

## Problème de Mathématiques

Référence pp1821 — Version du 6 février 2026

---

1. Justifier l'existence de l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^n dt$$

et démontrer que  $I_n = n!$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Pour tout polynôme  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ , on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(P)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(x+t) dt.$$

2. a. Démontrer qu'on définit ainsi un endomorphisme  $T$  de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

2. b. La matrice  $M$  qui représente  $T$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$  est-elle diagonalisable?

3. Soient  $n \in \mathbb{N}$ , un entier fixé, et  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . On note  $D$ , l'endomorphisme de  $E$  qui à tout polynôme  $P \in E$  associe son polynôme dérivé  $D(P) \in E$ .

3. a. Soient  $P \in E$  et  $x \in \mathbb{R}$ . Démontrer qu'il existe une, et une seule, famille réelle  $(b_0(x), \dots, b_n(x))$  telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(x+t) = \sum_{k=0}^n t^k b_k(x).$$

Expliciter les réels  $b_k(x)$ .

☞ On pourra citer une formule de Taylor.

3. b. Pour tout polynôme  $P \in E$ , il existe un, et un seul, polynôme  $T(P) \in E$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(P)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(x+t) dt.$$

On admet que  $T$  est un endomorphisme de  $E$ .

Déterminer une famille réelle  $(a_0, \dots, a_n)$  telle que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad T(P) = \sum_{k=0}^n a_k D^k(P).$$

3. c. Calculer les valeurs propres de  $T$  et caractériser les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

4. Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction continue et bornée. On notera :

$$\|g\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |g(t)|.$$

On définit la fonction  $T_g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  en posant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} g(t+x) dt.$$

4. a. Démontrer que  $T_g$  est une fonction bornée sur  $\mathbb{R}$  et comparer  $\|T_g\|_\infty$  à  $\|g\|_\infty$ .

4. b. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_g(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-u} g(u) du$$

et en déduire que  $T_g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

4. c. Démontrer qu'une fonction  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  est solution de l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y' - y + g = 0$$

si, et seulement si, il existe une constante  $k \in \mathbb{R}$  telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ke^x + e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} g(t+x) dt.$$

4. d. On suppose que  $|g(u)| \leq \varepsilon$  pour tout  $u \geq A$ . Démontrer que  $|T_g(x)| \leq \varepsilon$  pour tout  $x \geq A$ .  
Que peut-on en déduire ?

5. On note  $F$ , le sous-espace de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  engendré par les fonctions  $\cos$  et  $\sin$ .

5. a. Pour tout  $A \in \mathbb{R}$ , calculer

$$\int_A^{+\infty} e^{(i-1)t} dt.$$

5. b. Démontrer que l'application  $[g \mapsto T_g]$  (où la fonction  $T_g$  a été définie au [4.]) est un endomorphisme de  $F$ .

5. c. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

## Solution ✻ Résolution intégrale d'une équation différentielle

1. Pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$ , la fonction

$$\varphi_k = [t \mapsto t^k e^{-t}]$$

est continue sur  $[0, +\infty[$  et  $\varphi_k(t) = o(e^{-t/2})$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , donc  $\varphi_k$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

✻ Par conséquent,

$$I_0 = \lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} \int_0^\Lambda e^{-t} dt = \lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} 1 - e^{-\Lambda} = 1.$$

On suppose qu'il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $I_n = n!$  et on intègre par parties :

$$\int_0^\Lambda t^{n+1} e^{-t} dt = [-t^{n+1} e^{-t}]_0^\Lambda + (n+1) \int_0^\Lambda t^n e^{-t} dt.$$

En faisant tendre  $\Lambda$  vers  $+\infty$ , on obtient

$$I_{n+1} = (n+1)I_n = (n+1)!$$

et le résultat est ainsi établi par récurrence.

2. a. Considérons un polynôme

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k.$$

Alors

$$P(x+t) = \sum_{k=0}^n a_k (x+t)^k = \sum_{\ell=0}^n b_\ell t^\ell$$

(formule du binôme), donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la fonction

$$[t \mapsto e^{-t} P(x+t)]$$

est une combinaison linéaire des fonctions  $\varphi_k$  définies au [1.], ce qui prouve que l'intégrale  $T(P)(x)$  est bien définie.

✻ En tant qu'application linéaire de  $\mathbb{R}_n[X]$  ( $n = 2$  ou plus...) dans l'espace  $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , l'application  $T$  est clairement linéaire (linéarité de l'intégrale).

✻ On vérifie grâce à la formule du binôme et aux valeurs de  $I_n$  que les applications  $T(1)$ ,  $T(X)$  et  $T(X^2)$  sont respectivement associées aux polynômes  $1$ ,  $X+1$  et  $X^2+2X+2$ .

Par linéarité de  $T$ , l'application  $T(P)$  est donc associée à un polynôme de  $\mathbb{R}_2[X]$  pour tout  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ .

REMARQUE.— Comme  $T(P)$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , qui est un ensemble *infini*, il existe *au plus un* polynôme  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(P)(x) = Q(x).$$

2. b. D'après la question précédente,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme  $M$  est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, donc  $\text{Sp}(M) = \{1\}$ .

Si  $M$  était diagonalisable, elle serait semblable à une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux seraient tous égaux à  $1$ , donc  $M$  serait semblable à  $I_3$ , donc  $M$  serait égale à  $I_3$  : c'est faux, donc la matrice  $M$  n'est pas diagonalisable.

3. a. D'après la formule de Taylor *pour les polynômes*, si  $P$  est un polynôme de degré  $d \leq n$ , alors

$$P(x+t) = \sum_{k=0}^d \frac{P^{(k)}(x)}{k!} t^k = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(x)}{k!} t^k.$$

3. b. On généralise ici le résultat du [2.a.], où tous les détails relatifs à la convergence des intégrales ont été donnés.

On déduit de la question précédente que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(P)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(x)}{k!} \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$$

et d'après [1.],

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(P) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(x)$$

donc (cf remarque à la fin du [2.a.])

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad T(P) = \sum_{k=0}^n D^k(P).$$

**3. c.** Soit  $P$ , un vecteur propre de  $T$  associé à la valeur propre  $\lambda \in \mathbb{R}$ . D'après [3.b.], l'égalité  $T(P) = \lambda P$  équivaut à

$$(\lambda - 1)P = \sum_{k=1}^n D^k(P).$$

Le membre de droite est une somme de polynômes, le degré de chacun desquels étant strictement inférieur au degré de  $P$ . Par conséquent,

$$\deg[(\lambda - 1)P] < \deg P$$

donc  $\lambda = 1$ . Par conséquent,

$$D(P) = - \sum_{k=2}^n D^k(P) = - \sum_{k=1}^{n-1} D^k[D(P)].$$

Ici encore, si  $D(P) \neq 0$ , alors le degré du second membre est strictement inférieur au degré du premier membre. Donc  $D(P) = 0$  et  $P$  est un polynôme constant.

Ainsi,  $\text{Sp}(T) = \{1\}$  et le sous-espace propre associé à 1 est la droite dirigée par le monôme 1.

REMARQUE.— Cette étude généralise l'étude de la matrice  $M$  faite au [2.b.]

**4. a.** Comme  $g$  est continue et bornée sur  $\mathbb{R}$ , la fonction

$$\psi_1 = [t \mapsto e^{-t}g(x+t)]$$

est continue et bornée sur  $\mathbb{R}_+$ , quel que soit  $x \in \mathbb{R}$ .

Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$|e^{-t}g(x+t)| \leq e^{-t}\|g\|_\infty$$

donc  $\psi_1$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad |T_g(x)| &\leq \int_0^{+\infty} |\psi_1(t)| dt \\ &\leq \|g\|_\infty \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Le majorant étant indépendant de  $x \in \mathbb{R}$ , on peut passer au sup pour  $x \in \mathbb{R}$  : la fonction  $T_g$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  et

$$\|T_g\|_\infty \leq \|g\|_\infty.$$

**4. b.** Pour  $x \in \mathbb{R}$  fixé, on considère le changement de variable affine  $u = t + x$ . Comme  $\psi_1$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ , on déduit du théorème de changement de variable d'une part que

$$\psi_2 = [u \mapsto e^{-u}g(u)]$$

est intégrable sur  $[x, +\infty[$  et d'autre part que

$$T_g(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-u}g(u) du.$$

• La fonction  $\psi_2$  étant continue sur  $\mathbb{R}$  et intégrable au voisinage de  $+\infty$ , on déduit du théorème fondamental que

$$\left[ x \mapsto \int_x^{+\infty} \psi_2(u) \, du \right]$$

est la primitive de  $-\psi_2$  sur  $\mathbb{R}$  qui tend vers 0 au voisinage de  $+\infty$ . (Attention au signe! C'est une intégrale fonction de la borne *inférieure!*)

Par conséquent,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (T_g)'(x) = T_g(x) + e^x[-e^{-x}g(x)] = T_g(x) - g(x).$$

4. c. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme  $ke^x$ . D'après la question précédente, la fonction  $T_g$  est une solution particulière de l'équation complète. Donc la solution générale est bien de la forme

$$f(x) = ke^x + e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} g(t+x) \, dt.$$

4. d. On procède comme au [4.a.] : pour tout  $x \geq A$ ,

$$\forall u \geq x, \quad |e^{-u}g(u)| \leq \varepsilon e^{-u},$$

donc, en intégrant sur  $[x, +\infty[$ ,

$$|T_g(x)| \leq e^x \int_x^{+\infty} |e^{-u}g(u)| \, du \leq \varepsilon e^x \int_x^{+\infty} e^{-u} \, du = \varepsilon.$$

• On a démontré que : si  $g$  tend vers 0 au voisinage de  $+\infty$ , alors  $T_g$  tend aussi vers 0 au voisinage de  $+\infty$ .

REMARQUE.— On peut en déduire (par linéarité de l'intégrale) que : si  $g$  tend vers  $\ell \in \mathbb{R}$  au voisinage de  $+\infty$ , alors  $T_g$  tend aussi vers  $\ell$  au voisinage de  $+\infty$  (substituer  $g(x) - \ell$  à  $g(x)$ ).

5. a. La fonction  $[t \mapsto e^{(i-1)t}]$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall t \in [A, +\infty[, \quad |e^{(i-1)t}| = e^{-t}$$

donc l'intégrale est (absolument) convergente et

$$\int_A^{+\infty} e^{(i-1)t} \, dt = \frac{e^{(i-1)t}}{1-i} = (1+i)e^{it} \frac{e^{-t}}{2}$$

puisque, quel que soit  $B > A$ ,

$$\int_A^B e^{(i-1)t} \, dt = \left[ \frac{e^{(i-1)t}}{i-1} \right]_A^B.$$

5. b. On a admis (sans le démontrer vraiment) que  $[g \mapsto T_g]$  était une application linéaire sur l'espace des fonctions continues et bornées sur  $\mathbb{R}$ , donc en particulier sur  $F$ .

En prenant les parties réelle et imaginaire de la formule établie en [5.a.], on obtient

$$T_{\cos} = \frac{\cos - \sin}{2} \in F, \quad T_{\sin} = \frac{\cos + \sin}{2} \in F$$

donc  $[g \mapsto T_g]$  est bien un endomorphisme de  $F$ .

5. c. On considère la base  $\mathcal{B} = (\cos, \sin)$  de  $F$ . Dans cette base, la matrice  $N$  de l'endomorphisme  $[g \mapsto T_g]$  est égale à

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est

$$X^2 - X + \frac{1}{2}$$

et le discriminant de ce polynôme est  $-1$ . Par conséquent, l'endomorphisme  $[g \mapsto T_g]$  n'est pas diagonalisable (faute de valeurs propres!).