

Problème de Mathématiques

Référence pp1617 — Version du 6 février 2026

Toutes les fonctions étudiées ici sont des fonctions à valeurs réelles.

Soit y , une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur $I =]0, +\infty[$. On considère la fonction z définie par

$$\forall t \in I, \quad z(t) = y(1/t).$$

1. Démontrer que y vérifie l'équation différentielle

$$\forall x \in I, \quad 4x^4 y''(x) - y(x) = 0 \tag{1}$$

si, et seulement si, z vérifie l'équation différentielle

$$\forall t \in I, \quad 4tz''(t) + 8z'(t) - tz(t) = 0. \tag{2}$$

2. a. Soit u , la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

$$\forall t \in]-R, R[, \quad u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

Démontrer que u vérifie l'équation différentielle

$$\forall t \in]-R, R[, \quad 4tu''(t) + 8u'(t) - tu(t) = 0 \tag{3}$$

et la condition initiale $u(0) = 1$ si, et seulement si,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p+1} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2p} = \frac{1}{4^p (2p+1)!}.$$

2. b. En déduire la valeur de R et une expression de u à l'aide des fonctions usuelles.

3. Déterminer une solution y de (1), autre que la fonction nulle, telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x} = 0.$$

Solution ✿ Une équation différentielle du second ordre

1. Comme y est une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur I et que

$$\varphi = [t \mapsto 1/t]$$

est une fonction de classe \mathcal{C}^2 de I dans I , alors la composée $z = y \circ \varphi$ est de classe \mathcal{C}^2 sur I et

$$z'(t) = \frac{-1}{t^2} y'(1/t) \qquad z''(t) = \frac{1}{t^4} y''(1/t) + \frac{2}{t^3} y'(1/t)$$

pour tout $t \in I$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} 4tz''(t) + 8z'(t) - tz(t) &= \frac{4}{t^3} y''(1/t) + \frac{8}{t^2} y'(1/t) - \frac{8}{t^2} y'(1/t) - ty(1/t) \\ &= t \left[\frac{4}{t^4} y''(1/t) - y(1/t) \right] \end{aligned}$$

pour tout $t \in I$.

Par conséquent, z vérifie (2) si, et seulement si,

$$\forall t \in I, \quad \frac{4}{t^4} y''(1/t) - y(1/t) = 0$$

puisque $t \neq 0$ pour tout $t \in I$.

Comme la fonction φ réalise une bijection de I sur I , on peut alors effectuer le changement de variable $x = 1/t$. Donc z vérifie (2) si, et seulement si, y vérifie (1).

2. a. Comme le rayon de convergence R est strictement positif, la somme u est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -R, R[$ et pour tout $t \in] -R, R[$,

$$tu(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} t^n \tag{4}$$

$$u'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} t^n \tag{5}$$

$$tu''(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} t^n. \tag{6}$$

(On notera que seule la somme (5) commence à $n = 0$.)

Par combinaison linéaire de séries (absolument) convergentes, on en déduit que

$$4tu''(t) + 8u'(t) - tu(t) = 8a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} [4(n+2)(n+1)a_{n+1} - a_{n-1}] t^n$$

pour tout $t \in] -R, R[$.

La somme u vérifie donc l'équation différentielle (3) si, et seulement si,

$$\forall t \in] -R, R[, \quad 8a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} [4(n+2)(n+1)a_{n+1} - a_{n-1}] t^n = 0.$$

Le premier membre est la somme d'une série entière dont le rayon de convergence est au moins égal à R et donc strictement positif. Le second membre est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini (une fonction polynomiale). Par unicité du développement en série entière, on en déduit que u est solution de (3) si, et seulement si,

$$a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = \frac{a_{n-1}}{4(n+2)(n+1)}. \tag{7}$$

En outre, $u(0) = a_0$, donc : $u(0) = 1$ si, et seulement si, $a_0 = 1$.

Dans la relation de récurrence (7), les indices $(n-1)$ et $(n+1)$ ont même parité.

La condition initiale $a_1 = 0$ et la relation de récurrence

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p+1} = \frac{a_{2p-1}}{4(2p+2)(2p+1)}$$

signifient que tous les termes d'indice *impair* sont nuls :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p+1} = 0.$$

La condition initiale $a_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p+2} = \frac{a_{2p}}{4(2p+3)(2p+2)}$$

signifient que (récurrence simple) :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p} = \frac{1}{4^p(2p+1)!}.$$

NB : Cette démonstration par récurrence doit être rédigée pour avoir les points, puisque le résultat est donné par l'énoncé!

Finalement, u vérifie l'équation (3) et la condition initiale $u(0) = 1$ si, et seulement si,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p} = \frac{1}{4^p(2p+1)!} \quad \text{et} \quad a_{2p+1} = 0.$$

2. b. Faisons la synthèse des informations précédentes. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, posons

$$v_p(t) = \frac{t^{2p}}{4^p(2p+1)!}.$$

La série $\sum v_p(t)$ converge évidemment pour $t = 0$ (tous les termes sont nuls sauf le premier). Pour $t \neq 0$, on a $v_p(t) \neq 0$ et

$$\left| \frac{v_{p+1}(t)}{v_p(t)} \right| = \frac{t^2}{4(2p+3)(2p+2)} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série de fonctions $\sum v_p$ converge absolument sur \mathbb{R} . Comme cette série de fonctions est aussi une série entière, cela signifie que son rayon de convergence R est infini.

On remarque d'autre part que, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$u(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{2^{2p}(2p+1)!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(t/2)^{2p}}{(2p+1)!}.$$

On est ainsi conduit à considérer

$$\frac{t}{2} u(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(t/2)^{2p+1}}{(2p+1)!} = \text{sh} \frac{t}{2}.$$

On en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad u(t) = \frac{2}{t} \text{sh} \frac{t}{2}.$$

3. On déduit de [1.] (la fonction u tenant le rôle de z) et de la question précédente que la fonction y définie par

$$\forall x > 0, \quad y(x) = u(1/x) = 2x \text{sh} \frac{1}{2x}$$

est une solution de (1) qui n'est pas identiquement nulle. Il est clair que

$$\frac{y(x)}{x} = 2 \text{sh} \frac{1}{2x}$$

tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.