Problème de Mathématiques

Référence pp1716 — Version du 6 février 2026

On notera $I = [0, 1]$. Dans tout le problème, f et h sont des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On s'intéresse aux applications de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ qui vérifient l'équation différentielle suivante :

$$-y''(x) + h(x)y(x) = f(x) \tag{E}$$

d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(I)$.

Plus précisément, on cherche les solutions de (E) qui s'annulent en 0 et en 1 (conditions aux limites, aux extrémités du segment I). On s'intéresse donc au système suivant.

$$\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad -y''(x) + h(x)y(x) = f(x) \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \tag{S}$$

Une application $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une **solution de (S)** lorsqu'elle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie les équations du système (S).

1. On suppose que l'application h est constante :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \alpha \in \mathbb{R}$$

et que f est l'application nulle :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0.$$

Démontrer que l'application nulle est la seule solution de (S) sauf pour certaines valeurs du réel α qui seront précisées.

☞ *On posera $\alpha = \omega^2$ si $\alpha > 0$ et $\alpha = -\omega^2$ si $\alpha < 0$.*

2. Soit φ, une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\Phi(x) = (1-x)\int_0^x t\varphi(t)\,dt + x\int_x^1 (1-t)\varphi(t)\,dt.$$

2. a. Démontrer que l'application Φ ainsi définie est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée seconde, ainsi que $\Phi(0)$ et $\Phi(1)$.

2. b. Soit Φ_1, une application de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \Phi_1''(x) = -\varphi(x)$$

et que $\Phi_1(0) = \Phi_1(1) = 0$. Démontrer que $\Phi(x) = \Phi_1(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Démontrer que le système suivant admet une solution et une seule.

$$\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad -y''(x) = f(x) \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \tag{S_0}$$

4. On s'intéresse maintenant au cas particulier suivant, où f est l'application nulle.

$$\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad -y''(x) + h(x)y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \tag{S_1}$$

4. a. Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application continue qui vérifie la relation suivante.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = (x-1)\int_0^x th(t)y(t)\,dt + x\int_x^1 (t-1)h(t)y(t)\,dt \tag{R}$$

Démontrer que y est de classe $\mathscr{C}^2$ et est une solution de (S_1).

4. b. Réciproquement, démontrer que toute solution y de (S_1) vérifie aussi la relation (R).

4. c. Soit y, une solution de (S_1). Démontrer l'existence des deux réels

$$H = \max_{x\in[0,1]} \left|h(x)\right| \quad \text{et} \quad Y = \max_{x\in[0,1]} \left|y(x)\right|$$

puis l'encadrement suivant :

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \left|y(x)\right| \leqslant \frac{HY}{8}.$$

4. d. En déduire une condition nécessaire sur la fonction h pour qu'il existe des solutions de (S_1) autres que l'application nulle.

4. e. Vérifier que, lorsque h est constante et qu'il existe des solutions de (S_1) autres que l'application nulle, cette condition est satisfaite.

Solution ❀ Une équation différentielle avec conditions aux limites

1. Remarquons tout d'abord que la fonction nulle est bien solution du système (S). Pour la réciproque, il faut distinguer trois cas.

❧ Si $\alpha = 0$, alors y'' est nulle sur un intervalle, donc y est une fonction affine. Les conditions aux limites $y(0) = y(1) = 0$ imposent alors $y(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.

❧ Si $\alpha = \omega^2 > 0$, alors il existe deux réels A et B tels que

$$\forall\, x \in [0,1], \quad y(x) = A \operatorname{sh} \omega x + B \operatorname{ch} \omega x.$$

La condition aux limites $y(0) = 0$ impose $B = 0$ et la condition $y(1) = 0$ impose alors $A \operatorname{sh} \omega = 0$, donc $A = 0$ (puisque sh ne s'annule qu'à l'origine et que $\omega > 0$). Par conséquent, la fonction y est identiquement nulle sur le segment $[0, 1]$.

❧ Si $\alpha = -\omega^2 < 0$, alors il existe deux réels A et B tels que

$$\forall\, x \in [0,1], \quad y(x) = A \sin \omega x + B \cos \omega x.$$

La condition aux limites $y(0) = 0$ impose $B = 0$ et la condition $y(1) = 0$ impose alors

$$A \sin \omega = 0$$

c'est-à-dire $A = 0$ *ou* $\omega = 0 \pmod{\pi}$.

❧ En conclusion :

— S'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $\alpha = -(k\pi)^2$, alors y est une solution du système (S) si, et seulement si, il existe une constante A telle que

$$\forall\, x \in [0,1], \quad y(x) = A \sin k\pi x.$$

— Sinon, la seule solution du système (S) est la fonction nulle.

2. a. Comme φ est continue sur $\mathbb{R}$, alors les fonctions

$$[t \mapsto t\varphi(t)] \quad \text{et} \quad [t \mapsto (1-t)\varphi(t)]$$

sont continues sur $\mathbb{R}$ et d'après le Théorème fondamental de l'Analyse, les fonctions

$$\left[x \mapsto \int_0^x t\varphi(t)\,dt\right] \quad \text{et} \quad \left[x \mapsto \int_x^1 (1-t)\varphi(t)\,dt\right]$$

sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées ont pour expressions respectives :

$$x\varphi(x) \quad \text{et} \quad (x-1)\varphi(x).$$

On en déduit que Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= -\int_0^x t\varphi(t)\,dt + (1-x)x\varphi(x) + \int_x^1 (1-t)\varphi(t)\,dt + x(x-1)\varphi(x)\\ &= -\int_0^x t\varphi(t)\,dt + \int_x^1 (1-t)\varphi(t)\,dt.\end{aligned}$$

On déduit des remarques précédentes que Φ' est de classe $\mathscr{C}^1$ (c'est-à-dire que Φ est de classe $\mathscr{C}^2$) et que

$$\Phi''(x) = -x\varphi(x) + (x-1)\varphi(x) = -\varphi(x).$$

Par ailleurs, il est clair que $\Phi(0) = \Phi(1) = 0$.

On a ainsi démontré que Φ est une solution du système (S_0).

2. b. Comme Φ et Φ_1 sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, la différence

$$\Delta = \Phi_1 - \Phi$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Delta''(x) = \Phi_1''(x) - \Phi''(x) = -\varphi(x) + \varphi(x) = 0,$$

la fonction Δ est affine. Les conditions aux limites

$$\Delta(0) = \Phi_1(0) - \Phi(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \Delta(1) = \Phi_1(1) - \Phi(1) = 0$$

imposent alors que Δ est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \Phi_1(x) = \Phi(x).$$

3. On a démontré que Φ était une solution de (S_0) au **[2.a.]** et que toute solution de (S_0) était égale à Φ au **[2.b.]**.

Le système (S_0) admet donc une, et une seule, solution.

4. a. Comme h et y sont des fonctions continues, les fonctions

$$\left[x \mapsto \int_0^x th(t)y(t)\,dt\right] \quad \text{et} \quad \left[x \mapsto \int_x^1 (t-1)h(t)y(t)\,dt\right]$$

sont de classe $\mathscr{C}^1$, donc la fonction y est en fait de classe $\mathscr{C}^1$ et d'après le Théorème fondamental de l'Analyse,

$$\begin{aligned} y'(x) &= \int_0^x th(t)y(t)\,dt + (x-1)xh(x)y(x) + \int_x^1 (t-1)h(t)y(t)\,dt - x(x-1)h(x)y(x) \\ &= \int_0^x th(t)y(t)\,dt + \int_x^1 (t-1)h(t)y(t)\,dt. \end{aligned}$$

On voit sur cette expression que y' est de classe $\mathscr{C}^1$, donc que y est en fait de classe $\mathscr{C}^2$ et que

$$y''(x) = xh(x)y(x) + (1-x)h(x)y(x) = h(x)y(x).$$

De plus, il est clair que $y(0) = y(1) = 0$, donc y est bien une solution de (S_1).

4. b. Si la fonction y est une solution de (S_1), alors elle est de classe $\mathscr{C}^2$, donc la fonction z définie par

$$z(x) = (x-1)\int_0^x th(t)y(t)\,dt + x\int_x^1 (t-1)h(t)y(t)\,dt$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ et, d'après **[4.a.]**,

$$\forall\, x \in [0,1], \quad y''(x) - z''(x) = h(x)y(x) - h(x)y(x) = 0,$$

donc la différence $(y - z)$ est affine sur le segment $[0, 1]$.

D'après les conditions aux limites,

$$y(0) = z(0) = 0 \quad \text{et} \quad y(1) = z(1) = 0$$

donc $(y - z)$ est la fonction nulle sur $[0, 1]$, ce qui montre que la fonction y vérifie la relation (R).

4. c. Les fonctions h et y sont continues sur le segment $[0, 1]$, donc elles sont bornées sur ce segment et atteignent leurs bornes respectives : cela prouve l'existence des réels H et Y.

❧ Soit $x \in [0, 1]$.

Pour tout $t \in [0, x]$,

$$\left|th(t)y(t)\right| \leqslant HY\,t$$

et d'après l'inégalité de la moyenne,

$$\left|\int_0^x th(t)y(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^x HY\,t\,dt = HY\,\frac{x^2}{2}.$$

Pour tout $t \in [x, 1]$,

$$\left|(t-1)h(t)y(t)\right| \leqslant HY\,(1-t)$$

et d'après l'inégalité de la moyenne,

$$\left|\int_x^1 (t-1)h(t)y(t)\,dt\right| \leqslant \int_x^1 HY\,(1-t)\,dt = HY\,\frac{(1-x)^2}{2}.$$

❧ On déduit alors de (R) et de l'inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned}|y(x)| &\leqslant \frac{(1-x)x^2+(1-x)^2x}{2}\ \mathrm{HY}\\ &\leqslant \frac{(1-x)x}{2}\ \mathrm{HY} \leqslant \frac{1}{8}\ \mathrm{HY}\end{aligned}$$

puisque $0 \leqslant x(1-x) \leqslant 1/4$ pour tout $x \in [0,1]$ (comme chacun devrait savoir).

4. d. En passant au max dans l'encadrement précédent, on obtient

$$Y \leqslant \frac{\mathrm{HY}}{8}.$$

Si la fonction y n'est pas identiquement nulle, alors $|y(x)|$ prend des valeurs strictement positives et $Y > 0$. On en déduit alors que

$$H \geqslant 8.$$

Ainsi : pour qu'il existe (au moins) une solution de (S_1) autre que la fonction identiquement nulle, il faut que

$$\exists\, x_0 \in [0,1], \qquad |h(x_0)| \geqslant 8.$$

4. e. Lorsque h est constante, la résolution de (S_1) a été étudiée au **[1.]** et on a démontré que, s'il existait des solutions autres que la fonction identiquement nulle, alors il existait un entier $k \geqslant 1$ tel que

$$\forall\, x \in [0,1], \quad h(x) = a = -(k\pi)^2$$

et donc tel que

$$H = k^2\pi^2 \geqslant \pi^2 > 8.$$

La condition nécessaire du **[4.d.]** est donc bien satisfaite.