

Problème de Mathématiques

Référence pp1223 — Version du 6 février 2026

On s'intéresse aux solutions périodiques d'équations différentielles de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) = f(t) \quad (E_f)$$

où $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

1. Déterminer les solutions périodiques des équations différentielles suivantes.

1. a.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) = 0 \quad (E_0)$$

1. b.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) = \cos t \quad (E_1)$$

2. Démontrer que, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, l'équation (E_0) admet une, et une seule, solution $x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{cases} x(0) = u \\ x'(0) = v. \end{cases}$$

Partie A. Solution périodique de (E_f)

3. On suppose que l'équation (E_f) admet une solution périodique, de période $T > 0$. Démontrer que T est une période de f .

4. On suppose que la fonction f est continue et admet $T > 0$ pour période. On considère une fonction x_0 de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} , solution particulière de l'équation (E_f) .

4. a. Démontrer que, pour toute solution x de (E_f) , la fonction δ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \delta(t) = x(t+T) - x(t)$$

est une solution de (E_0) .

4. b. Exprimer les solutions de (E_f) en fonction de x_0 .

4. c. Démontrer qu'il existe une, et une seule, solution de (E_f) telle que

$$\delta(0) = \delta'(0) = 0.$$

4. d. En déduire que l'équation (E_f) admet une, et une seule, solution de période T .

Partie B. Un cas particulier

On suppose que la fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R})$, de période 2π , est définie par

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \quad f(t) = t^2.$$

5. Tracer l'allure du graphe de f sur $[0, 10]$.

6. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f . En quel sens la série de Fourier de f converge-t-elle? Comparer sa somme avec f .

7. Pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$u_n(t) = \frac{4(-1)^n}{n^2(n^4 + 4)} [(2 - n^2) \cos nt - 2n \sin nt].$$

Démontrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur \mathbb{R} .

8. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$S(t) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t).$$

8. a. Démontrer que S est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

8. b. Démontrer que S est l'unique solution 2π -périodique de (E_f) .

9. Expliciter l'expression $S(t)$ pour $|t| < \pi$ en résolvant l'équation (E_f) .

Solution * Solution périodique d'une équation différentielle

1.a. On reconnaît une équation différentielle linéaire et homogène, du second ordre, à coefficients constants. Les racines de l'équation caractéristique :

$$\chi^2 - 2\chi + 2 = 0$$

sont $1 \pm i$. Par conséquent, une fonction x est une solution de (E_0) si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = e^t(a \cos t + b \sin t).$$

Si $(a, b) \neq (0, 0)$, alors la fonction x n'est pas bornée (considérer $x(2k\pi)$ et $x(\pi/2 + 2k\pi)$) et ne peut donc pas être continue et périodique.

La fonction nulle ω est la seule solution périodique de l'équation (E_0) .

1.b. On reconnaît une équation différentielle linéaire, associée à l'équation homogène (E_0) et, au vu du second membre, on sait qu'il existe une solution particulière de la forme

$$[t \mapsto a \cos t + b \sin t].$$

On vérifie sans peine que la fonction

$$x_0 = \left[t \mapsto \frac{\cos t - 2 \sin t}{5} \right]$$

est une solution 2π -périodique de (E_1) .

* D'après le principe de superposition, une fonction x est une solution de (E_1) si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = x_0(t) + e^t(a \cos t + b \sin t).$$

D'après la question précédente, comme la fonction x_0 est bornée, la fonction x est bornée sur \mathbb{R} si, et seulement si, $(a, b) = (0, 0)$.

Par conséquent, la fonction x_0 est l'unique solution périodique de (E_1) .

2. Soit x , une solution de (E_0) . Il existe donc $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = e^t(a \cos t + b \sin t).$$

En particulier, pour t voisin de 0,

$$\begin{aligned} x(t) &= (a + bt + o(t))(1 + t + o(t)) \\ &= a + (a + b)t + o(t). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{cases} x(0) = u \\ x'(0) = v \end{cases} \iff \begin{cases} a = u \\ a + b = v. \end{cases}$$

Ce dernier système est un système de Cramer, ce qui prouve que : pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, l'équation (E_0) admet une, et une seule, solution $x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{cases} x(0) = u \\ x'(0) = v. \end{cases}$$

Partie A. Solution périodique de (E_f)

3. Si x est une fonction T -périodique, alors x' et x'' sont T -périodiques et l'équation (E_f) prouve alors que f est aussi T -périodique.

4.a. La fonction $y = [t \mapsto x(t + T)]$ est (au moins) deux fois dérivable (comme x) et comme f est T -périodique, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = f(t + T) = f(t)$$

donc y est une solution de (E_f) . Comme (E_f) est une équation différentielle linéaire, la différence δ de deux solutions de (E_f) est une solution de l'équation homogène (E_0) associée à (E_f) .

4.b. Comme on l'a vu dans un cas particulier au [1.b.], d'après le principe de superposition, une fonction x est une solution de (E_f) si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = x_0(t) + e^t(a \cos t + b \sin t).$$

4. c. Par définition de δ et d'après la formule générale des solutions de (E_f) ,

$$\begin{aligned}\delta(0) &= a(e^T \cos T - 1) + be^T \sin T + (x_0(T) - x_0(0)) \\ \delta'(0) &= a[e^T(\cos T - \sin T) - 1] \\ &\quad + b[e^T(\cos T + \sin T) - 1] + [x'_0(T) - x'_0(0)].\end{aligned}$$

On considère alors les conditions $\delta(0) = \delta'(0) = 0$ comme un système de deux équations en les inconnues a et b , dont le déterminant est égal à

$$(e^T \cos T - 1)^2 + (e^T \sin T)^2,$$

quantité qui n'est nulle que pour $T = 0$ (il faut en effet que $\sin T = 0$, donc $\cos T = \pm 1$, donc $e^T = \pm 1$, donc $T = 0$).

Il existe donc un, et un seul, couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\delta(0) = \delta'(0) = 0$.

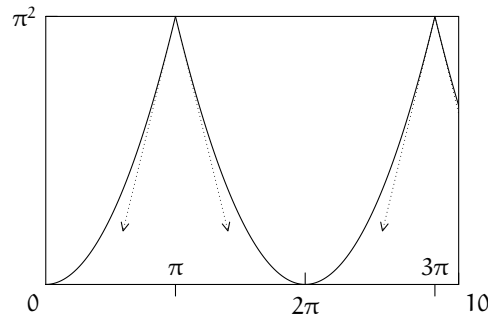
4. d. Choisissons $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\delta(0) = \delta'(0) = 0$. Par [4.a.], la fonction δ est une solution de (E_0) et par [2.], la fonction δ est alors la fonction nulle, ce qui se traduit par le fait que x est une solution T -périodique de (E_f) .

• Réciproquement, si x est une solution T -périodique de (E_f) , alors la fonction δ qui est associée à x est identiquement nulle et en particulier $\delta(0) = \delta'(0) = 0$. Par [4.c.], l'équation (E_f) admet donc au plus une solution de période T .

L'équation (E_f) admet donc une, et une seule, solution de période T .

Partie B. Un cas particulier

5. La fonction f est bien définie (puisque $f(-\pi) = f(\pi)$). Elle est continue sur \mathbb{R} (puisque'elle est continue sur $]-\pi, \pi[$ et que $f(\pi^-) = f(\pi) = f(-\pi) = f(-\pi^+)$) et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} (puisque'elle est de classe \mathcal{C}^1 sur $]-\pi, \pi[$ et que sa dérivée admet une limite finie à gauche en π et à droite en $-\pi$).



6. Comme la fonction f est paire, tous les $b_n(f)$ sont nuls et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t^2 \cos nt \, dt.$$

On obtient directement

$$a_0(f) = \frac{2\pi^2}{3}$$

et, en intégrant deux fois par parties,

$$\forall n \geq 1, \quad a_n(f) = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

• Comme la fonction f est continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, sa série de Fourier converge normalement sur \mathbb{R} et sa somme est bien égale à f . Ainsi

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \quad t^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nt.$$

7. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, il est clair que

$$u_n(t) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

lorsque n tend vers $+\infty$. Par comparaison, la série $\sum u_n(t)$ converge donc absolument pour tout $t \in \mathbb{R}$.

8. a. D'après la question précédente, S est bien définie, en tant que somme d'une série de fonctions qui converge simplement sur \mathbb{R} .

• Pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$u'_n(t) = \frac{4(-1)^n}{n^2(n^4 + 1)} [(n^2 - 1)n \sin nt - 2n^2 \cos nt]$$

et par conséquent

$$|u'_n(t)| \leq \frac{4(n^3 + 2n^2 + 2n)}{n^2(n^4 + 4)}.$$

Le majorant est indépendant de $t \in \mathbb{R}$ et dominé par $1/n^3$, donc la série des dérivées $\sum u'_n$ converge normalement sur \mathbb{R} . La fonction S est donc de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et dérivable terme à terme.

• Pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$u''_n(t) = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2(n^4 + 4)} [n^2(2 - n^2) \cos nt + 2n^3 \sin nt]$$

et par conséquent

$$|u''_n(t)| \leq \frac{4(n^2 + 2n + 2)}{n^4 + 4}.$$

Le majorant est indépendant de $t \in \mathbb{R}$ et dominé par $1/n^2$, donc la série des dérivées secondes $\sum u''_n$ converge normalement sur \mathbb{R} . La fonction S est donc de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et deux fois dérivable terme à terme.

8. b. Il est clair que S est une fonction de période 2π et, d'après la question précédente, elle est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} . À l'aide des relations

$$S'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(t) \quad \text{et} \quad S''(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u''_n(t)$$

établies à la question précédentes et des coefficients de Fourier de f calculés au [6.], on vérifie sans difficulté que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S''(t) - 2S'(t) + 2S(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos nt.$$

Comme f est la somme de sa série de Fourier d'après [6.], on en déduit que S est bien une solution de (E_f) .

D'après [4.d.], la fonction S est donc l'unique solution 2π -périodique de (E_f) .

9. Sur l'intervalle ouvert $]-\pi, \pi[$, l'équation différentielle (E_f) devient

$$x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) = t^2.$$

On connaît déjà les solutions de l'équation homogène (E_0) . Au vu du second membre, on sait qu'il existe une solution particulière qui est polynomiale de degré 2 : on vérifie sans peine que la fonction

$$x_0 = \left[t \mapsto \frac{(t+1)^2}{2} \right]$$

convient. Par conséquent, il existe deux réels a et b tels que

$$\forall t \in]-\pi, \pi[, \quad S(t) = \frac{(t+1)^2}{2} + e^t(a \cos t + b \sin t). \quad (*)$$

• Comme S est continue et 2π -périodique, il faut que la limite à gauche en $t = \pi$ soit égale à la limite à droite en $t = -\pi$ et donc, d'après (*), que

$$\frac{(-\pi+1)^2}{2} + e^{-\pi}(-a) = \frac{(\pi+1)^2}{2} + e^{\pi}(-a).$$

• La dérivée S' est aussi continue et 2π -périodique : il faut aussi que la limite à gauche en $t = \pi$ de S' soit égale à la limite à droite en $t = -\pi$ et donc, toujours d'après (*), que

$$(-\pi+1) - e^{-\pi}(a+b) = (\pi+1) - e^{\pi}(a+b).$$

On déduit des deux équations précédentes que

$$a = \frac{\pi}{\text{sh } \pi} \quad \text{et} \quad b = 0$$

et finalement que

$$\forall t \in]-\pi, \pi[, \quad S(t) = \frac{(t+1)^2}{2} + \frac{\pi e^t \cos t}{\text{sh } \pi}.$$