

## Problème de Mathématiques

Référence pp1814 — Version du 6 février 2026

---

On cherche les fonctions  $x$  et  $y$  de classe  $\mathcal{C}^1$  qui vérifient le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) \end{cases} \quad (S)$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

### Partie A. Réduction d'une matrice

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = A - 2I_2.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ . On le présentera sous forme factorisée.
2. Calculer le rang, l'image et le noyau de la matrice  $B$ . En déduire la matrice  $B^2$ .
3. On considère une matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}.$$

- 3.a. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice  $P$  soit inversible.
- 3.b. Démontrer qu'il existe un, et un seul, couple  $(a, b)$  tel que

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Expliciter les valeurs de  $a$  et  $b$ .

3.c. Que vaut alors  $P^{-1}AP$ ?

4. Exprimer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la matrice  $A^n$  comme une combinaison linéaire de  $I_2$  et de  $A$ .

### Partie B. Application

Quelles que soient les applications  $x$  et  $y$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , la matrice colonne définie par

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

est considérée comme une fonction de  $t$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  dont la dérivée a pour expression

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

5. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on définit la colonne  $Y(t)$  par

$$Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t)$$

où  $P$  est la matrice étudiée dans la première partie.

5.a. Démontrer que les fonctions  $u$  et  $v$  ainsi définies sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

5.b. En déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) = (P^{-1}AP)Y(t).$$

5.c. En déduire qu'il existe deux constantes  $K_1$  et  $K_2$  telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u(t) = (K_1 + K_2 t)e^{2t} \\ v(t) = K_2 e^{2t} \end{cases}.$$

6. Quelle est l'expression générale des solutions du système (S)?

## Solution ✱ Résolution d'un système différentiel

### Partie A. Réduction d'une matrice

1. Le polynôme caractéristique de  $A$  est défini par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \chi_A(t) = \det(A - tI_2)$$

(puisque la taille de la matrice est *paire*) et égal à

$$X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2.$$

2. Comme

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

il est clair que le rang de  $B$  est égal à 1 ; que l'image de  $B$ , engendrée par les colonnes de  $B$ , est la droite vectorielle dirigée par la matrice colonne

$$U_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le noyau de  $B$  est aussi une droite vectorielle (théorème du rang) et comme les colonnes de  $B$  vérifient  $C_1 - C_2 = 0$ , on en déduit que la colonne  $U_0$  appartient au noyau de  $B$  et dirige donc le noyau de  $B$ .

✱ Comme  $\text{Im } B = \text{Ker } B$ , on en déduit que  $B^2 = 0_2$ .

3. a. Comme  $\det(P) = b - a$ , la matrice  $P$  est inversible si, et seulement si,  $a \neq b$ .

3. b. Soit  $f$ , l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  canoniquement associé à la matrice  $B$ .

**Analyse.** S'il existe une base  $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  dans laquelle la matrice de  $f$  est égale à

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

alors le vecteur  $\varepsilon_1$  appartient au noyau de  $f$  (première colonne) et  $\varepsilon_1 = f(\varepsilon_2)$  (deuxième colonne).

On connaît le noyau de  $f$  : il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que

$$\mathfrak{Mat}_{\text{can}}(\varepsilon_1) = \alpha \cdot U_0$$

et la condition sur  $P$  impose de choisir

$$\mathfrak{Mat}_{\text{can}}(\varepsilon_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On cherche alors  $\varepsilon_2$  parmi les solutions de

$$BX = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Une solution particulière de cette équation est bien entendu

$$X_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et d'après le principe de superposition, la solution générale de cette équation est

$$X = X_0 + \alpha \cdot U_0 = \begin{pmatrix} -1 - \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

(puisque  $U_0$  dirige le noyau de  $B$ ). La condition sur la deuxième colonne de  $P$  impose de choisir  $\alpha = -2$  et donc

$$\mathfrak{Mat}_{\text{can}}(\varepsilon_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

**Synthèse.** Par [3.a.], la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

est inversible. D'après les formules de Cramer,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Par un calcul direct ou d'après l'analyse précédente,

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. c. Comme  $A = B + 2I_2$ , alors

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1}BP + 2P^{-1}I_2P = P^{-1}BP + 2I_2 \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Comme les matrices  $B$  et  $2I_2$  commutent, on peut appliquer la formule du binôme.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n &= (2I_2 + B)^n \\ &= 2^n I_2 + 2^{n-1} nB && \text{(car } B \text{ est nilpotente d'indice 2)} \\ &= 2^n I_2 + 2^{n-1} n(A - 2I_2) \\ &= 2^n(n+1)I_2 + 2^{n-1} nA \end{aligned}$$

On remarque que le résultat est vrai aussi pour  $n = 0$ .

### Partie B. Application

5. a. Par hypothèse, les fonctions  $x$  et  $y$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

D'après [3.b.] (calcul de  $P^{-1}$ ),  $u = 2x + y$  et  $v = -x - y$ . Ainsi, les fonctions  $u$  et  $v$ , en tant que combinaisons linéaires de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ , sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

5. b. D'après la question précédente,

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x'(t) + y'(t) \\ -x'(t) - y'(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X'(t).$$

Or  $X'(t) = AX(t)$ , donc

$$Y'(t) = P^{-1}AX(t) = (P^{-1}AP)[P^{-1}X(t)] = (P^{-1}AP)Y(t).$$

5. c. L'équation différentielle précédente se traduit par un système différentiel triangulaire.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u'(t) = 2u(t) + v(t) \\ v'(t) = 2v(t) \end{cases}$$

D'après la deuxième équation, il existe une constante  $K_2$  telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad v(t) = K_2 e^{2t}.$$

La première équation devient alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u'(t) - 2u(t) = K_2 e^{2t}.$$

On applique la méthode usuelle pour résoudre cette équation différentielle linéaire du premier ordre : il existe une constante  $K_1$  telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t) = K_1 e^{2t} + K_2 t e^{2t}.$$

6. Comme  $X(t) = PY(t)$ , on déduit de la question précédente que l'expression générale des solutions de (S) est la suivante :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (K_1 + K_2 t)e^{2t} \\ K_2 e^{2t} \end{pmatrix}$$

d'où on déduit enfin que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) = K_1 e^{2t} + K_2(1+t)e^{2t} \\ y(t) = -K_1 e^{2t} - K_2(2+t)e^{2t} \end{cases}.$$

REMARQUE.— Il y a deux constantes d'intégration (puisque'il s'agit d'un système différentiel du premier ordre en dimension deux) et ces deux constantes d'intégration relient les expressions de  $x(t)$  et  $y(t)$  entre elles.