

Problème de Mathématiques

Référence pp1517 — Version du 6 février 2026

On note $\mathcal{C}_{2\pi}$, l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π -périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$c_k = [t \mapsto \cos kt] \quad \text{et} \quad s_k = [t \mapsto \sin kt].$$

L'espace $\mathcal{C}_{2\pi}$ est muni de la norme, notée $\|\cdot\|_2$, associée au produit scalaire défini par

$$(f | g) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt.$$

• On note E , le sous-espace de $\mathcal{C}_{2\pi}$ constitué des fonctions impaires et E_2 , le sous-espace des fonctions de classe \mathcal{C}^2 qui appartiennent à E . Comme E_2 est un sous-espace de E , on dira que $f \in E_2$, non nulle, est un vecteur propre et que $\lambda \in \mathbb{R}$ est la valeur propre de $T \in L(E_2, E)$ associée à f lorsque $T(f) = \lambda f$.

• On fixe une fonction q de classe \mathcal{C}^1 , paire et 2π -périodique de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On suppose que q n'est pas constante. Dans ces conditions, la fonction q est bornée et

$$a = \inf_{x \in \mathbb{R}} q(x) < \sup_{x \in \mathbb{R}} q(x) = b.$$

On considère alors les applications linéaires de E_2 dans E définies par

$$A(y) = -y'' + ay, \quad B(y) = -y'' + by, \quad Q(y) = -y'' + qy.$$

Partie A. Résultats généraux

Dans cette partie, le réel λ est fixé et on étudie l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + (\lambda - q(x))y(x) = 0. \tag{E_\lambda}$$

1. Énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour (E_λ) .
2. Exploiter l'unicité pour démontrer qu'une solution y de (E_λ) est impaire si, et seulement si, $y(0) = 0$.
3. On rappelle qu'une solution de (E_λ) est, par définition, une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .
- 3.a. Quelle est la structure algébrique de l'ensemble des solutions de (E_λ) ?
- 3.b. Démontrer, par exemple à l'aide du wronskien, qu'une base de l'espace des solutions de (E_λ) ne peut être constituée de fonctions de même parité.
- 3.c. En déduire la dimension des sous-espaces propres de Q .
4. Déterminer les valeurs propres de A et de B . Pour chacune d'elles, donner un vecteur propre unitaire.
5. Démontrer que

$$\forall f \in E_2, \quad (f | A(f)) \leq (f | Q(f)) \leq (f | B(f)).$$

Partie B. Problème approché en dimension finie

Dans la suite du problème, on note V_n , le sous-espace de E_2 engendré par s_1, \dots, s_n et Π_n , la projection orthogonale de E sur V_n . Pour toute application linéaire $T : E_2 \rightarrow E$, on notera T_n , l'endomorphisme de V_n défini par $T_n(f) = (\Pi_n \circ T)(f)$.

6. Démontrer que (s_1, \dots, s_n) est une base orthonormée de V_n .
7. Justifier l'existence de Π_n .
8. Démontrer que

$$\forall f, g \in E, \quad (f | \Pi_n(g)) = (\Pi_n(f) | g).$$

9. Démontrer que

$$\forall f, g \in E_2, \quad (f | Q(g)) = (Q(f) | g)$$

puis que Q_n est un endomorphisme symétrique de V_n .

On notera dorénavant $\lambda_1^n \leq \lambda_2^n \leq \dots \leq \lambda_n^n$, le système des valeurs propres de Q_n rangées par ordre croissante et $\mathcal{B}_n = (e_1^n, \dots, e_n^n)$, une base orthonormée de V_n telle que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad Q_n(e_k^n) = \lambda_k^n e_k^n.$$

10. À l'aide de [5.], démontrer que

$$\forall f \in V_n, \quad (f|A_n(f)) \leq (f|Q_n(f)) \leq (f|B_n(f)).$$

11. Dédurre de [4.] les valeurs propres de A_n et de B_n .

12. Soit $1 \leq k \leq n$. On pose

$$W_k^n = \text{Vect}(e_k^n, e_{k+1}^n, \dots, e_n^n).$$

12. a. Démontrer qu'il existe un vecteur unitaire f appartenant à $V_k \cap W_k^n$. Démontrer alors que

$$\lambda_k^n \leq (f|Q(f)) \leq (f|B(f)) \leq k^2 + b.$$

12. b. Démontrer de manière analogue que

$$k^2 + a \leq \lambda_k^n.$$

13. On suppose ici que $n \geq 2$.

13. a. Démontrer que

$$\forall f \in V_{n-1}, \quad (f|Q_n(f)) = (f|Q_{n-1}(f)).$$

13. b. En déduire, en s'inspirant de [12.], que

$$\forall 1 \leq k < n, \quad \lambda_k^{n-1} \geq \lambda_k^n.$$

14. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k = [k^2 + a, k^2 + b]$.

14. a. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(\lambda_k^n)_{n \geq k}$ converge et que sa limite, notée λ_k , appartient à I_k .

14. b. Démontrer que la suite $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ est croissante.

Solution ✿ Équations différentielles linéaires

Partie A. Résultats généraux

1. L'équation (E_λ) est une équation différentielle linéaire, scalaire, du second ordre, définie sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous dit que : pour toute condition initiale

$$(x_0, y_0, v_0) \in \mathbb{R}^3,$$

il existe une, et une seule, fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$f(x_0) = y_0, \quad f'(x_0) = v_0$$

et qui vérifie (E_λ) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + (\lambda - q(x))f(x) = 0.$$

2. Toute fonction impaire y (solution, ou non, de (E_λ)) vérifie $y(0) = 0$.
Réciproquement, soit y , une solution de (E_λ) telle que $y(0) = 0$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z(x) = -y(-x).$$

Comme y est de classe \mathcal{C}^2 , alors z est de classe \mathcal{C}^2 et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z'(x) = y'(-x), \quad z''(x) = -y''(-x).$$

Or q est une fonction paire, donc

$$\begin{aligned} z''(x) + (\lambda - q(x))z(x) &= -y''(-x) - (\lambda - q(-x))y(-x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, z est une solution de (E_λ) . Or

$$z(0) = y(0) = 0 \quad \text{et} \quad z'(0) = y'(0),$$

donc y et z sont deux solutions de (E_λ) associées à la même condition initiale :

$$(t_0, y_0, v_0) = (0, 0, y'(0)).$$

D'après la question précédente,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z(x) = y(x)$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -y(-x) = y(x)$$

donc y est impaire.

On a donc démontré que : une solution $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de (E_λ) est impaire si, et seulement si, $y(0) = 0$.

3. a. Comme (E_λ) est une équation différentielle linéaire, homogène, scalaire d'ordre deux, l'ensemble des solutions de (E_λ) est un espace vectoriel de dimension 2.

3. b. Soit (f, g) , une base de l'espace \mathcal{S}_λ des solutions de (E_λ) . Son wronskien, défini par

$$W(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - f'(x)g(x),$$

ne s'annule donc en aucun point de \mathbb{R} .

✿ Si f et g étaient paires, alors f' et g' seraient impaires, donc W serait impaire et en particulier nulle en $x = 0$.

✿ Si f et g étaient impaires, alors f' et g' seraient paires, donc W serait encore impaire!

Par conséquent, les fonctions f et g ne peuvent être de même parité.

REMARQUE.— Il est ici inutile d'expliciter le wronskien, mais il est intéressant de voir qu'un calcul *très simple* permet d'y parvenir. Comme f et g sont des solutions de (E_λ) ,

$$\begin{aligned} W'(x) &= f(x)g''(x) - f''(x)g(x) \\ &= (q(x) - \lambda)[f(x)g(x) - f(x)g(x)] = 0 \end{aligned}$$

donc W est une application constante sur \mathbb{R} .

3. c. Le sous-espace propre de Q associé à $\lambda \in \mathbb{R}$ est l'ensemble des solutions *impaires* et 2π -*périodiques* de l'équation (E_λ) . C'est donc un sous-espace vectoriel du *plan* S_λ des solutions de (E_λ) et en particulier

$$0 \leq \dim \text{Ker}(Q - \lambda I) \leq \dim S_\lambda = 2.$$

Par définition, si λ est une valeur propre de Q , alors la dimension de $\text{Ker}(Q - \lambda I)$ est supérieure à 1.

Si $\dim \text{Ker}(Q - \lambda I)$ était égale à 2, alors toute solution de (E_λ) serait impaire et il existerait une base de S_λ constituée de deux fonctions impaires : par [3.b.], c'est impossible.

Donc les sous-espaces propres de Q sont tous des droites.

4. On cherche les solutions *impaires* et 2π -*périodiques*, *non nulles*, d'une équation différentielle de la forme

$$-y'' + cy = \lambda y,$$

c'est-à-dire de

$$y'' + (\lambda - c)y = 0.$$

Cette équation est archi-connue : on sait donc qu'elle admet des solutions de la forme voulue si, et seulement si, $(\lambda - c)$ est le carré d'un entier non nul et que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les solutions impaires et 2π -périodiques associées à la valeur propre

$$\lambda_k = c + k^2$$

sont les fonctions proportionnelles à s_k .

Par définition de la norme $\|\cdot\|_2$,

$$\|s_k\|_2^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 kt \, dt = 1$$

donc s_k est unitaire.

En conclusion, un réel λ est une valeur propre de A (resp. de B) si, et seulement si, il existe un entier $k \geq 1$ tel que $\lambda = a + k^2$ (resp. $\lambda = b + k^2$) et, pour tout $k \geq 1$, la fonction s_k est un vecteur propre unitaire de A (pour $a + k^2$) et de B (pour $b + k^2$).

5. Par définition de a et b et par positivité de $f^2(t)$,

$$\forall t \in [0, 2\pi], \quad af^2(t) \leq q(t)f^2(t) \leq bf^2(t)$$

donc, par positivité de l'intégrale,

$$a(f|f) \leq (f|qf) \leq b(f|f)$$

et donc, par linéarité du produit scalaire par rapport à la deuxième variable,

$$(f|A(f)) \leq (f|Q(f)) \leq (q|B(f)).$$

Partie B. Problème approché en dimension finie

6. On a déjà vu (au [4.]) que les s_k sont unitaires en tant que vecteurs de l'espace euclidien V_n .

Par ailleurs, si $1 \leq i < j \leq n$, alors

$$(s_i | s_j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(i-j)t - \cos(i+j)t \, dt = 0,$$

donc (s_1, \dots, s_n) est bien une famille orthonormée.

Comme elle engendre V_n (par définition de V_n), il s'agit d'une base orthonormée de V_n .

7. Comme V_n est un sous-espace de dimension *finie*, la projection orthogonale sur V_n est bien définie. On sait même que

$$\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}, \quad \Pi_n(f) = \sum_{k=1}^n (s_k | f) \cdot s_k$$

puisque (s_1, \dots, s_n) est une base orthonormée de V_n .

8. La bilinéarité du produit scalaire et l'expression de Π_n rappelée à la question précédente montrent que ces deux quantités sont égales à

$$\sum_{k=1}^n (s_k | f) (s_k | g).$$

Elles sont donc égales entre elles.

9. Comme f et g appartiennent à E_2 , elles sont de classe \mathcal{C}^2 . En intégrant par parties,

$$\begin{aligned} (Q(f)|g) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} -f''(t)g(t) dt + (qf|g) \\ &= \frac{1}{\pi} [-f'(t)g(t)]_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(t)g'(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)q(t) dt \\ &= (f'|g') + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)q(t) dt \end{aligned}$$

puisque $g(0) = 0 = g(2\pi)$ (fonction 2π -périodique et impaire). Comme l'expression trouvée est symétrique en f et g , on en déduit que

$$\forall f, g \in E_2, \quad (f|Q(g)) = (Q(f)|g).$$

• Tout d'abord, Q_n est bien un endomorphisme de V_n :

$$V_n \xrightarrow{Q} E \xrightarrow{\Pi_n} V_n.$$

Ensuite, comme Π_n est une projection sur V_n , alors

$$\forall h \in V_n, \quad \Pi_n(h) = h.$$

Par conséquent, quels que soient f et g dans V_n ,

$$\begin{aligned} (f|Q_n(g)) &= (f|(\Pi_n \circ Q)(g)) \\ &= (\Pi_n(f)|Q(g)) = (f|Q(g)) \end{aligned}$$

d'après [8.] Ce qui précède permet d'en déduire que

$$\forall f, g \in V_n, \quad (f|Q_n(g)) = (Q_n(f)|g)$$

et donc que Q_n est un endomorphisme symétrique de V_n .

10. Comme $f \in V_n$, alors $f = \Pi_n(f)$ (vu à la question précédente). On déduit alors de [5.] que

$$(\Pi_n(f)|A(f)) \leq (\Pi_n(f)|Q(f)) \leq (\Pi_n(f)|B(f)).$$

Par [8.], on obtient alors

$$(f|A_n(f)) \leq (f|Q_n(f)) \leq (f|B_n(f)),$$

cqfd.

11. Un vecteur propre de A_n est un vecteur propre de A qui appartient à V_n et on a identifié au [4.] tous les vecteurs propres de A . Par conséquent, les vecteurs propres de A_n sont s_1, \dots, s_n et les valeurs propres associées sont

$$a + 1, a + 4, \dots, a + k^2, \dots, a + n^2.$$

De même, les valeurs propres de B_n sont

$$b + 1, b + 4, \dots, b + k^2, \dots, b + n^2.$$

12. a. Par définition, $\dim V_k = k$. Les vecteurs e_k^n, \dots, e_n^n forment une famille libre (par hypothèse) de $(n - k + 1)$ vecteurs, donc ils engendrent un sous-espace de dimension $(n - k + 1)$. Or

$$\begin{aligned} \dim(V_k + W_k^n) &= \dim V_k + \dim W_k^n - \dim(V_k \cap W_k^n) \\ &= (n + 1) - \dim(V_k \cap W_k^n) \\ &\leq n \end{aligned}$$

puisque $V_k + W_k^n$ est contenu dans V_n , espace de dimension n . Ainsi, $V_k \cap W_k^n$ n'est pas réduit à $\{0\}$ et contient donc un vecteur unitaire f .

• Il existe donc des scalaires $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq k}$ et $(\beta_i)_{k \leq i \leq n}$ tels que

$$f = \sum_{i=1}^k \alpha_i s_i = \sum_{i=k}^n \beta_i e_i^n$$

et (puisqu'on a ainsi décomposé le vecteur unitaire f dans deux familles orthonormées)

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i^2 = \sum_{i=k}^n \beta_i^2 = 1.$$

• Comme les e_i^n sont des vecteurs propres de Q ,

$$Q(f) = \sum_{i=k}^n \lambda_i^n \alpha_i e_i^n$$

et comme $(e_i^n)_{k \leq i \leq n}$ est orthonormée,

$$(f | Q(f)) = \sum_{i=k}^n \underbrace{\lambda_i^n}_{\geq \lambda_k^n} \alpha_i^2 \geq \sum_{i=k}^n \lambda_k^n \alpha_i^2 = \lambda_k^n.$$

• Par [4.],

$$B(f) = \sum_{i=1}^k (i^2 + b) \beta_i s_i$$

et comme $(s_i)_{1 \leq i \leq k}$ est orthonormée,

$$(f | B(f)) = \sum_{i=1}^k \underbrace{(i^2 + b)}_{\leq (k^2 + b)} \beta_i^2 \leq \sum_{i=1}^k (k^2 + b) \beta_i^2 = k^2 + b.$$

• Par [5.],

$$\lambda_k^n \leq (f | Q(f)) \leq (f | B(f)) \leq k^2 + b.$$

12. b. On applique le même raisonnement aux sous-espaces

$$V^k = \text{Vect}(s_k, \dots, s_n) \quad \text{et} \quad W_1^k = \text{Vect}(e_1^n, \dots, e_k^n)$$

dont les dimensions sont égales à $(n - k + 1)$ et k respectivement. Il existe donc un vecteur unitaire g qui appartient à l'intersection de ces deux sous-espaces :

$$g = \sum_{i=k}^n \alpha_i s_i = \sum_{i=1}^k \beta_i e_i^n$$

et comme plus haut

$$(g | A(g)) = \sum_{i=k}^n (i^2 + a) \alpha_i^2 \geq (k^2 + a) \|g\|_2^2$$

puisque $g \in V^k$ et

$$(g | Q(g)) = \sum_{i=1}^k \lambda_i^n \beta_i^2 \leq \lambda_k^n \|g\|_2^2$$

puisque $g \in W_1^k$. On déduit alors de [5.] que

$$k^2 + a \leq (g | A(g)) \leq (g | Q(g)) \leq \lambda_k^n$$

puisque g est unitaire.

13. a. Si $f \in V_{n-1} \subset V_n$, alors $f = \Pi_n(f) = \Pi_{n-1}(f)$ comme on l'a remarqué au [9.] et, par [8.],

$$\begin{aligned} (f | Q_n(f)) &= (\Pi_n(f) | Q(f)) = (f | Q(f)) \\ (f | Q_{n-1}(f)) &= (\Pi_{n-1}(f) | Q(f)) = (f | Q(f)) \end{aligned}$$

cqfd.

13. b. Soit $1 \leq k < n$. On considère les sous-espaces vectoriels de V_n définis par

$$\begin{aligned} F_1 &= \text{Vect}(e_k^n, \dots, e_n^n), \\ F_2 &= \text{Vect}(e_1^{n-1}, \dots, e_k^{n-1}). \end{aligned}$$

Par hypothèse sur les e_i^j , on a $\dim F_1 = (n - k + 1)$ et $\dim F_2 = k$. Or ce sont deux sous-espaces de V_n et $\dim V_n = n$, donc

$$\dim(F_1 \cap F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 + F_2) \geq 1.$$

Il existe donc un vecteur non nul $f \in F_1 \cap F_2$:

$$f = \sum_{i=k}^n \alpha_i e_i^n = \sum_{i=1}^k \beta_i e_i^{n-1}$$

et comme $F_2 \subset V_{n-1}$, alors $f \in V_{n-1}$. D'après la question précédente,

$$\sum_{i=k}^n \underbrace{\lambda_i^n}_{\geq \lambda_k^n} \alpha_i^2 = \sum_{i=1}^k \underbrace{\lambda_i^{n-1}}_{\leq \lambda_k^{n-1}} \beta_i^2.$$

Comme les familles $(e_i^{n-1})_{1 \leq i \leq k}$ et $(e_i^n)_{k \leq i \leq n}$ sont orthonormées, on en déduit que

$$\lambda_k^n \|f\|_2^2 \leq \lambda_k^{n-1} \|f\|_2^2$$

et comme $f \neq 0$, alors $\|f\|_2 > 0$ et $\lambda_k^n \leq \lambda_k^{n-1}$.

14. a. D'après la question précédente, la suite $(\lambda_k^n)_{n \geq k}$ est croissante et d'après [12.], elle est bornée :

$$\forall n \geq k, \quad k^2 + a \leq \lambda_k^n \leq k^2 + b.$$

Elle est donc convergente et, comme les inégalités larges sont conservées par passage à la limite,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad k^2 + a \leq \lambda_k \leq k^2 + b.$$

14. b. D'après [13.b.] et la définition des λ_i^j ,

$$\forall 2 \leq k < n, \quad \lambda_k^{n-1} \geq \lambda_k^n \geq \lambda_{k-1}^n.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que

$$\forall 2 \leq k, \quad \lambda_k \geq \lambda_{k-1}$$

et donc que $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ est croissante.

REMARQUE.— On peut démontrer que les λ_k sont les valeurs propres de Q et qu'il existe une famille totale orthonormale $(e_k)_{k \geq 1}$ de vecteurs propres de Q associée à ces valeurs propres : pour toute fonction $f \in E_2$, il existe une suite réelle $(\alpha_k)_{k \geq 1}$ telle que

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot e_k \right\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$