b[$, la fonction $[y \mapsto f(x_0, y)]$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $]c, d[$ (propriété maintenant très classique). D'après le Théorème fondamental du calcul intégral,

$$\begin{aligned} \forall (x, y_0) \in \Omega, \forall y \in]c, d[, \quad f(x, y) &= f(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, z) \, dz \\ &= f(x, y_0) + \int_{y_0}^y \eta(z) \, dz \end{aligned}$$

et donc, pour un $c < y_0 < d$ arbitrairement choisi,

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad f(x, y) = f(x, y_0) + H_0(y)$$

où H est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]c, d[$ en tant que primitive de $\eta \in \mathcal{C}^1(]c, d[)$ et $[x \mapsto f(x, y_0)]$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]a, b[$ en tant que composée de $[x \mapsto (x, y_0)]$ par f (qui sont toutes deux de classe $\mathcal{C}^2$).

Solution 10

16-10

La fonction f est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U .

✎ Pour étudier la régularité au point O , la méthode est connue :

- calculer l'expression générale des dérivées partielles sur U ;
- calculer les valeurs particulières des dérivées partielles (SI elles existent!) au point O ;
- vérifier si les dérivées partielles sont bien continues au point O , c'est-à-dire

$$\lim_{M \rightarrow O} \frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(O) \quad \text{et} \quad \lim_{M \rightarrow O} \frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{\partial f}{\partial y}(O).$$

La fonction f est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ si, et seulement si, toutes ces conditions sont remplies.

En un point $M = (x, y) \neq O$, les règles de dérivation bien connues donnent

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{2x^3y(x^2 + 2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{x^4(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

La théorie nous assurait que ces fonctions étaient continues sur $\mathcal{U}$ avant même de poser les calculs.

Pour les dérivées partielles au point O , on revient à la définition. Comme

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0 \quad \text{et} \quad \forall y \neq 0, \quad \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{0 - y} = 0$$

il est clair que les dérivées partielles existent et que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(O) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(O) = 0.$$

Pour étudier la continuité de manière efficace, nous allons munir $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne canonique.

Rappelons avant d'aller plus loin que

$$|x| \leq r, \quad |y| \leq r, \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et cette norme simplifie considérablement l'expression des dénominateurs, ce qui en fait tout l'intérêt.

On note $M = (x, y)$. On a donc $r^2 = \|\mathbf{OM}\|^2$. Par inégalité triangulaire,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(M) - \frac{\partial f}{\partial x}(O) \right| = \frac{2|xy|(x^4 + 2x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \leq 6r^2,$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(M) - \frac{\partial f}{\partial y}(O) \right| = \frac{x^4|x^2 - y^2|}{(x^2 + y^2)^2} \leq 2r^2.$$

Lorsque le point M tend vers l'origine O , la distance $r = \|\mathbf{OM}\|$ tend vers 0 et, par Théorème d'encadrement, on déduit des relations précédentes que

$$\lim_{M \rightarrow O} \frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(O) \quad \text{et que} \quad \lim_{M \rightarrow O} \frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{\partial f}{\partial y}(O).$$

La fonction f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

La même méthode permet de démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Il s'agit de vérifier que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, qui sont pour l'instant des fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathcal{U}$, sont en fait des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Tout d'abord, les quatre dérivées partielles secondes sont bien définies au point O .

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{x - 0} = \frac{0}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(O),$$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y - 0} = \frac{0}{y} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(O),$$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x - 0} = \frac{x^2}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(O),$$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{y - 0} = \frac{0}{y} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(O).$$

Au passage, les valeurs des dérivées croisées sont cohérentes avec le Théorème de Schwarz.

Ensuite, il faut calculer les quatre dérivées partielles seconde sur $\mathcal{U}$ et vérifier qu'elles tendent toutes vers 0 au voisinage de l'origine.

On s'arme de courage et on trouve :

$$\forall M = (x, y) \neq O, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) = \frac{2x^6y + 6x^4y^3 + 12x^2y^5}{(x^2 + y^2)^3}.$$

Par conséquent,

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(O) \right| \leq \frac{20r^7}{r^6} = 20r$$

et le Théorème d'encadrement nous dit que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ est continue au point O.

On recommence avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M) = \frac{2x^7 + 6x^5y^2 - 4x^3y^4}{(x^2 + y^2)^3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{-6x^6y + 2x^4y^3}{(x^2 + y^2)^3} \end{aligned}$$

et on vérifie toujours de la même manière que ces trois fonctions sont continues au point O.

La fonction f est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

☞ Si on pousse la curiosité à l'ordre 3,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(M) = \frac{24xy^5(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^4}$$

et en passant en polaires : $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, on obtient

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(M) = 24 \cos \theta \sin^5 \theta (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta).$$

Cette expression est indépendante de r mais pas de θ , donc elle n'a pas de limite lorsque M tend vers O (si elle avait une limite, cette limite dépendrait de l'angle θ !), donc la fonction f n'est pas de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}^2$ (elle est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathcal{U}$ seulement).

Solution 11

16-11

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad u_n(x) = \frac{x^n}{1 + y^{2n}}.$$

Il est clair que chaque u_n est une fonction rationnelle et que le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$. Ces fonctions u_n sont donc toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, par restriction, elles sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathcal{U} =]-1, 1[\times]-1, 1[$.

☞ Comment démontrer que $\mathcal{U}$ est bien un ouvert de $\mathbb{R}^2$?

♣ Commençons par le commencement : la convergence simple sur $\mathcal{U}$.

Comme $|y| < 1$, il est clair que $1 + y^{2n}$ tend vers 1 et donc que $u_n(x, y) \sim x^n$. Comme $|x| < 1$, la série géométrique $\sum x^n$ est absolument convergente et, par comparaison, la série $\sum u_n(x, y)$ est absolument convergente.

Ainsi, la somme

$$S = \left[(x, y) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x, y) \right]$$

est bien définie sur l'ouvert $\mathcal{U}$.

♣ Ensuite la continuité sur $\mathcal{U}$.

Comme $1 + y^{2n} \geq 1$, il est clair que

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \quad |u_n(x, y)| \leq |x|^n.$$

Comme le rayon de convergence de la série entière $\sum x^n$ est égal à 1, on sait ce qu'on doit faire!

Pour $0 < a < 1$, on a

$$\forall (x, y) \in]-a, a[\times]-1, 1[, \quad |u_n(x, y)| \leq a^n$$

et la série $\sum a^n$ est absolument convergente. Par conséquent, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur l'ouvert

$$\mathcal{U}_a =]-a, a[\times]-1, 1[$$

et comme les fonctions u_n sont continues sur U , on en déduit que la somme S est continue sur

$$U = \bigcup_{0 < a < 1} U_a.$$

🔗 Cette étude n'est pas vraiment nécessaire : toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est différentiable et a fortiori continue, il suffirait donc de prouver que S est de classe $\mathcal{C}^1$.

🔗 Comment démontrer que U_a est un ouvert ?

🔗 On continue et on attaque vraiment le sujet de l'exercice. D'après le théorème fondamental, il s'agit de démontrer que les dérivées partielles de S sont bien définies sur U et qu'elles sont continues sur U .

🔗 Bien entendu, nous allons pour cela appliquer un théorème de dérivation terme à terme ! Dans un premier temps, je raisonne en fonction de x , à y fixé.

🔗 Pour tout $(x, y) \in U$,

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{nx^{n-1}}{1+y^{2n}} \quad \text{donc} \quad \left| \frac{\partial u_n}{\partial x} \right| \leq n|x|^{n-1}.$$

Comme le rayon de convergence de la série entière $\sum x^n$ est égal à 1, celui de la série dérivée $\sum nx^{n-1}$ est aussi égal à 1, donc

$$\forall 0 < a < 1, \forall n \geq 1, \forall (x, y) \in U_a, \quad \left| \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y) \right| \leq na^{n-1} \quad (*)$$

où la série $\sum na^{n-1}$ est convergente.

🔗 Résumons : à y_0 fixé et donc avec x comme seule variable :

— la série $\sum u_n(\cdot, y_0)$ est une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1[$

$$\begin{array}{ccccc}]-1, 1[& \xrightarrow{\text{polyn.}} & U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x, y_0) & \longmapsto & u_n(x, y_0) \end{array}$$

— la série de fonctions $\sum u_n(\cdot, y_0)$ converge simplement sur $] -1, 1[$;

— la série des dérivées $\sum \frac{\partial u_n}{\partial x}(\cdot, y_0)$ converge normalement sur tout segment $[-a, a] \subset]-1, 1[$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, la somme de cette série de fonctions est de classe $\mathcal{C}^1$ **en tant que fonction de $x \in]-1, 1[$** et

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{\partial S}{\partial x}(x, y_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y_0).$$

🔗 Considérons maintenant cette dérivée partielle **en tant que fonction de $(x, y) \in U$** .

Sur l'expression précédente, on voit que cette fonction est la somme d'une série de fonctions continues sur U qui converge normalement sur l'ouvert U_a pour tout $0 < a < 1$. (C'est la signification de (*).)

Par conséquent, la dérivée partielle

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \left[(x, y) \mapsto \frac{\partial S}{\partial x}(x, y) \right]$$

est bien continue sur l'ouvert U (continue, j'insiste lourdement!, en tant que fonction du couple (x, y)).

🔗 On est prié de retenir la grande différence avec le cas ordinaire des fonctions d'une seule variable : ici, dans un premier temps, on exprime la dérivée partielle; dans un second temps, on vérifie sa régularité.

(Pour les fonctions d'une seule variable, la régularité et l'expression de la dérivée sont établies en même temps par le Théorème de dérivation terme à terme.)

🔗 Second temps : même démarche en fonction de y , en supposant donc que x est fixé ($x = x_0 \in]-1, 1[$) — même si, le temps d'établir quelques encadrements on laisse x varier librement.

🔗 Pour tout $(x, y) \in U$,

$$\frac{\partial u_n}{\partial y} = \frac{-2nx^{n-1}y^{2n-1}}{(1+y^{2n})^2}.$$

Or $|y| < 1$, donc $|y^{2n-1}| < 1 \leq 1 + y^{2n}$ et par conséquent

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial y} \right| \leq \frac{2n|x|^{n-1}}{1+y^{2n}} \leq 2n|x|^{n-1}.$$

• Comme plus haut, on en déduit que

$$\forall 0 < \alpha < 1, \forall n \geq 1, \forall (x, y) \in U_\alpha, \quad \left| \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y) \right| \leq n \alpha^n \quad (\dagger)$$

et on sait (les raisons ont déjà été données) que la série $\sum n \alpha^n$ est convergente.

• (À partir de tout de suite, x est fixé, égal à x_0 .) Comme plus haut, on en déduit que

$$\forall y \in]-1, 1[, \quad \frac{\partial S}{\partial y}(x_0, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial u_n}{\partial y}(x_0, y)$$

et comme plus haut (cette fois à l'aide de $(\dagger)$), on en déduit que

$$\frac{\partial S}{\partial y} = \left[(x, y) \mapsto \frac{\partial S}{\partial y}(x, y) \right]$$

est une fonction continue sur U .

• Mission accomplie : la fonction S est définie sur l'ouvert U , elle admet des dérivées partielles par rapport à chaque variable en tout point de U et ces dérivées partielles sont continues sur U , donc S est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur U .

Solution 12

16-12

La fonction $[(x, y) \mapsto xy]$ est polynomiale et donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. D'autre part, la fonction

$$\begin{array}{ccccccc} U & \xrightarrow{\text{polyn.}} & \mathbb{R}_+^* & \xrightarrow{1/\sqrt{\cdot}} & \mathbb{R}_+^* & \xrightarrow{\sin} & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^2 + y^2 & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \mapsto & \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ en tant que composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Par produit, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$.

• Avec $O = (0, 0)$ et $h = (x, y)$, on obtient

$$|f(O + h)| = |f(x, y)| \leq |xy| \leq r^2 = \|h\|^2$$

pour la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^2$. (On rappelle que, sur un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et qu'on peut choisir celle qu'on veut.)

Par conséquent,

$$\begin{aligned} f(O + h) &= \mathcal{O}(\|h\|^2) = o(h) \\ &= \underbrace{f(O)}_{=0} + \underbrace{\omega_{\mathbb{R}^2, \mathbb{R}}(h)}_{=0} + o(h), \end{aligned}$$

ce qui prouve que la fonction f est bien différentiable au point $O = (0, 0)$.

• En particulier, $df(O) = \omega_{\mathbb{R}^2, \mathbb{R}}$ et par conséquent

$$\frac{\partial f}{\partial x}(O) = df(O)(e_1) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(O) = df(O)(e_2) = 0.$$

▮ La question n'est pas posée, mais on peut y répondre quand même : la fonction f est continue au point O (en tant que fonction différentiable en ce point) et comme elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U , elle est donc continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

• Nous allons utiliser une très importante astuce de calcul pour préparer la suite. **À retenir absolument!**

On peut dériver directement l'expression $r^2 = x^2 + y^2$ ou considérer que r^2 est une composée de fonctions dérivables :

$$\frac{\partial(r^2)}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial(r^2)}{\partial x} = 2r \frac{\partial r}{\partial x}$$

donc

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad \text{et, de même,} \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}.$$

▮ On peut aussi dériver $\sqrt{x^2 + y^2}$, mais c'est plus fatigant.

• On a déjà calculé les dérivées partielles de f au point O . On calcule maintenant les dérivées partielles de f au point $M = O + \mathbf{h} \neq O$ en utilisant l'astuce précédente. Avec $M = O + \mathbf{h} = (x, y)$ et $r = \|\mathbf{h}\|$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(M) &= y \sin \frac{1}{r} + xy \cos \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial 1/r}{\partial x} = y \sin \frac{1}{r} + xy \cos \frac{1}{r} \cdot \frac{-1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \\ &= y \sin \frac{1}{r} - \frac{x^2 y}{r^3} \cos \frac{1}{r}.\end{aligned}$$

On y voit plus clair en coordonnées polaires :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = -\cos^2 \theta \sin \theta \cos \frac{1}{r} + r \sin \theta \sin \frac{1}{r}.$$

Le second terme est $\mathcal{O}(r)$, alors que le premier terme n'a pas de limite quand r tend vers 0. On comprend ainsi que $\frac{\partial f}{\partial x}(M)$ ne tend pas vers $\frac{\partial f}{\partial x}(O)$ lorsque M tend vers O , ce qui prouve que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

C'est pareil pour l'autre dérivée partielle :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(M) = x \sin \frac{1}{r} - \frac{xy^2}{r^3} \cos \frac{1}{r}.$$

✎ Cet exercice est l'occasion de rappeler le **Théorème de composition des limites**.

Si l'expression $\frac{\partial f}{\partial x}(M)$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque M tend vers O et si l'expression $\gamma(t) \in \mathbb{R}^2$ tend vers O lorsque $t \in \mathbb{R}$ tend vers 0, alors la composée

$$\frac{\partial f}{\partial x}[\gamma(t)]$$

tend vers ℓ lorsque t tend vers 0.

• Considérons d'abord $\gamma(t) = (t, 0)$, fonction continue de $t \in \mathbb{R}$, qui tend vers O lorsque t tend vers 0. Il est clair que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}[\gamma(t)] = 0.$$

Considérons ensuite $\gamma(t) = (t, t)$, fonction continue de $t \in \mathbb{R}$, qui tend aussi vers O lorsque t tend vers 0. Cette fois, la composée

$$\frac{\partial f}{\partial x}[\gamma(t)] = \underbrace{t \sin \frac{1}{2t^2}}_{\rightarrow 0} - \frac{\operatorname{sgn}(t)}{2\sqrt{2}} \underbrace{\cos \frac{1}{2t^2}}_{\text{pas de limite!}}$$

ne tend pas vers 0.

• On a démontré que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ était définie en chaque point de $\mathbb{R}^2$ et qu'elle était en particulier nulle à l'origine.

Les deux cas qu'on vient d'étudier montrent que cette dérivée partielle n'a en fait pas de limite au voisinage de l'origine et que la fonction f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Solution 13

16-13

Les fonctions φ et ψ sont de classe $\mathcal{C}^2$ par hypothèse. On doit tout de suite remarquer qu'il s'agit de fonctions d'une seule variable réelle et qu'on peut donc parler de *dérivée* et de *dérivée seconde* pour ces deux fonctions.

• Le théorème de Schwarz, lorsqu'il peut être appliqué, permet de simplifier le calcul des dérivées secondes.

En général, pour une fonction de 2 variables, il y a quatre dérivées partielles secondes à calculer. Mais si cette fonction est de classe $\mathcal{C}^2$, il n'y a plus que trois dérivées partielles secondes à calculer.

Plus généralement, pour une fonction de n variables, il y a n^2 dérivées partielles secondes à calculer et si cette fonction est de classe $\mathcal{C}^2$, il n'y en a que $\frac{n(n+1)}{2}$ à calculer car la matrice hessienne

$$\operatorname{Hf}(M_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

est une matrice symétrique (et comme chacun sait, toute matrice symétrique réelle est diagonalisable).

1. Commençons par démontrer que la fonction u est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et pour cela, analysons cette fonction.

Tout d'abord, la fonction u est la somme de deux fonctions.

$$[(x, y) \mapsto x\varphi(x+y)] \quad \text{et} \quad [(x, y) \mapsto y\psi(x+y)].$$

Chacun de ces deux termes est lui-même le *produit* de deux fonctions : d'une part

$$[(x, y) \mapsto x] \quad \text{et} \quad [(x, y) \mapsto \varphi(x + y)]$$

et d'autre part

$$[(x, y) \mapsto y] \quad \text{et} \quad [(x, y) \mapsto \psi(x + y)].$$

♣ Dans les deux produits, le premier facteur est une application linéaire, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Dans les deux produits aussi, le second facteur est pour sa part le produit d'une application linéaire (donc $\mathcal{C}^\infty$) et d'une composée :

$$\begin{array}{ccccc} (x, y) & \xrightarrow{\text{linéaire}} & x + y & \xrightarrow{\mathcal{C}^2} & \varphi(x + y) \\ \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

dans le premier cas et

$$\begin{array}{ccccc} (x, y) & \xrightarrow{\text{linéaire}} & x + y & \xrightarrow{\mathcal{C}^2} & \psi(x + y) \\ \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

dans le second cas.

✎ Non seulement cette analyse prouve que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, mais en outre elle nous indique comment calculer les dérivées partielles de f .

Pour utiliser la notation de Leibniz confortablement, nous allons supposer que φ et ψ sont des fonctions de la variable z et nous allons poser $z(x, y) = x + y$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial [x\varphi(x + y)]}{\partial x} + \frac{\partial [y\psi(x + y)]}{\partial x} = \left[1 \cdot \varphi(x + y) + x \cdot \left\{ \frac{\partial [\varphi(x + y)]}{\partial x} \right\} \right] + \left[y \cdot \left\{ \frac{\partial [\psi(x + y)]}{\partial x} \right\} \right] \\ &= \left[\varphi(x + y) + x \cdot \left\{ \frac{d\varphi}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right\} \right] + \left[y \cdot \left\{ \frac{d\psi}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right\} \right] \\ &= \left[\varphi(x + y) + x \cdot \varphi'(x + y) \cdot 1 \right] + \left[y \cdot \psi'(x + y) \cdot 1 \right] \\ &= \varphi(x + y) + x\varphi'(x + y) + y\psi'(x + y) \end{aligned}$$

De la même manière, on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\varphi'(x + y) + \psi(x + y) + y\psi'(x + y)$$

mais aussi, en dérivant à nouveau ces expressions :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} [\varphi(x + y) + x\varphi'(x + y) + y\psi'(x + y)] \\ &= 2\varphi'(x + y) + x\varphi''(x + y) + y\psi''(x + y) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} [x\varphi'(x + y) + \psi(x + y) + y\psi'(x + y)] \\ &= x\varphi''(x + y) + 2\psi'(x + y) + y\psi''(x + y) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} [x\varphi'(x + y) + \psi(x + y) + y\psi'(x + y)] \\ &= \varphi'(x + y) + x\varphi''(x + y) + \psi'(x + y) + y\psi''(x + y) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} [\varphi(x + y) + x\varphi'(x + y) + y\psi'(x + y)] = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \end{aligned}$$

(la dernière ligne de calcul ne servant qu'à vérifier le résultat du Théorème de Schwarz sur cet exemple).

Il est alors clair que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

2. C'est la même chose, nous allons donc procéder avec la même méthode ou presque.

Les fonctions $[(x, y) \mapsto x]$ et $[(x, y) \mapsto y]$ sont linéaires sur un espace de dimension finie, donc elles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

Comme φ est, par hypothèse, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, la composée

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & y & \longmapsto & \varphi(y) \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Une somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ est encore une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, donc

$$z = [(x, y) \mapsto x + \varphi(y)]$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Comme ψ est, par hypothèse, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, la composée

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x + \varphi(y) & \longmapsto & \psi(x + \varphi(y)) = v(x, y) \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

🔗 On se lance alors dans le calcul des dérivées partielles en considérant que ψ est une fonction de la variable z , pour être cohérent avec la fonction $z = z(x, y)$ définie ci-dessus.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{d\psi}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \psi'(z(x, y)) \cdot 1 = \psi'(x + \varphi(y)) \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{d\psi}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \psi'(x + \varphi(y)) \cdot \varphi'(y) \end{aligned}$$

On re-dérive par rapport à x .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{d(\psi')}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \psi''(x + \varphi(y)) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} [\psi'(x + \varphi(y))] \cdot \varphi'(y) = \psi''(x + \varphi(y)) \cdot \varphi'(y) \end{aligned}$$

Et la conclusion est alors immédiate !

$$\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \psi''(x + \varphi(y)) \cdot \psi'(x + \varphi(y)) \cdot \varphi'(y) = \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Solution 14

16-14

Je commence par quelques généralités utiles à connaître sur les changements de variables linéaires et en particulier sur la manière de s'en servir de manière autonome.

On considère une fonction $f = f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et un changement de variables linéaire $\varphi \in GL(\mathbb{R}^2)$:

$$\varphi(x, y) = (ax + by, cx + dy) = (u(x, y), v(x, y)).$$

Dans cette écriture, u et v sont deux formes linéaires sur $\mathbb{R}^2$, ce sont les **composantes** de l'application φ .

✦ Du fait que φ soit un automorphisme de $\mathbb{R}^2$, il s'agit d'une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et sa bijection réciproque est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ (puisque'elle est linéaire elle aussi). Par conséquent, φ est bien un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

✦ Comme φ est bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, on peut alors définir une autre fonction $g = g(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en posant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (g \circ \varphi)(x, y)$$

ce qui revient au même que

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad g(u, v) = (f \circ \varphi^{-1})(u, v).$$

Dans cette dernière égalité, u et v sont cette fois des **variables** et non plus des fonctions.

✦ Enfin, comme φ et φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^\infty$,

— si f est de classe $\mathcal{C}^n$, alors $g = f \circ \varphi^{-1}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^n$;

— si g est de classe $\mathcal{C}^n$, alors $f = g \circ \varphi$ est aussi de classe $\mathcal{C}^n$.

Autrement dit : la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ si, et seulement si, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^n$.

✦ Quel que soit le scalaire $\lambda \neq 0$, l'application $\lambda \cdot \varphi$ est aussi un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Ces deux changements de variables ne diffèrent que par un **changement d'échelle** : le facteur λ ne modifie que l'unité de calcul.

Par conséquent, même si l'expression de $\varphi(x, y)$ fait apparaître quatre coefficients a, b, c et d , nous ne disposons réellement que de **trois degrés de liberté** pour choisir φ .

D'autre part, puisque φ doit être bijective, il faut que $ad - bc \neq 0$, ce qui impose une **première contrainte**, indépendante de tous les calculs ultérieurs.

Il nous reste donc juste assez de degrés de liberté pour **deux contraintes supplémentaires**.

1. On conserve les notations précédentes dans tous les exercices qui suivent.
 - ♣ On applique la règle de la chaîne pour exprimer les dérivées partielles de f .

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2 \cdot \frac{\partial g}{\partial u} + 3 \cdot \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3 \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial u}. \quad (2)$$

🔗 La suite du raisonnement est mécanique et demande donc la plus extrême rigueur (quantificateurs et composition des fonctions). Mais comme c'est mécanique, une fois qu'on a bien compris comment ça marche, on peut brûler les étapes et donner le résultat beaucoup plus vite...

La relation (2) doit être comprise de la manière suivante (toujours la même).

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - 3 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial g}{\partial u}(\varphi(x, y))$$

Une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ est donc solution de l'EDP

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - 3 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \quad (3)$$

si, et seulement si, la fonction g est solution de

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U} = \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial g}{\partial u}(\varphi(x, y)) = 0$$

ce qui revient à

$$\forall (u, v) \in \mathcal{W} = \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = 0$$

puisque φ réalise une bijection de $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$ sur $\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$.

♣ On reconnaît ici une EDP de référence. La fonction g est donc solution de cette EDP si, et seulement si, il existe une fonction $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad g(u, v) = h(v).$$

On invoque à nouveau la bijectivité de φ pour en déduire que f est solution de l'EDP (3) si, et seulement si, il existe une fonction $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{aligned}\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) &= (g \circ \varphi)(x, y) = g(u(x, y), v(x, y)) \\ &= h(v(x, y)) = h(3x + y).\end{aligned}$$

🔗 Dans cette dernière étape, on traite u et v comme des fonctions de x et y parce qu'on cherche à exprimer la solution f comme une fonction de x et y .

2. Même méthode! Cette fois :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial v} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial v}$$

et par conséquent

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}. \quad (4)$$

♣ Le même raisonnement que le précédent nous assure que la fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ est solution de l'EDP homogène

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \quad (5)$$

si, et seulement si, il existe une fonction $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = h(y - x).$$

✎ Non, la question n'était pas posée, mais j'y réponds quand même.

Comme dans le premier exemple, la relation (4) nous dit que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(\varphi(x, y))$$

et comme $f(x, y) = g(\varphi(x, y))$, on en déduit que la fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ est une solution de l'EDP

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y) \quad (6)$$

si, et seulement si, la fonction g est une solution de l'EDP

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial g}{\partial u}(\varphi(x, y)) = g(\varphi(x, y))$$

ce qui revient à

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = g(u, v) \quad (7)$$

puisque la fonction φ réalise une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

✎ Si on raisonne à v fixé, avec u pour seule variable, on peut interpréter cette dernière EDP comme une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants.

La fonction $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ vérifie l'EDP (7) si, et seulement si, pour tout $v_0 \in \mathbb{R}$ (fixé, donc!), la fonction $[u \mapsto g(u, v_0)]$ est une solution de l'équation différentielle

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad z'(u) - z(u) = 0$$

ce qui revient à dire que, pour tout $v_0 \in \mathbb{R}$, il existe une constante $K(v_0) \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad g(u, v_0) = K(v_0)e^u.$$

✎ Il faut bien comprendre ce qu'on vient de faire ici : en résolvant l'équation différentielle après avoir fixé $v = v_0$, on fait a priori dépendre la constante d'intégration de la valeur de v_0 . Autrement dit, on a ainsi défini point par point une fonction $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Avant de continuer, il faut remarquer que la fonction K n'est pas complètement arbitraire, quoiqu'elle soit définie point par point.

On remarque que

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad K(v) = e^{-u}g(u, v)$$

et en particulier (pour $u = 0$) $K(v) = g(0, v)$. On en déduit que la fonction K est nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{lin.}} & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & (0, v) & \longmapsto & g(0, v) \end{array}$$

✎ On peut maintenant conclure : la fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ est solution de l'EDP (6) si, et seulement si, il existe une fonction $K \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) &= K(v(x, y))e^{u(x, y)} \\ &= K(y - x)e^x. \end{aligned}$$

3. C'est toujours pareil, donc je réduis les explications au minimum.

D'après le changement de variables proposé,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial v} \quad \text{donc} \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cdot \frac{\partial g}{\partial u}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= (x + y)^2 = [u(x, y)]^2 \\ \iff \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad 2 \cdot \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) &= u^2 \\ \iff \forall v_0 \in \mathbb{R}, \exists K(v_0) \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}, \quad g(u, v_0) &= \frac{u^3}{6} + K(v_0). \end{aligned}$$

On a ainsi défini une fonction $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $K(v) = g(u, v) - u^3/6$ pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et en particulier telle que

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{linéaire}} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)} & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & (0, v) & \longmapsto & g(0, v) = K(v) \end{array}$$

ce qui montre que la fonction K est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

On peut alors conclure, en conservant le détail des arguments : la fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ est une solution de l'EDP

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x + y)^2$$

si, et seulement si, il existe une fonction $K \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad g(u, v) = \frac{u^3}{6} + K(v)$$

c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (g \circ \varphi)(x, y) = \frac{[u(x, y)]^3}{6} + K(v(x, y))$$

soit enfin :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = K(x - y) + \frac{(x + y)^3}{6}.$$

✎ On peut remarquer que cette solution est la somme d'une solution particulière : $(x + y)^3/6$ et de la solution générale de l'équation homogène, résolue précédemment.

Solution 15

16-15

On suppose ici que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et donc que, quel que soit le changement de variables linéaire φ , la fonction g est aussi de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

On pourra donc librement appliquer le Théorème de Schwarz à ces deux fonctions.

✎ Quel que soit le changement de variables linéaire φ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = a \cdot \frac{\partial g}{\partial u} + c \cdot \frac{\partial g}{\partial v}, \quad (a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = b \cdot \frac{\partial g}{\partial u} + d \cdot \frac{\partial g}{\partial v}. \quad (b)$$

✎ On en **déduit** les dérivées secondes en composant ces opérateurs différentiels.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ &= a \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right) \right\} + c \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial v} \right) \right\} && \text{(linéarité)} \\ &= a \cdot \left\{ a \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right) + c \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right) \right\} + c \cdot \left\{ a \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial g}{\partial v} \right) + c \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial g}{\partial v} \right) \right\} && \text{(par (a) deux fois)} \end{aligned}$$

Le Théorème de Schwarz permet de simplifier le résultat.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2ac \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + c^2 \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \quad (*)$$

✎ De même par rapport à y !

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = b^2 \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2bd \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + d^2 \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \quad (**)$$

✎ Puisque le Théorème de Schwarz peut s'appliquer, on a le choix pour la dérivée partielle seconde croisée à calculer...

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ b \cdot \frac{\partial g}{\partial u} + d \cdot \frac{\partial g}{\partial v} \right\} && \text{(par (b))} \\ &= b \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right) \right\} + d \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial v} \right) \right\} && \text{(linéarité)} \\ &= b \cdot \left\{ a \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right) + c \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right) \right\} + d \cdot \left\{ a \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial g}{\partial v} \right) + c \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial g}{\partial v} \right) \right\} && \text{(par (a) deux fois)} \end{aligned}$$

On simplifie avec le Théorème de Schwarz.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = ab \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (ad + bc) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + cd \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \quad (\dagger)$$

1. D'après les relations $(\star)$ et $(\star\star)$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (a^2 - b^2) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2(ac - bd) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + (c^2 - d^2) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}.$$

Il nous reste [16-14] **deux** degrés de liberté pour définir le changement de variables φ . On va choisir φ de telle sorte que **deux** des trois coefficients de l'EDP en g soient nuls de telle sorte qu'on puisse appliquer l'un des résultats du cours (EDP de référence).

• Une piste est d'imposer $a^2 = b^2$ et $c^2 = d^2$, outre la contrainte $ad - bc \neq 0$. Avec $a = b = 1$ et $c = -d = 1$, on obtient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$$

et on peut conclure : la fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ est une solution de l'EDP

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

si, et seulement si, il existe deux fonctions K_1 et K_2 de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = K_1(u) + K_2(v) = K_1(x + y) + K_2(x - y).$$

• On a omis ici quelques détails qu'on peut omettre avec un peu d'expérience.

• La piste que nous avons choisie pour définir φ est la seule possible...

En effet, si on avait choisi $a = b \neq 0$ et $ac - bd = 0$, on aurait dû prendre $c = d$ et φ n'aurait pas été bijective !

De même, si on avait choisi $a = -b \neq 0$ et $ac - bd = 0$, on aurait dû prendre $c = -d$ et φ n'aurait pas non plus été bijective...

2. Même méthode ! Il faut en outre savoir factoriser... D'après $(\star)$, $(\star\star)$ et $(\dagger)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ = (a - b)^2 \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 4(a - b)(c - d) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + (c - d)^2 \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}. \end{aligned}$$

• Le premier choix de changement de variables consiste à imposer $a = b$ et $c \neq d$. (L'autre choix consiste à imposer $a \neq b$ et $c = d$, ce qui est le *symétrique* du précédent : rien de vraiment différent à en attendre.)

• Prenons donc $a = b = c = 1$ et $d = 0$, c'est-à-dire $u = x + y$ et $v = x$. Il nous reste

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0.$$

Le cours nous donne les solutions de cette EDP de référence : la fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ est une solution de l'EDP si, et seulement si, il existe deux fonctions K_1^0 et K_2^0 de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) &= K_1^0(u) + v \cdot K_2^0(u) \\ &= K_1^0(x + y) + x \cdot K_2^0(x + y). \end{aligned}$$

• Par curiosité, regardons ce qui se passe avec $a = b = c = 1$ et $d = -1$, c'est-à-dire $u = +y$ et $v = x - y$. L'EDP vérifiée par f se ramène une fois encore à la même EDP en g :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0.$$

Par conséquent, la fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ est une solution de l'EDP si, et seulement si, il existe deux fonctions K_1^1 et K_2^1 de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) &= K_1^1(u) + v \cdot K_2^1(u) \\ &= K_1^1(x + y) + (x - y) \cdot K_2^1(x + y) \\ &= \underbrace{[K_1^1(x + y) - (x + y) \cdot K_2^1(x + y)]}_{=K_1^0(x+y)} + \underbrace{x \cdot K_2^1(x + y)}_{=K_2^0(x+y)} \end{aligned}$$

et, comme on le voit, le résultat est présenté différemment — mais c'est bien le même !

3. Toujours pareil... Et il faut toujours savoir factoriser ! L'EDP vérifiée par f devient

$$(a-b)(2a+b) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (4ac+2bd-3ad-3bc) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + (c-d)(2c+d) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0.$$

On va choisir $a = b \neq 0$ et $2c + d = 0$ pour éliminer le premier et le troisième terme en conservant la bijectivité de φ . Dans ces conditions, le coefficient du second terme est égal à $a(c-d) \neq 0$. Une fois encore, on est ramené à l'équation

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$$

et en fixant par exemple $a = b = 1$, $c = 1$ et $d = -2$, c'est-à-dire

$$u = x + y \quad \text{et} \quad v = x - 2y,$$

on conclut comme d'habitude : la fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ est solution de l'EDP si, et seulement si, il existe deux fonctions ψ_1 et ψ_2 de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \psi_1(u) + \psi_2(v) = \psi_1(x + y) + \psi_2(x - 2y).$$

Solution 16

16-16

1. On généralise ici le Théorème fondamental aux fonctions de plusieurs variables et on utilise ce théorème pour caractériser les fonctions constantes sur un ouvert convexe.
- Pour cela, on considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U et une fonction γ de classe $\mathcal{C}^1$ de l'intervalle $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ dans l'ouvert U . On doit comprendre que γ définit une **courbe** tracée dans l'ouvert U .
- En effet, pour tout $t \in [0, 1]$, le vecteur $\gamma(t) \in F$ est en fait un point de U et comme cette fonction γ ne dépend que d'une variable réelle $t \in [0, 1]$, on peut interpréter la variable t comme le **temps** et la fonction γ comme la trajectoire d'un point matériel qui se déplace dans U avec la **vitesse** (instantanée) $\gamma'(t) \in F$.

Tout d'abord, la fonction

$$(f \circ \gamma) : [0, 1] \xrightarrow{\gamma} U \xrightarrow{f} F$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

De plus,

$$\forall t_0 \in [0, 1], \quad d(f \circ \gamma)(t_0) = df[\gamma(t_0)] \circ d\gamma(t_0).$$

Avant d'évaluer cette formule, il faut déjà la décortiquer :

$$d(f \circ \gamma)(t_0) : \mathbb{R} \xrightarrow{d\gamma(t_0)} E \xrightarrow{df[\gamma(t_0)]} F$$

et $d(f \circ \gamma)(t_0) \in L(\mathbb{R}, F)$.

♣ Comme γ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ d'une seule variable réelle, elle est aussi dérivable. Pour relier la dérivée $\gamma' : [0, 1] \rightarrow E$ à l'application linéaire tangente $d\gamma(t_0) : \mathbb{R} \rightarrow E$, il faut revenir au développement limité :

$$\begin{aligned} \gamma(t_0 + h) &= \gamma(t_0) + h \cdot \gamma'(t_0) + o(h) \\ &= \gamma(t_0) + d\gamma(t_0)(h) + o(h). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\forall t_0 \in [0, 1], \quad d\gamma(t_0) = [h \mapsto h \cdot \gamma'(t_0)] \in L(\mathbb{R}, E)$$

et par conséquent

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad d(f \circ \gamma)(t_0)(h) = df[\gamma(t_0)][h \cdot \gamma'(t_0)] = h \cdot \underbrace{df[\gamma(t_0)]}_{\in L(E, F)} \underbrace{[\gamma'(t_0)]}_{\in E}$$

♣ Il est temps de remarquer que $(f \circ \gamma)$ est, tout comme γ , une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ d'une seule variable réelle et donc qu'elle est dérivable !

L'analyse que nous avons faite pour γ s'applique de la même manière, donc

$$\forall t_0 \in [0, 1], \quad d(f \circ \gamma)(t_0) = [h \mapsto h \cdot (f \circ \gamma)'(t_0)]$$

et d'après le calcul précédent

$$\forall t_0 \in [0, 1], \quad (f \circ \gamma)'(t_0) = df[\gamma(t_0)][\gamma'(t_0)] \in F.$$

En fait, en pareil cas, il est beaucoup plus simple de revenir à la définition (le développement limité à l'ordre 1) que d'appliquer le Théorème de différentiation des fonctions composées.

☛ On sait en effet que, pour $h \rightarrow 0_{\mathbb{R}}$,

$$\gamma(t_0 + h) = \gamma(t_0) + h \cdot [\gamma'(t_0) + o(1)]$$

et que, pour $u \rightarrow 0_E$,

$$f(M_0 + u) = f(M_0) + df(M_0)(u) + o(u).$$

On choisit alors $M_0 = \gamma(t_0) \in U$ et $u = \gamma'(t_0) + o(1)$, on substitue le premier développement limité dans le second, on analyse soigneusement chaque terme et on arrive très facilement à la conclusion suivante :

$$(f \circ \gamma)(t_0 + h) = (f \circ \gamma)(t_0) + h \cdot df[\gamma(t_0)][\gamma'(t_0)] + o(h)$$

d'où l'on tire sans effort supplémentaire l'expression de $(f \circ \gamma)'(t_0)$.

☛ Retour à l'exercice : la fonction $f \circ \gamma$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans un espace vectoriel F de dimension finie.

D'après le Théorème fondamental :

$$(f \circ \gamma)(1) - (f \circ \gamma)(0) = \int_0^1 (f \circ \gamma)'(t) dt = \int_0^1 df(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt \in F.$$

2. On établit l'équivalence par double implication.

☛ Si la fonction f est constante sur U , alors $df(M_0) = 0_{E,F}$ pour tout $M_0 \in U$.

|| La géométrie de l'ouvert U n'est pour rien dans ce résultat.

☛ Réciproquement, on suppose que $df(M_0) = 0_{E,F}$ pour tout $M_0 \in U$ et que U est convexe. Quels que soient a et b dans U , on sait que

$$\forall t \in [0, 1], \quad (1-t) \cdot a + t \cdot b \in U.$$

On pose donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \gamma(t) = a + t \cdot (b - a).$$

En tant que fonction polynomiale, la fonction γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \gamma'(t) = b - a \in E.$$

|| La cinématique pour mieux comprendre : la convexité de U nous permet de passer d'un point a de U à n'importe quel autre point b de U avec un mouvement rectiligne uniforme.

D'après la question précédente,

$$f(b) - f(a) = (f \circ \gamma)(1) - (f \circ \gamma)(0) = \int_0^1 \underbrace{df[\gamma(t)]}_{0_{E,F}} \underbrace{[\gamma'(t)]}_{=b-a \in E} dt = \int_0^1 0_F dt = 0_F$$

et donc que f est constante sur U :

$$\forall a, b \in U, \quad f(a) = f(b) \in F.$$

|| Le résultat est encore vrai lorsque l'ouvert U est connexe par arcs. On peut dans ce cas relier deux points quelconques a et b par une "ligne brisée" et adapter la démonstration précédente à un arc paramétré γ continu et affine par morceaux.

Solution 17

16-17

1. || On peut calculer des gradients sans calculer la moindre dérivée partielle.

Pour démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on va d'abord démontrer qu'elle est différentiable. L'expression de la différentielle nous permettra alors de conclure.

☛ Pour $x_0 \in E$ fixé $h \in E$ voisin de 0 ,

$$f(x_0 + h) = \langle x_0 + h | x_0 + h \rangle = f(x_0) + 2 \langle x_0 | h \rangle + \|h\|^2.$$

Par bilinéarité du produit scalaire, l'application $[\mathbf{h} \mapsto 2 \langle \mathbf{x}_0 | \mathbf{h} \rangle]$ est linéaire sur E . D'autre part, $\|\mathbf{h}\|^2 = o(\|\mathbf{h}\|)$ pour $\mathbf{h}$ voisin de 0 .

On a ainsi démontré que f était différentiable en chaque point $\mathbf{x}_0 \in E$:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + 2 \langle \mathbf{x}_0 | \mathbf{h} \rangle + o(\mathbf{h})$$

et que la différentielle de f :

$$df = [\mathbf{x}_0 \mapsto [\mathbf{h} \mapsto 2 \langle \mathbf{x}_0 | \mathbf{h} \rangle]]$$

était une application linéaire (en fonction de $\mathbf{x}_0$) de E dans $L(E, \mathbb{R})$.

L'application df est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur E et par conséquent, l'application f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur E .

• Par définition, le gradient est l'unique vecteur $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ tel que

$$\forall \mathbf{h} \in E, \quad \langle \nabla f(\mathbf{x}_0) | \mathbf{h} \rangle = df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) = 2 \langle \mathbf{x}_0 | \mathbf{h} \rangle.$$

Comme le vecteur $2\mathbf{x}_0$ convient à l'évidence, on en déduit que

$$\forall \mathbf{x}_0 \in E, \quad \nabla f(\mathbf{x}_0) = 2\mathbf{x}_0.$$

2. Les fonctions $h_1 = [t \mapsto \sqrt{t}]$, $h_2 = [t \mapsto 1/t]$ et $h_3 = [t \mapsto 1/t^2]$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur E et strictement positive sur $U = E \setminus \{0\}$, on en déduit d'abord que

$$g_1 : U \xrightarrow{f} \mathbb{R}_+^* \xrightarrow{h_1} \mathbb{R}_+^*$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U et ensuite que

$$g_2 : U \xrightarrow{g_1} \mathbb{R}_+^* \xrightarrow{h_2} \mathbb{R}_+^* \quad \text{et} \quad g_3 : U \xrightarrow{g_1} \mathbb{R}_+^* \xrightarrow{h_3} \mathbb{R}_+^*$$

sont également de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U .

• Remarquons tout d'abord que $f(\mathbf{x}) = (\varphi \circ g_1)(\mathbf{x})$ où $\varphi(r) = r^2$.

Comme $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable, elle est aussi différentiable et

$$d\varphi(r_0) = [t \mapsto \varphi'(r_0) \cdot t] = [t \mapsto 2r_0 \cdot t].$$

D'après la règle de la chaîne,

$$\begin{aligned} \underbrace{df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h})}_{\in \mathbb{R}} &= (d\varphi[g_1(\mathbf{x}_0)] \circ dg_1(\mathbf{x}_0))[\mathbf{h}] \\ &= d\varphi[g_1(\mathbf{x}_0)](dg_1(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h})) \\ &= \underbrace{\varphi'[g_1(\mathbf{x}_0)]}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{dg_1(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h})}_{\in \mathbb{R}}. \end{aligned}$$

On traduit cette égalité avec le gradient : quel que soit $\mathbf{h} \in E$,

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}_0) | \mathbf{h} \rangle = 2\|\mathbf{x}_0\| \cdot \langle \nabla g_1(\mathbf{x}_0) | \mathbf{h} \rangle$$

et par unicité du gradient :

$$\forall \mathbf{x}_0 \in U, \quad \nabla f(\mathbf{x}_0) = \underbrace{2\|\mathbf{x}_0\|}_{\in \mathbb{R}_+^*} \cdot \nabla g_1(\mathbf{x}_0)$$

d'où enfin

$$\forall \mathbf{x}_0 \in U, \quad \nabla g_1(\mathbf{x}_0) = \frac{\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_0\|}.$$

• On procède bien sûr de manière analogue pour $g_2(\mathbf{x}) = 1/g_1(\mathbf{x})$ et $g_3(\mathbf{x}) = 1/[g_1^2(\mathbf{x})]$, mais on va un peu plus vite.

• La relation entre applications linéaires tangentes :

$$dg_2(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) = \frac{-1}{g_1^2(\mathbf{x}_0)} \cdot dg_1(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h})$$

devient en termes de gradient :

$$\langle \nabla g_2(\mathbf{x}_0) | \mathbf{h} \rangle = \frac{-1}{\|\mathbf{x}_0\|^2} \cdot \langle \nabla g_1(\mathbf{x}_0) | \mathbf{h} \rangle = \left\langle \frac{-1}{\|\mathbf{x}_0\|^2} \cdot \frac{\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_0\|} \middle| \mathbf{h} \right\rangle.$$

Par unicité du gradient,

$$\nabla g_2(\mathbf{x}_0) = \frac{-\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_0\|^3}.$$

• De même :

$$\begin{aligned} dg_3(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) &= \frac{-2}{g_1^3(\mathbf{x}_0)} \cdot dg_1(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) \\ \langle \nabla g_3(\mathbf{x}_0) | \mathbf{h} \rangle &= \left\langle \frac{-2}{\|\mathbf{x}_0\|^3} \cdot \frac{\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_0\|} \middle| \mathbf{h} \right\rangle \end{aligned}$$

et donc

$$\nabla g_3(\mathbf{x}_0) = \frac{-2\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_0\|^4}.$$

• Soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d)$, une **base orthonormée** de E .

Pour tout $1 \leq k \leq d$ et tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{g_1(t \cdot \mathbf{e}_k) - g_1(\mathbf{0}_E)}{t - 0} = \frac{|t| \|\mathbf{e}_k\|}{t} = \text{sgn}(t).$$

Il y a une limite à gauche (-1) et une limite à droite $(+1)$ lorsque t tend vers 0 , mais ces limites sont distinctes, donc ce taux d'accroissement n'a pas de limite lorsque t tend vers 0 .

Aucune dérivée partielle de g_1 n'est donc définie en $\mathbf{0}$, bien que g_1 soit continue sur E (inégalité triangulaire) et de classe $\mathcal{C}^1$ sur U .

3. Remarquons pour commencer que

$$\forall \mathbf{x} \in U, \quad \varphi(\mathbf{x}) = g_2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = g_2(\mathbf{x}) \cdot I_E(\mathbf{x}).$$

La fonction φ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U en tant que produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U .

On applique la règle de Leibniz pour calculer l'application linéaire tangente.

$$\begin{aligned} d\varphi(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) &= dg_2(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) \cdot I_E(\mathbf{x}_0) + g_2(\mathbf{x}_0) \cdot I_E(\mathbf{h}) && \text{(par linéarité de } I_E \text{ et [15])} \\ &= \left\langle \frac{-2 \cdot \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_0\|^4} \middle| \mathbf{h} \right\rangle \cdot \mathbf{x}_0 + \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{x}_0\|^2} \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{x}_0\|^2} \cdot \left(\mathbf{h} - 2 \cdot \frac{\langle \mathbf{x}_0 | \mathbf{h} \rangle}{\|\mathbf{x}_0\|^2} \cdot \mathbf{x}_0 \right) \end{aligned}$$

Solution 18

16-18

Appliquons la règle de la chaîne sans trop réfléchir :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Or x et y sont indépendantes et $z(x, y) = x + y$, donc

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 1.$$

Il reste donc

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

En simplifiant par $\frac{\partial w}{\partial x}$, on en déduit que

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ce qui vient contredire la définition : comme $w = x + y + z$, il faut bien que $\frac{\partial w}{\partial z} = 1$.

• Que s'est-il passé ?

On a traité w tantôt comme une fonction de trois variables (dans le membre de droite, ça se voyait) :

$$w = w(x, y, z) = x + y + z$$

tantôt comme une fonction de deux variables (dans le membre de gauche, mais ça ne se voyait pas) :

$$w = w(x, y) = x + y + (x + y) = 2x + 2y.$$

Sur ces deux expressions, il est clair que la valeur de $\frac{\partial w}{\partial x}$ n'est pas la même, ce qui explique la contradiction relevée.

♣ Mais comment éviter les ennuis alors ?

Très simplement : en traitant ce genre de situation comme un **changement de variables**.

Il faut donc distinguer deux fonctions mathématiques :

— une fonction de trois variables :

$$w_1(r, s, t) = r + s + t$$

— une fonction de deux variables :

$$w_2(x, y) = 2x + 2y$$

qui sont reliées par un changement de variables :

$$\varphi(x, y) = (x, y, x + y)$$

via la relation

$$w_2(x, y) = (w_1 \circ \varphi)(x, y).$$

Cela étant posé, on peut appliquer la règle de la chaîne en toute sérénité et laisser les notations travailler à notre place :

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial w_1}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x}.$$

Dans le premier membre, on a une fonction de x (et donc de y).

Dans le second membre, on fait apparaître une fonction des variables r, s et t (il s'agit de w_1) et on traite aussi r, s et t comme des fonctions de x et y :

$$r(x, y) = x, \quad s(x, y) = y, \quad t(x, y) = x + y.$$

Après simplification, il reste alors

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{\partial w_1}{\partial t}$$

c'est-à-dire $2 = 1 + 1$. La contradiction s'est évaporée !

Au premier membre, il fallait lire :

$$\frac{\partial w_2}{\partial x}(x, y)$$

tandis qu'au second membre, il fallait prendre soin de lire :

$$\frac{\partial w_1}{\partial r}(\varphi(x, y))$$

car il s'agit aussi d'une fonction de x et y (pour des raisons d'homogénéité).

Solution 19

16-19

1. Si la fonction $g :]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors la composée

$$f : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow &]c, d[\\ (x, y) & \longmapsto & y \end{array} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \begin{array}{ccc} & & \\ & & \longmapsto g(y) \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et il est clair que

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0. \quad (*)$$

♣ Réciproquement, on suppose que $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ est une solution de $(*)$.

On fixe $c < y_0 < d$. La fonction

$$\begin{array}{ccc}]a, b[& \longrightarrow & \Omega \\ x & \longmapsto & (x, y_0) \end{array} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \begin{array}{ccc} & & \longmapsto f(x, y_0) \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]a, b[$ et sa dérivée est, par hypothèse, identiquement nulle. Cette fonction est donc constante. La valeur de cette constante dépend *a priori* de la valeur de y_0 qui a été choisie. On conclut donc :

$$\forall c < y_0 < d, \exists K(y_0) \in \mathbb{R}, \forall a < x < b, \quad f(x, y_0) = K(y_0).$$

On a ainsi démontré qu'il existait une fonction $K :]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad f(x, y) = K(y).$$

De plus, si on choisit une valeur arbitraire $a < x_0 < b$, on obtient

$$\forall y \in]c, d[, \quad K(y) = f(x_0, y)$$

ce qui prouve que la fonction K est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]c, d[$:

$$\begin{array}{ccccc}]c, d[& \longrightarrow & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & (x_0, y) & \longmapsto & f(x_0, y) \end{array}$$

(par composition).

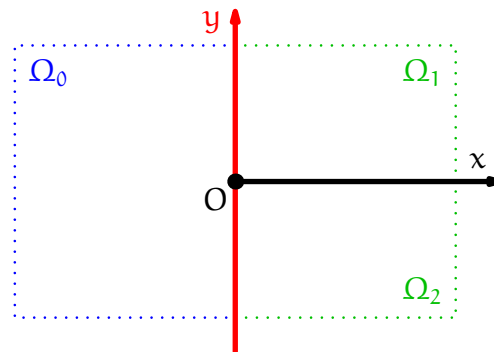
2.

|| Le contre-exemple suivant montre comment on étudie la régularité d'une fonction de deux variables définies par morceaux. (On suit bien entendu la méthode générale : existence des dérivées partielles, puis continuité des dérivées partielles.)

On considère la fonction f définie de la manière suivante :

- pour $x < 0$ et $y \in \mathbb{R}$, on pose $f(x, y) = 0$;
- pour $x \geq 0$ et $y > 0$, on pose $f(x, y) = x^2$;
- pour $x \geq 0$ et $y < 0$, on pose $f(x, y) = -x^2$.

Cette fonction est définie sur l'ouvert Ω obtenu en retirant le demi-axe des abscisses positives de $\mathbb{R}^2$ (en trait épais noir sur la figure).

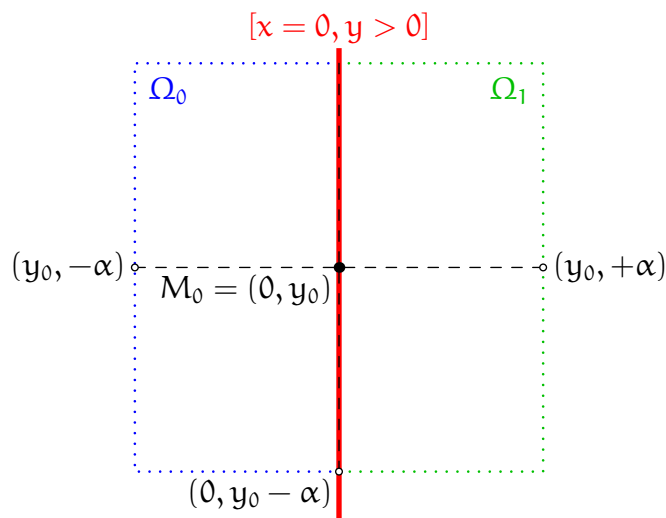


Le graphe de cette fonction ressemble clairement à la surface qui figure dans le cours.

- L'ouvert Ω sur lequel est définie f se décompose en quatre parties :
 - sur l'ouvert $\Omega_0 =]-\infty, 0[\times \mathbb{R}$, la fonction f est *constante* et donc $\mathcal{C}^1$;
 - sur l'ouvert $\Omega_1 =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, la fonction f est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^1$;
 - de même sur l'ouvert $\Omega_2 =]0, +\infty[\times]-\infty, 0[$;
 - les trois morceaux précédents se raccordent le long de l'axe des ordonnées (en trait épais rouge sur la figure) et c'est la régularité de ce raccord que nous allons maintenant étudier.
- Plus précisément, on raccorde les ouverts Ω_0 et Ω_1 le long de la demi-droite ouverte $[x = 0] \cap [y > 0]$; on raccorde les ouverts Ω_0 et Ω_2 le long de la demi-droite ouverte $[x = 0] \cap [y < 0]$. (Il est encore temps de remarquer que nous n'avons pas défini f à l'origine.)
- Par symétrie, nous allons nous borner à étudier l'existence des dérivées partielles en un point $M_0 = (x = 0, y = y_0 > 0)$ et pour cela, nous allons travailler sur le voisinage V_0 de ce point défini par

$$M_0 + \mathbf{h} \in V \iff \|\mathbf{h}\|_\infty < \alpha$$

où le réel $\alpha > 0$ est choisi assez petit pour que $y_0 - \alpha > 0$.



|| Pour calculer les dérivées partielles, on se déplace parallèlement aux axes de coordonnées, c'est-à-dire **sur les lignes de tirets** de la figure.

Pour $0 < |t| < \alpha$, on pose ici $\mathbf{h} = (t, 0)$, donc $M_0 + \mathbf{h} \in V_0$ et

$$\frac{f(0+t, y_0) - f(0, y_0)}{t-0} = \frac{f(t, y_0)}{h} = \begin{cases} t & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

et donc

$$\forall t \neq 0, \quad \left| \frac{f(0+t, y_0) - f(0, y_0)}{t-0} - 0 \right| \leq |t|$$

ce qui prouve que f admet une dérivée partielle selon x au point $M_0 = (0, y_0)$ et que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) = 0.$$

Pour $0 < |t| < \alpha$, on pose ici $\mathbf{h} = (0, t)$, donc $M_0 + \mathbf{h} \in V_0$ et comme

$$\frac{f(0, y_0+t) - f(0, y_0)}{t-0} = 0,$$

la fonction f admet une dérivée partielle selon y au point $M_0 = (0, y_0)$ avec

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, y_0) = 0.$$

• Il reste maintenant à justifier la continuité des deux dérivées partielles en chaque point $M_0 \in [x=0] \cap [y \neq 0]$. Pour cela, nous allons comparer les valeurs des dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

au point de référence $M_0 \in \Omega$ et en un point $M \in \Omega$ voisin de M_0 .

Plus précisément, nous considérerons un point M choisi dans le voisinage V_0 du point M_0 défini plus haut.

Commençons par le cas le plus simple : pour tout $M \in V_0$, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(M)$ est nulle. En tant que fonction constante sur V_0 , cette fonction est en particulier continue au point $M_0 \in V_0$.

|| L'autre dérivée partielle n'étant pas constante, il va falloir s'employer un peu plus pour étudier son cas !

Considérons un déplacement $\mathbf{h} = (h_x, h_y)$ avec $|h_x| < \alpha$ et $|h_y| < \alpha$, de telle sorte que $\|\mathbf{h}\|_\infty < \alpha$ et $M = M_0 + \mathbf{h} \in V_0$.

D'après les calculs de dérivées partielles, il faut distinguer deux cas :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(M) - \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(h_x, y_0 + h_y) \right| = \begin{cases} 0 & \text{si } h_x \leq 0, \\ 2h_x & \text{si } h_x > 0. \end{cases}$$

Quoi qu'il en soit,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(M_0 + \mathbf{h}) - \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \right| \leq 2\|\mathbf{h}\|_\infty$$

ce qui prouve que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est bien continue au point M_0 .

• Bien sûr, la même méthode s'applique, avec les mêmes résultats, en un point $M_0 = (0, y_0 < 0)$.

• On a démontré que f admettait des dérivées partielles en chaque point de Ω et que ses dérivées partielles étaient continues en chaque point de Ω , c'est-à-dire (Théorème fondamental) que f était bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω .

En outre, on a bien vérifié que

$$\forall M \in \Omega, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = 0$$

et cependant

$$\forall x_0 > 0, \quad f(x_0, 1) = 1 \neq f(x_0, -1) = -1$$

ce qui prouve que les valeurs prises par $f(x, y)$ ne dépendent pas que de x_0 !

Solution 20

16-20

1. On commence par étudier la régularité de f .

Les deux fonctions $[(x, t) \mapsto x + ct]$ et $[(x, t) \mapsto x - ct]$ sont linéaires, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

Ici, les fonctions g et h sont supposées de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Par composition, les fonctions

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto & x + ct & \longmapsto & g(x + ct) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto & x - ct & \longmapsto & h(x - ct) \end{array}$$

sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que somme de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

✚ Pour calculer les dérivées partielles secondes, le bon sens recommande de calculer d'abord les dérivées partielles premières, de les simplifier et de les re-dériver enfin.

On l'a vu, on *compose* des fonctions pour calculer f . Il nous faudra donc appliquer la règle de la chaîne pour calculer les dérivées partielles.

Pour y parvenir sans encombre, nous allons convenir que $g = g(u)$ est une fonction de **la variable** $u \in \mathbb{R}$, que $h = h(v)$ est une fonction de **la variable** $v \in \mathbb{R}$.

Dans le même esprit, nous considérons aussi les **fonctions** $u(x, t) = x + ct$ et $v(x, t) = x - ct$, qui nous donnent :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -c.$$

On dérive une somme...

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{dg}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dh}{dv} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = g'(x + ct) + h'(x - ct) \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{dg}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dh}{dv} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = c \cdot [g'(x + ct) - h'(x - ct)] \end{aligned}$$

Et on dérive encore...

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = g''(x + ct) + h''(x - ct) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) = c^2 \cdot [g''(x + ct) + (-1)^2 h''(x - ct)] \end{aligned}$$

pour arriver à l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

2. a. L'application $\varphi = [(x, t) \mapsto (x + ct, x - ct)]$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, espace de dimension finie. Par conséquent, il s'agit bien d'une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

La matrice (relative à la base canonique) de cet endomorphisme est

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 1 & -c \end{pmatrix}$$

et comme $c > 0$, cette matrice est inversible. Donc φ est bien une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Enfin, la bijection réciproque est linéaire (comme φ ...), donc elle est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

Conclusion : φ est bien un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (et Huyghens ne le savait pas).

✚ En tant que composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$:

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\varphi^{-1}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

la fonction $F = f \circ \varphi^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. b. Nous allons maintenant chercher une EDP *de référence* vérifiée par la fonction F . Il nous faut pour cela exprimer les dérivées partielles de f en fonction des dérivées partielles de F et donc utiliser la règle de la chaîne (puisque $f = F \circ \varphi$ est une *composée* de fonctions).

Nous allons donc encore utiliser les *fonctions* $u = u(x, t) = x + ct$ et $v = v(x, t) = x - ct$ et considérer que F est une fonction des *variables* u et v .

Techniquement, ces deux fonctions u et v sont les **composantes** du changement de variables φ .

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x, t) = (u(x, t), v(x, t))$$

♣ On calcule d'abord les dérivées premières...

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} \quad (\star_x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = c \cdot \frac{\partial F}{\partial u} - c \cdot \frac{\partial F}{\partial v} \quad (\star_t)$$

Pour calculer les dérivées secondes, on dérive les dérivées premières.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} \right) \quad (\dagger_x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v} \right) \quad (\dagger_t)$$

Pour calculer les dérivées partielles de f , on a appliqué la règle de la chaîne parce qu'on considère ici que $f = f(x, t)$ est en fait une composée de fonctions :

$$f(x, t) = F(u(x, t), v(x, t)).$$

Dans les expressions des dérivées secondes qu'on a obtenues, c'est exactement la même chose, mais ça se voit mieux ! En effet, dans les parenthèses, il y a des fonctions de u et v . Comme on veut les dériver par rapport à x et t , c'est qu'on veut les traiter comme des fonctions de x et t et pour cela, on fait intervenir φ .

Maintenant, on y retourne ! Il s'agit d'appliquer aux expressions entre parenthèses dans $(\dagger_x)$ et $(\dagger_y)$ les formules $(\star_x)$ et $(\star_y)$. On peut se souvenir de la manœuvre en imaginant qu'on *compose* la règle de la chaîne avec elle-même.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right) \right\} + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right) \right\} \\ &= \underbrace{\left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right) \right\}}_{\star_x} + \underbrace{\left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right) \right\}}_{\star_x} \end{aligned}$$

|| On a appliqué deux fois la formule $(\star_x)$, une fois en remplaçant F par $\frac{\partial F}{\partial u}$, l'autre fois en remplaçant F par $\frac{\partial F}{\partial v}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= c \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right) \right\} - c \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right) \right\} \\ &= c \cdot \underbrace{\left\{ c \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right) - c \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right) \right\}}_{\star_t} - c \cdot \underbrace{\left\{ c \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right) - c \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right) \right\}}_{\star_t} \end{aligned}$$

(Idem, en appliquant $\star_t$.)

♣ Le plus dur est fait ! On va simplifier en tenant compte du Théorème de Schwarz, qui peut être appliqué puisque F est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= c^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2c^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + c^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}. \quad (\ddagger)$$

La relation précédente peut aussi bien être comprise comme une égalité entre fonctions des variables x et t :

$$\forall (x, t) \in U = \mathbb{R}^2, \\ [\partial_1(\partial_1 f)](x, t) - \frac{1}{c^2} \cdot [\partial_2(\partial_2 f)](x, t) = 4[\partial_1(\partial_2 F)](\underbrace{\varphi(x, t)}_{=(u, v)})$$

que comme une égalité entre fonctions des variables u et v :

$$\forall (u, v) \in W = \mathbb{R}^2, \\ [\partial_1(\partial_1 f)](x, t) - \frac{1}{c^2} \cdot [\partial_2(\partial_2 f)](\underbrace{\varphi^{-1}(u, v)}_{=(x, t)}) = 4[\partial_1(\partial_2 F)](u, v)$$

parce que φ est un difféomorphisme de U sur W .

☛ La bijectivité de φ nous permet de déduire de (‡) que la fonction $f \in \mathcal{C}^2(U)$ est une solution sur U de l'EDP

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

si, et seulement si, la fonction $F = f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{C}^2(W)$ est une solution sur W de l'EDP

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0.$$

(Non, le facteur 4 n'a aucun intérêt.)

☛ Attention ! Lorsque le changement de variables n'est pas linéaire, les ouverts U et W sont différents et ça peut créer de la misère si on n'a pas pris dès le début l'habitude de distinguer l'ouvert U qui contient les (x, t) et l'ouvert W qui contient les (u, v) .

Bref... On s'est ramené à la résolution d'une EDP de référence. Donc on sait que : la fonction F est solution de

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$$

si, et seulement si, il existe deux fonctions g et h de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (u, v) \in W, \quad F(u, v) = g(u) + h(v).$$

On invoque une dernière fois le changement de variables : la fonction $f = F \circ \varphi$ est donc solution de

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

si, et seulement si, il existe deux fonctions g et h de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, t) \in U, \quad f(x, t) = F(\varphi(x, t)) = F(x + ct, x - ct) \\ = g(x + ct) + h(x - ct).$$

Un peu de physique pour terminer ?

Le terme $g(x + ct)$ prend la même valeur pour $(t, x) = (t_0, x_0)$ et pour $(t, x) = (0, x_0 + ct_0)$. Comme $c > 0$, si $t_0 > 0$, alors on a $x_0 < x_0 + ct_0$: l'onde décrite par $g(x + ct)$ progresse de la droite vers la gauche.

Symétriquement, le terme $g(x - ct)$ prend la même valeur pour $(t, x) = (t_0, x_0)$ et pour $(t, x) = (0, x_0 - ct_0)$. Cette fois, si $t_0 > 0$, alors $x_0 > x_0 - ct_0$: l'onde décrite par $h(x - ct)$ progresse de la gauche vers la droite.

Gloire à Huyghens !

Solution 21

16-21

1. Posons $\varphi(u, v) = (\frac{u^2 + v^2}{2}, v)$ pour tout $(u, v) \in \Delta = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

☛ Comme les deux composantes de φ :

$$x(u, v) = \frac{u^2 + v^2}{2} \quad \text{et} \quad y(u, v) = v$$

sont polynomiales, il est clair que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Δ .

• Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On cherche à quelle condition sur (x, y) le système

$$\varphi(u, v) = (x, y)$$

admet au moins une solution $(u, v) \in \Delta$ (surjectivité de φ) et si ce système admet exactement une solution (injectivité de φ).

Il est clair que

$$\begin{cases} x = \frac{u^2+v^2}{2} \\ y = v \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y^2 = u^2 \\ y = v \end{cases}$$

|| Assurez-vous de bien comprendre qu'il s'agit ici de 2 implications !

On impose $(u, v) \in \Delta$, donc $u > 0$ et $u^2 > 0$. La première équation montre donc que, si $2x - y^2 \leq 0$, alors ce système ne peut pas avoir de solution dans Δ .

• Réciproquement, si $2x - y^2 > 0$, alors

$$\begin{cases} 2x - y^2 = u^2 \\ y = v \end{cases} \iff \begin{cases} u = \sqrt{2x - y^2} \\ v = y \end{cases}$$

car $u > 0$.

On a ainsi démontré que ce système admettait une unique solution pour tout $(x, y) \in U = [y^2 - 2x < 0]$ et n'admettait pas de solution pour $(x, y) \notin U$.

Par conséquent, φ réalise bien une bijection de Δ sur U et

$$\forall (x, y) \in U, \quad \varphi^{-1}(x, y) = (\sqrt{2x - y^2}, y).$$

La deuxième composante est linéaire, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et, par restriction, sur U . Quant à la première composante :

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{\text{polyn.}} & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & 2x - y^2 & \longmapsto & \sqrt{2x - y^2} \end{array}$$

elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U en tant que composée : on rappelle que $\sqrt{\cdot}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (mais seulement continue sur $\mathbb{R}_+$).

2. Puisque nous disposons d'un authentique changement de variables certifié, eh bien, changeons de variables ! On pose :

$$\forall (u, v) \in \Delta, \quad g(u, v) = (f \circ \varphi)(u, v)$$

ce qui revient à $f(x, y) = (g \circ \varphi^{-1})(x, y)$ pour tout $(x, y) \in U$.

Comme φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Δ , il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U si, et seulement si, g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Δ .

• Il est clair sur la définition de φ que

$$\frac{\partial x}{\partial u} = u, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = v, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 1.$$

• Appliquons maintenant la règle de la chaîne pour exprimer les dérivées partielles de g en fonction des dérivées partielles de f .

Comme

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = u \cdot \frac{\partial f}{\partial x},$$

on peut en déduire que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} &= \frac{\partial}{\partial u} \left(u \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + u \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right\} && \text{(dérivation d'un produit)} \\ &= 1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + u \cdot \left\{ u \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right\} && \text{(règle de la chaîne au 1er ordre)} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} + u^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Comme d'habitude, il importe d'être bien conscient du sens exact de ce qui est écrit !

$$\forall (u, v) \in \Delta, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v)) + u^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\varphi(u, v))$$

☞ Pour ceux que ça intéresse...

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial v} &= v \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} &= \frac{\partial f}{\partial x} + v^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2v \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{aligned}$$

(On a fait, bien entendu, usage du Théorème de Schwarz.)

☛ Revenons à l'EDP en f . Comme φ réalise une bijection de Δ sur U , la propriété :

$$\forall (x, y) \in U, \quad (2x - y^2) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - f(x, y) = 0$$

équivalent à la propriété :

$$\begin{aligned} \forall (u, v) \in \Delta, \\ \left\{ \underbrace{[2x(u, v) - y^2(u, v)]}_{=u^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\varphi(u, v)) + \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v)) \right\} - f(\varphi(u, v)) = 0 \end{aligned}$$

qui équivaut elle-même, d'après les calculs de dérivées partielles à la propriété :

$$\forall (u, v) \in \Delta, \quad \left\{ \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) \right\} - g(u, v) = 0.$$

|| L'EDP précédente est une équation différentielle masquée car on ne dérive ici que par rapport à une seule variable !

Fixons $v_0 \in \mathbb{R}$. La fonction

$$z = [u \mapsto g(u, v_0)]$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que composée :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \Delta & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & (u, v_0) & \longmapsto & g(u, v_0) \end{array}$$

et vérifie l'équation différentielle :

$$\forall u > 0, \quad z''(u) - z(u) = 0$$

donc il existe deux constantes réelles $A(v_0)$ et $B(v_0)$ telles que

$$\forall u > 0, \quad g(u, v_0) = A(v_0) \operatorname{ch} u + B(v_0) \operatorname{sh} u.$$

|| Comme on raisonne à $v = v_0$ fixé, les constantes d'intégration dépendent a priori de v_0 .

☛ Il existe donc deux fonctions $A, B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (u, v) \in \Delta, \quad g(u, v) = A(v) \operatorname{ch} u + B(v) \operatorname{sh} u.$$

En particulier, comme $1 > 0$ et $2 > 0$,

$$\forall v \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} g(1, v) = \operatorname{ch} 1 \cdot A(v) + \operatorname{sh} 1 \cdot B(v) \\ g(2, v) = \operatorname{ch} 2 \cdot A(v) + \operatorname{sh} 2 \cdot B(v). \end{cases}$$

Le déterminant de ce système (d'inconnues $A(v)$ et $B(v)$) est égal

$$\operatorname{ch} 1 \cdot \operatorname{sh} 2 - \operatorname{sh} 1 \cdot \operatorname{ch} 2 = \operatorname{sh}(2 - 1) \neq 0$$

donc on peut exprimer $A(v)$ et $B(v)$ comme combinaisons linéaires de $g(1, v)$ et $g(2, v)$. Or les deux fonctions

$$[v \mapsto (1, v) \mapsto g(1, v)] \quad \text{et} \quad [v \mapsto (2, v) \mapsto g(2, v)]$$

sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (en tant que composées de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$), donc les deux fonctions A et B sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (en tant que combinaisons linéaires, cette fois).

♣ Réciproquement, quelles que soient les fonctions $A, B \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, la fonction g définie par

$$\forall (u, v) \in \Delta, \quad g(u, v) = A(v) \cdot \operatorname{ch} u + B(v) \cdot \operatorname{sh} u$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Δ car $\mathcal{C}^2(\Delta)$ est stable par produit et par somme et que :

$$\begin{array}{ccccc} \Delta & \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} & \mathbb{R} & \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & u & \mapsto & \operatorname{ch} u \\ (u, v) & \mapsto & u & \mapsto & \operatorname{sh} u \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} \Delta & \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} & \mathbb{R} & \xrightarrow{\mathcal{C}^2} & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & v & \mapsto & A(v) \\ (u, v) & \mapsto & v & \mapsto & B(v) \end{array}$$

D'autre part, il est clair que la fonction g vérifie l'équation

$$\forall (u, v) \in \Delta, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) - g(u, v) = 0.$$

On connaît donc l'ensemble des solutions de cette EDP.

♣ Le changement de variables φ permet alors de revenir à la fonction f pour conclure : la fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U})$ est une solution de l'EDP

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \quad (2x - y^2) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - f(x, y) = 0$$

si, et seulement si, il existe deux fonctions A et B de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (u, v) \in \Delta, \quad f(\varphi(u, v)) = g(u, v) = A(v) \cdot \operatorname{ch} u + B(v) \cdot \operatorname{sh} u$$

c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \quad f(x, y) = A(y) \cdot \operatorname{ch} \sqrt{2x - y^2} + B(y) \cdot \operatorname{sh} \sqrt{2x - y^2}.$$

Solution 22

16-22

1. En posant

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

on obtient

$$\frac{1}{2} X^\top \cdot S \cdot X - B^\top \cdot X = \frac{1}{2} (ax^2 + 2bxy + cy^2) - (dx + ey).$$

On peut donc choisir

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

|| *Le fait que ce choix soit le seul possible n'est pas à justifier ici.*

2. Comme la matrice $H^\top \cdot S \cdot X_0$ appartient à $\mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$, elle est symétrique et comme S est une matrice symétrique, alors

$$H^\top \cdot S \cdot X_0 = (H^\top \cdot S \cdot X_0)^\top = X_0^\top \cdot S \cdot H.$$

La relation

$$f(X_0 + H) = \left[\frac{1}{2} X_0^\top \cdot S \cdot X_0 - B^\top \cdot X_0 \right] + (X_0^\top \cdot S - B^\top) H + \frac{1}{2} H^\top \cdot S \cdot H$$

en découle alors immédiatement.

♣ Comme la matrice S est inversible, on peut choisir $X_0 = S^{-1}B$. De la sorte, par symétrie de S ,

$$X_0^\top \cdot S - B^\top = B^\top \cdot S^{-1} \cdot S - B^\top = 0$$

donc

$$\forall H \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \quad f(X_0 + H) = f(X_0) + H^\top \cdot S \cdot H.$$

♣ On peut justifier ce choix de X_0 de manière plus savante. Comme f est polynomiale, elle est en particulier de classe $\mathcal{C}^1$ et si elle atteint un extremum en un point X_0 , alors le gradient de f doit être nul en X_0 .

L'application $[(H_1, H_2) \mapsto H_1^\top \cdot S \cdot H_2]$ est bilinéaire sur un espace de dimension finie (l'espace $E = \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes), donc, pour toute norme $\|\cdot\|$ sur E , il existe une constante K telle que

$$\forall (H_1, H_2) \in E \times E, \quad \|H_1^\top \cdot S \cdot H_2\| \leq K \|H_1\| \|H_2\|.$$

En particulier, pour H proche de 0,

$$\begin{aligned} f(X_0 + H) &= f(X_0) + (X_0^\top \cdot S - B^\top)H + \mathcal{O}(\|H\|^2) \\ &= f(X_0) + (X_0^\top \cdot S - B^\top)H + o(\|H\|). \end{aligned}$$

On tient ainsi le développement limité à l'ordre 1 de f en X_0 et par conséquent,

$$\nabla f(X_0) = (X_0^\top \cdot S - B^\top)^\top = SX_0 - B.$$

Comme S est inversible, le vecteur X_0 choisi par l'énoncé est donc le seul point critique de f .

3. La matrice S est symétrique réelle. Il existe donc une matrice orthogonale P telle que $P^\top \cdot S \cdot P$ soit une matrice diagonale.

4. Comme $\text{tr}(S) = 4 = 3 + 1$ et que $\det(S) = 3 = 3 \times 1$, les valeurs propres de S sont 3 et 1. On peut donc choisir la matrice P de telle sorte que $P^\top \cdot S \cdot P = \text{Diag}(3, 1)$.

• Comme la matrice P est orthogonale, alors

$$S = P(P^\top \cdot S \cdot P)P^\top = P\Delta P^\top \quad \text{et} \quad PP^\top = I_2.$$

Ainsi,

$$\forall H \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \quad H^\top \cdot S \cdot H = H^\top \cdot P \cdot \Delta \cdot P^\top \cdot H \quad \text{et} \quad H^\top \cdot P \cdot P^\top \cdot H = H^\top \cdot H$$

et on sait que $H^\top H > 0$ pour tout $H \neq 0$.

Enfin, en notant

$$P^\top H = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

on a

$$(P^\top P^\top H)\Delta(P^\top H) = 3u^2 + v^2 \geq u^2 + v^2 = (P^\top P^\top H)(P^\top H).$$

Finalement, pour tout $H \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non nul,

$$H^\top SH \geq H^\top H > 0.$$

5. On déduit de ce qui précède que

$$\forall H \neq 0, \quad f(X_0 + H) = f(X_0) + \frac{1}{2}H^\top SH > f(X_0)$$

donc que f atteint un minimum global en X_0 .

De même, pour $H_0 \neq 0$ et $H = t \cdot H_0$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(X_0 + t \cdot H_0) \geq f(X_0) + \frac{H_0^\top H_0}{2}t^2$$

et comme $H_0^\top H_0 > 0$, on en déduit que $f(X_0 + t \cdot H_0)$ tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$, donc la fonction f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}^2$.

Solution 23

16-23

1. La fonction $f = [(x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy]$ est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\Omega = \mathbb{R}^2$.

En particulier, la fonction $[x \mapsto f(x, 0) = x^3]$ n'est ni majorée, ni minorée (elle tend vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ et vers $-\infty$ lorsque $x \rightarrow -\infty$), donc la fonction f n'a ni maximum global, ni minimum global.

Rien n'interdit en revanche un maximum local (valeur $f(M_0)$ plus grande que toutes les autres valeurs prises par f sur un disque de centre M_0 et de rayon assez petit) ou un minimum local.

2. On calcule la jacobienne de f en tout point $M = (x, y)$ de Ω .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = 3x^2 - 3y \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = -3x + 3y^2$$

Si la jacobienne est nulle, alors $y = x^2$ et $x = y^2$, donc $y = y^4$ et donc $y = 0$ ou $y = 1$. On en déduit que les seuls points critiques possibles de f sont $M_0 = (0, 0)$ et $M_1 = (1, 1)$.

Il suffit de revenir à la jacobienne pour constater que ces deux points sont *effectivement* deux points critiques de f .

3. Calculons maintenant la hessienne de f .

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) = 6x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M) = -3 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M) = 6y$$

|| Inutile d'appliquer le Théorème de Schwarz, on se contente de calculer et de constater, une fois de plus, que Schwarz ne s'est pas trompé.

Le développement limité à l'ordre deux au voisinage d'un point $M = (x_0, y_0)$ est donné par

$$\begin{aligned}
 f(M_0 + \mathbf{h}) &= f(M_0) \\
 &+ (x - x_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) + (y - y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) && \text{(1er ordre)} \\
 &+ \frac{1}{2} \left[(x - x_0)^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0) \right. \\
 &\quad + 2(x - x_0)(y - y_0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0) \\
 &\quad \left. + (y - y_0)^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0) \right] && \text{(2nd ordre)} \\
 &+ o(\|\mathbf{h}\|^2) && \text{(reste)}
 \end{aligned}$$

où $\mathbf{h} = (x, y)$ et $\|\mathbf{h}\|^2 = x^2 + y^2$.

• On rappelle que le terme du second ordre est la **forme quadratique** associée à la matrice hessienne :

$$[\mathbf{h} \mapsto \langle \mathbf{h} | \mathbf{H} \cdot \mathbf{h} \rangle = {}^t \mathbf{h} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{h}]$$

et que la matrice $\mathbf{H}$, **symétrique réelle**, ne demande qu'à être diagonalisée.

• **Étude au voisinage de $M_0 = (0, 0)$**

Le point M_0 est un point critique : le terme d'ordre 1 est nul. L'évaluation de la hessienne au point M_0 nous donne alors

$$f(M_0 + \mathbf{h}) = f(M_0) - 3xy + o(x^2 + y^2) = -3xy + o(x^2 + y^2)$$

(avec $M_0 + \mathbf{h} = (x, y)$). La matrice hessienne au point M_0 est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est strictement négatif, donc elle admet une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative.

|| Comme la trace est nulle, ces valeurs propres sont en fait opposées.

La valeur $f(M_0) = 0$ n'est donc ni un maximum, ni un minimum.

• **Étude au voisinage de $M_1 = (1, 1)$**

On pose encore $\mathbf{h} = (x, y)$ et un calcul purement algébrique (développement, regroupement, simplification) nous donne :

$$\begin{aligned}
 f(M_1 + \mathbf{h}) &= f(1 + x, 1 + y) = f(1, 1) + 3(x^2 + y^2 - xy) + (x^3 + y^3) \\
 &= -1 + 3(x^2 + y^2 - xy) + (x^3 + y^3).
 \end{aligned}$$

La hessienne au point M_1 est donc la matrice

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est strictement positif (valeurs propres de même signe) et la trace est strictement positive (donc valeurs propres strictement positives).

La matrice hessienne au point M_1 est donc définie positive. Par conséquent, $f(M_1)$ est un minimum local strict :

- *minimum* parce que les autres de f sont plus grandes que $f(M_1)$;
- *local* parce que f n'est pas majorée et prend donc des valeurs (beaucoup) plus grandes que $f(M_1)$;
- *strict* parce qu'à proximité de M_1 , la fonction f ne prend que des valeurs strictement supérieures à $f(M_1)$.

Solution 24

16-24

On recherche ici le minimum d'une fonction au moyen d'une fonction auxiliaire convexe.

• La fonction φ est une fonction rationnelle et son dénominateur ne s'annule en aucun point de

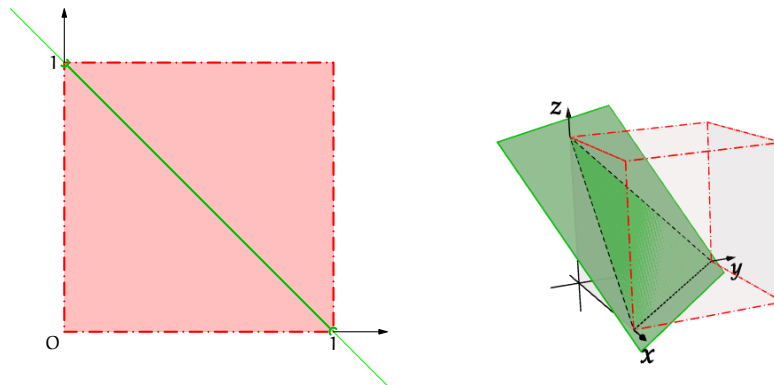
$$\Omega =]0, 1[^n \cap [x_1 + \dots + x_n = 1].$$

La fonction φ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω .

Quelle est la nature géométrique de Ω ?

En dimension $n = 2$, c'est l'intersection du carré ouvert $]0, 1[\times]0, 1[$ avec la droite affine d'équation $[x + y = 1]$, c'est donc un intervalle ouvert et borné.

En dimension $n = 3$, c'est l'intersection du cube ouvert $]0, 1[^3$ avec le plan affine d'équation $[x + y + z = 1]$, c'est donc un triangle ouvert.



Étudions maintenant la nature topologique de Ω .

- Étant contenu dans un (hyper)cube, Ω est une partie bornée.
Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, le point

$$M_p = \left(\frac{1}{p}, \frac{2}{n} - \frac{1}{p}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)$$

appartient à Ω (toutes ses coordonnées sont strictement comprises entre 0 et 1 ; leur somme est égale à 1). Si p tend vers $+\infty$, le point M_p tend vers le point limite

$$M_\infty = \left(0, \frac{2}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)$$

qui n'appartient plus à Ω : la première coordonnée est nulle ! Ainsi, Ω n'est pas stable par passage à la limite, donc pas fermée et donc pas compacte.

L'existence d'un minimum n'est donc pas assurée.

- La partie Ω n'est pas ouverte non plus ! On procède par l'absurde : supposons que Ω soit ouverte pour la norme produit $\|\cdot\|_\infty$. Il existerait donc un rayon $r > 0$ tel que la boule B_r de centre

$$M_1 = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right) \in \Omega$$

et de rayon $r > 0$ soit tout entière contenue dans Ω . Or la distance du point M_0 au point

$$M = \left(\frac{1}{n} + \frac{r}{2}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)$$

est égale à $r/2$, donc le point M appartient à la boule B_r sans appartenir à Ω (la somme des coordonnées n'est pas égale à 1).

C'est absurde, donc Ω n'est pas ouverte pour la norme produit (ni pour aucune autre norme, puisque toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes).

On ne peut donc pas non plus localiser les extrema de φ au moyen des points critiques.

- Mézalor que faire ?

Vu la tête de φ , on pose

$$\forall x \in]0, 1[, \quad f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $]0, 1[$ et que

$$\forall x \in]0, 1[, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} > 0,$$

donc f est convexe sur $]0, 1[$.

On déduit alors de l'inégalité de Jensen discrète que

$$\forall 0 < x_1, \dots, x_n < 1, \quad \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f(x_k) \geq f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right)$$

et donc que

$$\begin{aligned}\forall (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \\ &\geq n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = \varphi\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Cette inégalité démontre que φ atteint son minimum absolu au point $M_1 \in \Omega$ et ce minimum est égal à $n^2/n - 1$.

|| Comme φ est strictement convexe, on sait même qu'il s'agit d'un minimum strict : φ n'atteint son minimum qu'en ce seul point.

Solution 25

16Kh-01

✎ L'hypothèse sur le gradient de f peut aussi s'écrire avec la convention affine :

$$\forall M \in \mathbb{R}^n, \quad \langle \nabla f(M) \mid \mathbf{OM} \rangle \geq 0$$

où O est l'origine de $\mathbb{R}^n$.

1. L'application g est la composée de l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = t \cdot x.$$

Une application linéaire (sur un espace vectoriel de dimension finie) est de classe $\mathcal{C}^1$ et comme f est supposée de classe $\mathcal{C}^1$, on en déduit que $g = f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

D'après la formule de différentiation des fonctions composées,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad dg(t) = df(\varphi(t)) \circ d\varphi(t).$$

Comme φ est linéaire, on sait que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad d\varphi(t) = \varphi$$

donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad dg(t) = df(\varphi(t)) \circ \varphi.$$

Comme l'application g est définie sur $\mathbb{R}$, elle est aussi dérivable et

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) &= dg(t)(1) = [df(\varphi(t)) \circ \varphi](1) = df(\varphi(t))(1 \cdot x) \\ &= \langle \nabla f(t \cdot x) \mid x \rangle.\end{aligned}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

D'après la question précédente, quel que soit $t \in \mathbb{R}$, par linéarité à droite du produit scalaire,

$$tg'(t) = \langle \nabla f(t \cdot x) \mid t \cdot x \rangle \geq 0.$$

En particulier,

$$\forall t > 0, \quad g'(t) \geq 0$$

et comme l'application g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit qu'elle est croissante sur $[0, +\infty[$. En particulier,

$$g(1) \geq g(0), \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(x) \geq f(O).$$

On a ainsi démontré que f atteignait un minimum global à l'origine.

Solution 26

16Kh-02

1. Tout ensemble fini est fermé, donc le singleton $\{M_0\}$ est fermé et son complémentaire Ω est donc ouvert.

✎ Méthode à retenir : Une partie X d'un espace vectoriel est fermée si, et seulement si, son complémentaire X^c est une partie ouverte.

2. Les fonctions $[(x, y) \mapsto x]$ et $[(x, y) \mapsto y]$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$; la fonction $\sin$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc les composées

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & \\ (x, y) & \longmapsto x \longmapsto \sin x & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & \\ (x, y) & \longmapsto y \longmapsto \sin y & \end{array}$$

sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Par produit, les fonctions

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} & \text{et} & & \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x \sin y & & & (x, y) &\longmapsto y \sin x \end{aligned}$$

sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, par différence, le numérateur

$$[(x, y) \mapsto x \sin y - y \sin x]$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

Le dénominateur

$$[(x, y) \mapsto x^2 + y^2]$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ (fonction polynomiale). Sur l'ouvert Ω , cette fonction prend des valeurs strictement positives et on sait que la fonction inverse $[u \mapsto 1/u]$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (fonction rationnelle). Par composition, la fonction

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^2 + y^2 &\longmapsto \frac{1}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω (en tant que produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$).

✎ Pour démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, il reste à vérifier que les dérivées partielles de f sont définies aussi au point M_0 , puis qu'elles sont continues en ce point (Théorème fondamental).

3. On calcule les taux d'accroissements : quels que soient x et y non nuls,

$$\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0, \quad \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0.$$

Ces taux tendent vers une limite finie lorsque x et y tendent vers 0, donc les dérivées partielles de f sont bien définies au point M_0 :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0.$$

✎ Pour démontrer que les dérivées partielles de f sont continues au point M_0 , il faut comparer leurs valeurs au point M_0 avec leurs valeurs en un point $M = (x, y)$ proche de M_0 . Il faut donc déjà calculer les dérivées partielles de f en chaque point de Ω .

Nous pourrions nous contenter de faire la moitié du travail, puisque

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = -f(y, x).$$

✎ Pour tout $M = (x, y) \in \Omega$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{(y^2 - x^2) \sin y + 2xy \sin x - y(x^2 + y^2) \cos x}{(x^2 + y^2)^2}$$

Par symétrie,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y, x) = \frac{(y^2 - x^2) \sin x - 2xy \sin y + x(x^2 + y^2) \cos y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Afin d'y voir plus clair, on exprime x et y en coordonnées polaires et on applique une première fois l'astuce taupinale :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(M) &= \frac{-r^2 \cos 2\theta \sin y + r^2 \sin 2\theta \sin x - r^3 \sin \theta \cos x}{r^4} \\ &= \frac{-\cos 2\theta \sin y + \sin 2\theta \sin x - r \sin \theta \cos x}{r^2} \\ &= \frac{\sin 2\theta \sin x - \cos 2\theta \sin y - r \sin \theta + y(1 - \cos x)}{r^2}. \end{aligned}$$

En se rappelant que

$$\sin \theta = \sin(2\theta - \theta) = \sin 2\theta \cos \theta - \cos 2\theta \sin \theta,$$

on déduit de l'astuce taupinale que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(M) &= \frac{\sin 2\theta \sin x - \cos 2\theta \sin y - r(\cos \theta \sin 2\theta - \sin \theta \cos 2\theta) + y(1 - \cos x)}{r^2} \\ &= \frac{(\sin x - x) \sin 2\theta - \cos 2\theta (\sin y - y) + y(1 - \cos x)}{r^2}\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\sin t - t| \leq K_1 |t|^3 \quad \text{et} \quad |1 - \cos t| \leq K_2 t^2.$$

✎ Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et si la dérivée $(n+1)$ -ième est bornée, alors

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}.$$

On peut donc prendre $K_1 = 1/6$ et $K_2 = 1/2$. Mais ça n'a strictement aucune importance!

Par conséquent,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(M) - \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \right| \leq \frac{K_1 |x|^3 + K_1 |y|^3 + |y| \times K_2 x^2}{r^2} \leq (2K_1 + K_2)r = (2K_1 + K_2)\|M_0 M\|$$

ce qui prouve que $\partial f / \partial x$ est continue au point M_0 :

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0).$$

Par symétrie, l'autre dérivée partielle $\partial f / \partial y$ est également continue au point M_0 .

Par conséquent, la fonction f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

✎ Méthode classique : pour démontrer que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$, il suffit de vérifier que la propriété prévue par le Théorème de Schwarz fait défaut...

4. Pour $x \neq 0$,

$$\frac{1}{x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) = \frac{-x^2 \sin x + x^3}{x^5} = \frac{x - \sin x}{x^3} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{6} \quad \text{donc} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0) = \frac{1}{6}$$

et pour $y \neq 0$,

$$\frac{1}{y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right) = \frac{y^2 \sin y - y^3}{y^5} = \frac{\sin y - y}{y^3} \underset{y \rightarrow 0}{\sim} \frac{-1}{6} \quad \text{donc} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M_0) = \frac{-1}{6}.$$

Comme les dérivées secondes "croisées"

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M_0)$$

sont différentes, la fonction f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (contraposée du Théorème de Schwarz).

Solution 27

16Kh-03

On munit l'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme produit :

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad |h_{i,j}| \leq \|H\|_\infty.$$

✎ L'application $\det : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (c'est une fonction polynomiale des coefficients), donc elle est différentiable et sa différentielle est une application continue de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dans $L(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

Comme $L(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sur cet espace sont équivalentes. On peut donc en particulier considérer la norme subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$\|\varphi\| = \max_{\|U\|_\infty=1} |\varphi(U)|$$

qui nous donne en particulier

$$\forall H \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad |\varphi(H) - \psi(H)| \leq \|\varphi - \psi\| \|H\|_\infty.$$

Par conséquent, si $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ψ dans $L(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$, alors

$$\forall H \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(H) = \psi(H).$$

• Soit $H \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\det(I_n + H) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) m_{1, \sigma(1)} \cdots m_{n, \sigma(n)}$$

avec $m_{i,i} = 1 + h_{i,i}$ pour tout i et $m_{i,j} = h_{i,j}$ pour tout $i \neq j$.

• Pour $\sigma = I$, on a

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma) m_{1, \sigma(1)} \cdots m_{n, \sigma(n)} &= \prod_{i=1}^n [1 + h_{i,i}] \\ &\underset{H \rightarrow 0}{=} 1 + \sum_{i=1}^n h_{i,i} + \mathcal{O}(\|H\|_\infty^2) \end{aligned}$$

(Pour les $2^n - n - 1$ termes qui ne sont pas explicités, il y a au moins deux coefficients $h_{i,i}$ en facteur.)

• Pour toute permutation $\sigma \neq I$,

$$\varepsilon(\sigma) m_{1, \sigma(1)} \cdots m_{n, \sigma(n)} = \mathcal{O}(\|H\|_\infty^2)$$

(puisque'il existe au moins deux indices $1 \leq i < j \leq n$ pour lesquels $i \neq \sigma(i)$ et $j \neq \sigma(j)$).

• Puisqu'il n'y a qu'un nombre **fini** de termes dans la somme, on en déduit que

$$\det[I_n + H] \underset{H \rightarrow 0}{=} 1 + \sum_{i=1}^n h_{i,i} + o(H) = 1 + \operatorname{tr} H + o(H).$$

Autrement dit :

$$\forall H \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad d(\det)(I_n)(H) = \operatorname{tr} H.$$

• Soit A_0 , une matrice inversible. Pour tout $H \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \det(A_0 + H) &= \det(A_0) \cdot \det(I_n + A_0^{-1}H) \\ &= \det(A_0) \cdot [1 + \operatorname{tr}(A_0^{-1}H) + o(H)] \\ &= \det(A_0) + \operatorname{tr}[\operatorname{Com}(A_0)^\top \cdot H] + o(H). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\forall H \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad d(\det)(A_0)(H) = \operatorname{tr}[\operatorname{Com}(A_0)^\top \cdot H].$$

• Soit A_0 , une matrice non inversible. Par densité de $\operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de matrices inversibles telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A_0 - B_n\|_\infty = 0.$$

• Comme $\det$ est de classe $\mathcal{C}^1$, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|d(\det)(B_n) - d(\det)(A_0)\| = 0$$

et donc que

$$\forall H \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} d(\det)(B_n)(H) = d(\det)(A_0)(H).$$

• Pour toute matrice $H \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, l'application

$$[M \mapsto \operatorname{tr}(\operatorname{Com}(M)^\top \cdot H)]$$

est continue (c'est une fonction polynomiale des coefficients de M), donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{tr}(\operatorname{Com}(B_n)^\top \cdot H) = \operatorname{tr}(\operatorname{Com}(A_0)^\top \cdot H).$$

Par conséquent,

$$\forall H \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad d(\det)(A_0)(H) = \operatorname{tr}(\operatorname{Com}(A_0)^\top \cdot H).$$

• Comme A est dérivable,

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}, \quad A(t_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} A(t_0) + h \cdot A'(t_0) + o(h).$$

Si $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable au point A_0 avec

$$f(A_0 + H) = f(A_0) + df(A_0)(H) + o(H)$$

alors

$$f(A(t_0 + h)) = f(A(t_0)) + h \cdot df(A(t_0))(A'(t_0)) + o(h)$$

(Théorème de différentiation des fonctions composées) et donc

$$\begin{aligned} f'(A(t_0)) &= df(A(t_0))(A'(t_0)) \\ &= \text{tr}(\text{Com}[A(t_0)]^T \cdot A'(t_0)). \end{aligned}$$

Solution 28

CCP33

1. Un ensemble fini est fermé, donc

$$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

est ouvert.

Sur l'ouvert U , la fonction f est le quotient d'une fonction polynomiale

$$[(x, y) \mapsto xy]$$

par une fonction qui ne s'annule pas, composée d'une fonction polynomiale par la fonction $\sqrt{\cdot}$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ U & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^2 + y^2 & \longmapsto & \sqrt{x^2 + y^2} \end{array}$$

Par conséquent, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert U .

|| Du fait de la présence de la racine carrée, la fonction f n'est pas une fonction rationnelle !

|| Pour démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$, il reste donc à démontrer qu'elle est continue au point $O = (0, 0)$.
 Pour cela, il s'agit de comparer l'expression générale $g(x, y)$ à la valeur particulière $g(0, 0) = 0$ en choisissant une norme sur $\mathbb{R}^2$ pour étudier rigoureusement la limite.
 Le choix de cette norme est indifférent puisque $\mathbb{R}^2$ est un espace de dimension finie. Nous choisirons la norme euclidienne canonique car c'est celle qui rend les calculs les plus simples.

Soit $(x, y) \in U$. Il existe donc

$$r = \|(x, y)\|_2 > 0$$

et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = r \cos \theta \quad \text{et} \quad y = r \sin \theta.$$

On en déduit que

$$f(x, y) = r \cos \theta \sin \theta$$

et donc que

$$|f(x, y) - f(0, 0)| \leq r.$$

Le majorant est indépendant de θ et tend vers 0 lorsque r tend vers 0, donc

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = f(0, 0).$$

On a ainsi démontré que f était continue au point $O = (0, 0)$ et donc qu'elle était continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

2. On a démontré que f était de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U , donc elle admet des dérivées partielles en chaque point de U .

|| Il est absolument inutile de calculer les dérivées partielles de f sur U pour le moment, ce n'est pas en les calculant qu'on prouve leur existence !
 Il est important de comprendre qu'en calculant les dérivées partielles sur U , on applique en fait les théorèmes qui démontrent que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U .

✱ Au point O , qui n'appartient pas à l'ouvert U , rien ne prouve pour le moment que f admet des dérivées partielles.

|| Ici encore, l'expression générale (sur U) des dérivées partielles serait sans intérêt : ce qui est calculé sur U n'est valable que sur U .

Pour étudier l'existence des dérivées partielles au point O , on se place en ce point et on se déplace parallèlement aux axes de coordonnées.

Pour $x \neq 0$, on forme le taux d'accroissement

$$\frac{f(O + (x, 0)) - f(O)}{x} = 0$$

qui tend évidemment vers 0 lorsque x tend vers 0.

De même, pour $y \neq 0$, on forme le taux d'accroissement

$$\frac{f(O + (0, y)) - f(O)}{y} = 0$$

qui tend lui aussi vers 0 lorsque y tend vers 0.

On en déduit que les dérivées partielles de f sont définies sur $\mathbb{R}^2$ tout entier et en particulier que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(O) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(O) = 0.$$

3. D'après le Théorème fondamental, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ tout entier si, et seulement si, ses dérivées partielles sont définies et continues sur $\mathbb{R}^2$.

On a déjà démontré qu'elles étaient définies sur $\mathbb{R}^2$ tout entier et continues sur l'ouvert U au moins. Il reste donc à étudier la continuité des deux dérivées partielles au point O .

Pour cela, comme on l'a fait plus haut, il faut comparer l'expression générale

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \text{pour } (x, y) \in U$$

à la valeur particulière

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

• En appliquant les règles usuelles de dérivation, on trouve

$$\forall (x, y) \in U, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

On en déduit que, pour tout $(x, y) \in U$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right| = \frac{r^3 |\sin \theta|^3}{r^3} = |\sin \theta|^3.$$

Cette expression varie en fonction de θ et est indépendante de r , donc elle n'a pas de limite lorsque r tend vers 0, ce qui prouve que la dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

n'est pas continue au point $O = (0, 0)$ et donc que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ tout entier, mais seulement de classe $\mathcal{C}^1$ sur U .

Inutile de calculer la dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

pour deux raisons !

☛ Pour que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, il faudrait que les deux dérivées partielles fussent continues au point O . Dès lors que l'une des deux au moins n'est pas continue, la question est réglée.

☛ D'autre part, la symétrie de f

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = f(y, x)$$

nous assure que la seconde dérivée partielle ne serait pas plus continue que la première...

• Pour démontrer que la dérivée partielle n'est pas continue à l'origine, on aurait pu invoquer le Théorème de composition des limites.

Quel que soit le réel α , la fonction

$$[x \mapsto (x, \alpha x)]$$

est continue sur $\mathbb{R}$ (ses deux composantes sont polynomiales) et tend vers O lorsque x tend vers 0 (les deux composantes tendent vers 0).

Par conséquent, si $\partial f / \partial x$ était continue au point O , alors la composée

$$\left[x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, \alpha x) \right]$$

serait continue en $x = 0$. Mais voilà !

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, \alpha x) = \frac{\alpha^3}{(1 + \alpha^2)^{3/2}} \cdot \operatorname{sgn}(x)$$

et, lorsque x tend vers 0 , cette quantité ne tend pas vers

$$\frac{\partial f}{\partial x}(O) = 0$$

à moins que $\alpha = 0$.

4. On sait que $f(O) = 0$ et que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(O) = \frac{\partial f}{\partial y}(O) = 0.$$

Par conséquent, si f est différentiable au point O , alors nécessairement

$$f(O + \mathbf{h}) = o(\|\mathbf{h}\|)$$

pour $\mathbf{h} = (x, y)$ voisin de $\mathbf{0} = (0, 0)$.

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Par définition, cette relation signifie que} \\ \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(O + \mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0 \\ \text{où la condition } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0} \text{ signifie que la norme } \|\mathbf{h}\| \text{ tend vers } 0 = \|\mathbf{0}\|. \end{array} \right.$$

Or, pour $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \in U$,

$$\frac{|f(O + \mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} = \frac{1}{r} \cdot \frac{r^2 |\cos \theta \sin \theta|}{r} = |\sin \theta \cos \theta|$$

et on constate que cette quantité dépend de θ mais pas de r . Par conséquent, elle ne peut pas tendre vers 0 lorsque r tend vers 0 et donc

$$f(O + \mathbf{h}) \neq o(\|\mathbf{h}\|)$$

lorsque $\mathbf{h}$ tend vers $\mathbf{0}$.

Conclusion : La fonction f n'est donc pas différentiable au point O .

|| Cela démontre une seconde fois qu'elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

Solution 29

rms128-718

1. La fonction H est une fonction rationnelle dont l'unique pôle est $(0, 0)$, donc elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

✎ Toute partie finie est fermée, donc U est une partie ouverte (en tant que complémentaire d'une partie fermée).

✎ Pour étudier la continuité de H en $(0, 0)$, on peut se restreindre au disque unité $D = [x^2 + y^2 \leq 1]$. Sur ce disque, $|x| \leq 1$ donc

$$\forall (x, y) \in D, \quad 0 \leq x^4 + y^2 \leq x^4 + y^4$$

et donc

$$\forall (x, y) \in D \setminus \{(0, 0)\}, \quad |H(x, y) - H(0, 0)| = |H(x, y)| \leq \frac{x^4 |y|}{x^4 + y^4} = r \cdot \frac{\cos^4 \theta |\sin \theta|}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta}$$

✎ Comme $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sur $\mathbb{R}^2$ définissent la même topologie. On peut donc choisir la norme euclidienne canonique (= "passer en coordonnées polaires") pour étudier la continuité de H .

Il est clair que $\cos^4 \theta |\sin \theta| \leq 1$. Par ailleurs, le dénominateur est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique, donc elle est bornée et atteint un minimum.

✎ Étudier une fonction continue et périodique de période $T > 0$, c'est en fait étudier une fonction continue sur le segment $[0, T]$.

Or $\cos \theta$ et $\sin \theta$ ne s'annulent pas en même temps, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos^4 \theta + \sin^4 \theta \geq \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha > 0.$$

On a ainsi démontré que

$$\forall (x, y) \in D \setminus \{(0, 0)\}, \quad |H(x, y) - H(0, 0)| \leq \frac{\|(x, y) - (0, 0)\|_2}{\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha}$$

ce qui prouve que la fonction H est continue en particulier au point $(0, 0)$ et par conséquent qu'elle est continue sur $\mathbb{R}^2$.

🔗 Cette question n'était pas posée dans l'énoncé original.

2. On vérifie sans peine que les deux dérivées partielles de H sont bien définies en $(0, 0)$ et que

$$\frac{\partial H}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial H}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

On a justifié plus haut que les dérivées partielles de H étaient bien définies sur l'ouvert U . En particulier,

$$\forall (x, y) \in U, \quad \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = \frac{x^4(x^4 - y^2)}{(x^4 + y^2)^2}.$$

♣ Pour tout réel α , si x tend vers 0, alors $(x, \alpha x^2)$ tend vers $(0, 0)$.

🔗 On tend vers l'origine en se déplaçant sur la parabole d'équation $y = \alpha x^2$.

Et comme

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{\partial H}{\partial y}(x, \alpha x^2) = \frac{1 - \alpha^2}{(1 + \alpha^2)^2}$$

on constate que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial H}{\partial y}(x, \alpha x^2) \neq 0 = \frac{\partial H}{\partial y}(0, 0),$$

ce qui prouve que la dérivée partielle par rapport à y n'est pas continue au point $(0, 0)$.

🔗 Une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ si, et seulement si, ses dérivées partielles sont définies sur $\mathbb{R}^2$ et continues en chaque point de $\mathbb{R}^2$.

La fonction H n'est donc pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Solution 30

rms130-920

1.

🔗 Il est bon de savoir que les expressions

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{et} \quad y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y}$$

conduisent à passer en coordonnées polaires.

L'ouvert $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ en coordonnées cartésiennes correspond à l'ouvert $U =]0, +\infty[\times]0, \pi[$ en coordonnées polaires. On connaît les formules :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

et on peut utiliser ici les formules réciproques :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \operatorname{Arccos} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

(On n'en aura pas besoin.)

♣ Les applications $(x, y) \mapsto (r, \theta)$ et $(r, \theta) \mapsto (x, y)$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre et toutes les deux de classe $\mathcal{C}^1$ (sur Ω et sur U respectivement).

Par conséquent, si f et g sont reliées par

$$f(x, y) = g(r, \theta)$$

la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω si, et seulement si, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.

• D'après la règle de la chaîne,

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

et donc

$$r \frac{\partial g}{\partial r} = x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Par conséquent,

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha \cdot f(x, y)$$

équivalent à

$$\forall (r, \theta) \in \mathcal{U}, \quad \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\alpha}{r} g(r, \theta) = 0.$$

• On reconnaît ici une équation différentielle linéaire du premier ordre dont l'inconnue est la fonction $[r \mapsto g(r, \theta)]$ (où l'angle θ est fixé).

On en déduit qu'il existe une fonction $K :]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (r, \theta) \in \mathcal{U}, \quad g(r, \theta) = K(\theta) \cdot r^\alpha.$$

En particulier,

$$\forall 0 < \theta < \pi, \quad K(\theta) = g(1, \theta)$$

et comme g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$, on en déduit que K est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi[$.

• On vérifie facilement que

$$g = [(r, \theta) \mapsto K(\theta) \cdot r^\alpha]$$

est une solution de l'équation

$$\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\alpha}{r} g(r, \theta) = 0$$

quelle que soit l'application K de classe $\mathcal{C}^1$.

• En conclusion, la fonction $f(x, y)$ est une solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω de l'équation

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha \cdot f(x, y)$$

si, et seulement si, il existe une application $K(\theta) :]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad f(x, y) = g(r, \theta) = K(\theta) \cdot r^\alpha.$$

2. Même cadre théorique. Cette fois, l'équation en $f(x, y)$ devient

$$r \frac{\partial g}{\partial r} = r^{3/2} \sqrt{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta} \cot \theta.$$

Comme θ est fixé, la résolution est très simple! La fonction $f(x, y)$ est une solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω si, et seulement si, il existe une application $K(\theta) :]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall (r, \theta) \in \mathcal{U}, \quad g(r, \theta) = \frac{2}{3} r^{3/2} \sqrt{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta} \cot \theta + K(\theta).$$

Solution 31

rms130-981

Comme $\mathcal{U}$ est supposé ouvert, il y a un sens à supposer que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ et comme $\mathcal{U}$ est supposé convexe :

$$\forall (a, b) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}, \quad \forall t \in [0, 1], \quad (1-t)a + tb \in \mathcal{U}$$

et il y a donc un sens à supposer que f soit convexe sur $\mathcal{U}$.

• On suppose que f est convexe sur $\mathcal{U}$ et on fixe deux points $a \neq b$ dans $\mathcal{U}$:

$$\forall t \in [0, 1], \quad f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b).$$

L'application $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0, 1], \quad g(x) = f((1-x)a + xb)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ (comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$).

Quels que soient $0 \leq x < y \leq 1$ et $t \in [0, 1]$, on pose

$$z = (1 - t)x + ty \in [0, 1]$$

et (par associativité du barycentre)

$$(1 - z)a + zb = (1 - t)[(1 - x)a + xb] + t[(1 - y)a + yb]$$

donc (par convexité de f)

$$g(z) \leq (1 - t)g(x) + tg(y)$$

ce qui prouve que g est convexe sur $[0, 1]$.

En particulier, la dérivée de g est une fonction croissante et donc

$$\frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} \geq g'(0)$$

c'est-à-dire

$$f(b) - f(a) \geq df(a)(b - a) = \langle \nabla f(a) | b - a \rangle.$$

✱ Réciproquement, on suppose que

$$\boxed{\forall (u, v) \in U \times U, \quad f(u) \geq f(v) + \langle \nabla f(v) | u - v \rangle}$$

et on considère trois points de U :

$$a, \quad b \quad \text{et} \quad c = (1 - t)a + tb$$

(où $t \in [0, 1]$).

Par hypothèse,

$$f(a) \geq f(c) + \langle \nabla f(c) | a - c \rangle,$$

$$f(b) \geq f(c) + \langle \nabla f(c) | b - c \rangle.$$

Or $a - c = t(a - b)$ et $b - c = (1 - t)(b - a)$, donc

$$f(a) \geq f(c) - t \langle \nabla f(c) | b - a \rangle,$$

$$f(b) \geq f(c) + (1 - t) \langle \nabla f(c) | b - a \rangle$$

donc

$$t[f(b) - f(c)] \geq t(1 - t) \langle \nabla f(c) | b - a \rangle \geq (1 - t)[f(c) - f(a)]$$

et finalement

$$f(c) \leq (1 - t)f(a) + tf(b),$$

ce qui prouve que f est bien convexe sur U .

Solution 32

rms130-1038

1. Pour $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$ fixés, on considère la fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \varphi(y) = y + tu(y) - x.$$

Comme u est de classe $\mathcal{C}^1$ et croissante, alors la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad u'(y) = 1 + tu'(y) \geq 1.$$

La fonction u tend vers une limite, finie ou égale à $+\infty$, au voisinage de $+\infty$, donc la fonction φ tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.

De même, la fonction u tend vers une limite, finie ou égale à $-\infty$, au voisinage de $-\infty$, donc la fonction φ tend vers $-\infty$ au voisinage de $-\infty$.

La fonction φ réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et en particulier il existe un, et un seul, $y_0 = a(t, x) \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(y_0) = 0$.

✎ On aurait dû en fait définir

$$\Phi(t, x, y) = y + tu(y) - x$$

qui est manifestement une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. L'analyse précédente et le fait que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(t, x, y) = 1 + tu'(y) > 0$$

permettent d'appliquer le Théorème des fonctions implicites, qui prouve que la fonction $\alpha(t, x)$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

2. a. Pour $t = 0$, on a $\alpha(0, x) + 0 - x = 0$ (par définition de $\alpha(t, x)$), donc

$$f(0, x) = u(\alpha(0, x)) = u(x).$$

2. b. Pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, par définition de $\alpha(t, x)$ et de $f(t, x)$,

$$\alpha(t, x) + t \cdot f(t, x) - x = 0.$$

D'après la règle de la chaîne,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + f(t, x) + t \cdot \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x} + t \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - 1 = 0.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= u'(\alpha(t, x)) \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t} = -u'(\alpha(t, x)) \cdot \left[f(t, x) + t \cdot \frac{\partial f}{\partial t} \right] \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= u'(\alpha(t, x)) \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} = u'(\alpha(t, x)) \cdot \left[1 - t \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

donc que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{-u'(\alpha(t, x))}{1 + tu'(\alpha(t, x))} \cdot f(t, x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{u'(\alpha(t, x))}{1 + tu'(\alpha(t, x))}$$

et finalement que

$$\frac{\partial f}{\partial t} + f(t, x) \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

pour tout (t, x) dans l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Solution 33

rms130-1176

1. La fonction f est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule qu'au point $M_0 = (1, 1)$ de $K = [0, 1]^2$. Par conséquent, f est continue au moins sur $K \setminus \{M_0\}$.

Il reste à étudier la continuité de f au point M_0 (relativement à K). On pose donc

$$(x, y) = (1 - h, 1 - k)$$

et on obtient

$$\begin{aligned} |f(1 - h, 1 - k) - f(1, 1)| &= |f(1 - h, 1 - k)| \\ &= \left| \frac{(1 - h)(1 - k)hk}{h + k - hk} \right| \\ &\leq \frac{|h| \cdot |k|}{|h + k - hk|}. \end{aligned}$$

On passe en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \frac{|h| \cdot |k|}{|h + k - hk|} &= \frac{r^2 |\cos \theta| |\sin \theta|}{r |\cos \theta + \sin \theta - r \sin \theta \cos \theta|} \\ &\leq \frac{r}{|\cos \theta + \sin \theta - r \sin \theta \cos \theta|}. \end{aligned}$$

Comme nous nous restreignons à K , les coordonnées h et k sont positives, donc l'angle θ est compris entre 0 et $\pi/2$. Donc

$$\cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \geq 1$$

et par conséquent, en supposant que $0 < r < 1$,

$$\cos \theta + \sin \theta - r \sin \theta \cos \theta \geq 1 - r > 0.$$

Donc

$$|f(1-h, 1-k) - f(1, 1)| \leq \frac{r}{1-r}$$

et le majorant tend vers 0 lorsque r tend vers 0, ce qui prouve que f est continue également au point $M_0 = (1, 1)$.

2. La fonction f est donc continue sur le compact $K = [0, 1] \times [0, 1]$.

▮ *Un segment est compact ; un produit cartésien de deux compacts est une partie compacte de l'espace produit.*

Elle atteint donc un maximum et un minimum. Mais où ?

• Il est clair que f est identiquement nulle sur le bord du carré K (où $x = 0$, ou $x = 1$, ou $y = 0$, ou $y = 1$: il y a toujours un facteur nul) et qu'elle est toujours positive (tous les facteurs sont positifs). Le minimum de f est égal à 0, atteint en chaque point du bord.

• Par conséquent, f atteint son maximum en un point de l'intérieur de K , c'est-à-dire en un point de l'ouvert

$$\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$$

et comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet ouvert (en tant que fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas), elle atteint son maximum en un point critique.

• On trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(1-y)(1-2x+x^2y)}{(1-xy)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x(1-x)(1-2y+y^2x)}{(1-xy)^2}.$$

▮ *On notera que la symétrie de f se retrouve dans les dérivées partielles.*

Comme on est sur l'ouvert Ω , les deux dérivées partielles sont nulles si, et seulement si,

$$1 - 2x + x^2y = 1 - 2y + xy^2 = 0.$$

En multipliant la première expression par y et la seconde par x , on en déduit que $x = y$, ce qui nous donne

$$1 - 2x + x^3 = 0.$$

Comme 1 est une solution "évidente" de cette équation, on en déduit que les solutions sont

$$\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < 1$$

et comme on cherche un point de l'ouvert Ω , on en déduit que f admet pour seul point critique le point

$$M_1 = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

Le maximum de f est donc $f(M_1)$; il est atteint au point M_1 et seulement en ce point ; ce maximum vaut

$$\frac{-11 + 5\sqrt{5}}{2}.$$

Solution 34

rms132-642

Notons $U = \mathbb{R}^2$, l'ouvert sur lequel la fonction f est définie et considérons le changement de variables défini par

$$\forall (x, y) \in U, \quad (u, v) = \varphi(x, y) = \left(\frac{x}{1+y^2}, y \right).$$

Il est clair que, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$(u, v) = \varphi(x, y) \iff (x, y) = (u(1+v^2), v).$$

Cela prouve que φ réalise une bijection de l'ouvert U sur l'ouvert $V = \mathbb{R}^2$. En outre, il est clair que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U (sa première composante est une fonction rationnelle sans pôle sur U , sa deuxième composante est polynomiale) et que la bijection réciproque est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V (ses deux composantes sont polynomiales).

Par conséquent, la fonction $f(x, y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si, et seulement si, la composée $g(u, v) = (f \circ \varphi^{-1})(u, v)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V .

• D'après la règle de la chaîne, quel que soit $M = (u, v) \in V$,

$$\frac{\partial g}{\partial v}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}[\varphi^{-1}(M)] \cdot \frac{\partial x}{\partial v}(M) + \frac{\partial f}{\partial y}[\varphi^{-1}(M)] \cdot \frac{\partial y}{\partial v}(M) = 2uv \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy}{1+y^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}.$$

▢ Dans les deux dernières lignes, les dérivées partielles de f sont évaluées au point de coordonnées $\varphi^{-1}(M)$; les coordonnées x et y sont considérées comme des fonctions de u et v .

Comme φ^{-1} réalise une bijection de V sur U , on en déduit que

$$\forall (u, v) \in V, \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = 0 \iff \forall (x, y) \in U, \quad 2xy \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (1 + y^2) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

et on rappelle que, par construction, les fonctions f et g sont liées par la relation :

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = (g \circ \varphi)(x, y).$$

♣ D'après le cours, une fonction $g(u, v)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $V = \mathbb{R}^2$ est solution de l'EDP

$$\frac{\partial g}{\partial v} = 0$$

si, et seulement si, il existe une fonction G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (u, v) \in V, \quad g(u, v) = G(u).$$

Par conséquent, une fonction $f(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U = \mathbb{R}^2$ est solution de l'EDP

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2xy \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (1 + y^2) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

si, et seulement si, il existe une fonction G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = G\left(\frac{x}{1 + y^2}\right).$$

Solution 35

rms132-1165

1. On discute sur le signe de c .

► Si $c = 0$, les solutions sont les fonctions affines : $y(x) = ax + b$.

► Si $c = \omega^2 > 0$, les solutions sont périodiques :

$$y(x) = a \sin \omega x + b \cos \omega x.$$

► Si $c = -\omega^2 < 0$, les solutions divergent :

$$y(x) = a \operatorname{sh} \omega x + b \operatorname{ch} \omega x.$$

2. Comme f est une solution de (E), elle est continue sur $\mathbb{R}$ et, d'après le Théorème fondamental, pour tout $y \in \mathbb{R}$ (fixé), l'application

$$[x \mapsto F(x, y)]$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x)f(y) = f(x + y) - f(x - y).$$

Comme f n'est pas identiquement nulle, il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(y_0) \neq 0$ et par conséquent

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{f(x + y_0) - f(x - y_0)}{f(y_0)}.$$

Donc f est en fait de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

▢ Bien entendu, on peut continuer (par récurrence) et en déduire que f est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

♣ Appliquons à nouveau le Théorème fondamental : les dérivées partielles de F sont bien définies sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\begin{aligned} \forall M = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(M) &= f(x + y) - f(x - y) \\ \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(M) &= f(x + y) - [-f(x - y)] = f(x + y) + f(x - y). \end{aligned}$$

Comme F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que les applications

$$[(x, y) \mapsto x + y] \quad \text{et} \quad [(x, y) \mapsto x - y]$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ (elles sont linéaires), les dérivées partielles de F sont en fait de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et donc F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

• D'après l'expression des dérivées partielles,

$$\begin{aligned} \forall M = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(M) &= f'(x + y) - f'(x - y) \\ \text{et} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(M) &= f'(x + y) - f'(x - y) \end{aligned}$$

donc F vérifie bien l'équation des ondes (ou équation de D'Alembert) avec $c = 1$.

• En notant P_0 , une primitive de f sur (l'intervalle) $\mathbb{R}$, on a

$$F(x, y) = P_0(x + y) - P_0(x - y)$$

où P_0 est de classe $\mathcal{C}^2$: on ne devrait pas être étonné de retrouver l'équation des ondes !

3. D'après (E),

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(0) = \int_x^x f(t) dt = 0.$$

Donc : ou bien $f(x)$ est identiquement nul, et en particulier $f(0) = 0$; ou bien $f(x)$ n'est pas identiquement nul et on a quand même $f(0) = 0$.

• Comme f est une solution de (E), alors

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = f(x)f(y)$$

et par conséquent

$$\forall M = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f''(x)f(y) - f(x)f''(y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(M) - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(M) = 0$$

d'après la question précédente.

4. Il est clair que la fonction nulle est une solution de (E). Dorénavant, nous ne nous intéresserons qu'aux solutions non identiquement nulles de (E) en choisissant un réel y_0 tel que $f(y_0) \neq 0$.

D'après la question précédente,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) - \frac{f''(y_0)}{f(y_0)} \cdot f(x) = 0$$

et nous reprenons la discussion menée dans la première question avec

$$c = -\frac{f''(y_0)}{f(y_0)},$$

en tenant compte de la contrainte $f(0) = 0$ établie précédemment.

► Si $c = -f''(y_0)/f(y_0) = 0$, alors f est une fonction affine telle que $f(0) = 0$, donc $f(x) = ax$. L'équation (E) devient alors

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (ax).(ay) = 2axy.$$

Il n'y a que deux possibilités : $a = 0$ (solution identiquement nulle) et $a = 2$.

► Si $c > 0$, alors f est de la forme $a \sin \omega x$ et l'équation (E) devient cette fois

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (a \sin \omega x).(a \sin \omega y) = \frac{2a \sin \omega \sin \omega y}{\omega}.$$

À nouveau, il n'y a que deux possibilités : $a = 0$ et $a = 2/\omega$.

► Si $c < 0$, alors f est de la forme $a \operatorname{sh} \omega x$ et l'équation (E) devient maintenant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (a \operatorname{sh} \omega x).(a \operatorname{sh} \omega y) = \frac{2a \operatorname{sh} \omega x \operatorname{sh} \omega y}{\omega}$$

et une fois encore : $a = 0$ ou $a = 2/\omega$.

• En reprenant les calculs qui précèdent, on vérifie que les expressions trouvées sont toutes des solutions de (E), indépendamment de la valeur choisie pour $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.

Les solutions de (E) sont donc les fonctions

$$[x \mapsto 0], \quad [x \mapsto 2x], \quad \left[x \mapsto \frac{2 \sin \omega x}{x} \right], \quad \left[x \mapsto \frac{2 \operatorname{sh} \omega x}{x} \right]$$

pour un paramètre $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ arbitrairement choisi.