Problème de Mathématiques

Référence pp1823 — Version du 6 février 2026

L'espace $E = \mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Chaque vecteur $x \in E$ est identifié à la matrice colonne qui le représente dans la base canonique, de telle sorte que

$$\forall\, x, y \in E, \quad \langle\, x \,|\, y \,\rangle = x^\top.y.$$

1. On considère une fonction $f \in \mathscr{C}^1(E, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall\, x \in E,\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t \cdot x) = t^2 f(x)$$

et, pour $p \in E$ fixé, on pose

$$\forall\, x \in E, \quad F(x) = \langle\, p \,|\, x \,\rangle - f(x).$$

1. a. Démontrer que

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) = 2f(y)$$

pour tout $y = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in E$.

1. b. Calculer $\nabla F(x)$ en fonction de p et de $\nabla f(x)$.

1. c. On suppose que F atteint un extremum au point $x_0 \in E$. Démontrer que $F(x_0) = f(x_0)$.

2. Dans la suite de ce problème, on suppose que

$$\forall\, x \in E, \quad f(x) = x^\top.A.x$$

où $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose en outre que toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.

2. a. Démontrer que la matrice A est inversible.

2. b. Démontrer qu'il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale Δ telles que

$$A = P^\top.\Delta.P$$

et que

$$\Delta = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \text{où} \quad 0 < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n.$$

2. c. Démontrer qu'il existe deux réels $0 < \alpha \leqslant \beta$ tels que

$$\forall\, x \in E, \quad \alpha\|x\|^2 \leqslant f(x) \leqslant \beta\|x\|^2.$$

2. d. Démontrer que, pour tout $x_0 \in E$,

$$\forall\, h \in E, \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + 2x_0^\top.A.h + f(h).$$

2. e. En déduire que

$$\forall\, x_0 \in E, \quad \nabla f(x_0) = 2Ax_0.$$

3. On reprend l'étude de la fonction F définie en **[1.]**

3. a. Démontrer que la fonction f définie en **[2.]** vérifie les hypothèses faites en **[1.]**

3. b. Démontrer qu'il existe un, et un seul, point critique pour F.

3. c. Démontrer que la fonction F atteint un maximum global strict en ce point. On calculera la valeur de ce maximum.

4. La **transformée de Legendre** $L(f)$ de la fonction f est définie par

$$\forall\, p \in E, \quad L(f)(p) = \max_{x \in E} \langle\, p \,|\, x \,\rangle - f(x).$$

4. a. Démontrer que $L(f)$ est bien définie et qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont strictement positives telle que

$$\forall\, p \in E, \quad L(f)(p) = p^\top.B.p.$$

4. b. En déduire que $L[L(f)] = f$.

5. On considère maintenant une partie $C \subset E$, qu'on suppose fermée, convexe et non vide. On pose alors

$$M = \left\{x \in C \ : \ F(x) = \sup_{y \in C} F(y)\right\}.$$

5. a. Démontrer que la fonction F est majorée sur C.

5. b. Soit $y_0 \in C$ (arbitrairement choisi). On pose

$$K = \left\{y \in C \ : \ F(y) \geqslant F(y_0)\right\}.$$

Démontrer que K est une partie compacte non vide. En déduire que M contient au moins un point y_1.

5. c. Pour y_1 et y_2 dans C et pour $t \in [0, 1]$, on pose

$$y = (1 - t)y_1 + ty_2.$$

Vérifier que

$$F(y) = (1 - t)F(y_1) + tF(y_2) + t(1 - t)(y_1 - y_2)^\top.A.(y_1 - y_2)$$

et en déduire que M ne contient qu'un seul point.

5. d. Soit $h \in E$. Démontrer que

$$F(y_1 + t \cdot h) = F(y_1) + t \left\langle p - 2Ay_1 \,|\, h \right\rangle - t^2 f(h)$$

pour tout $t \geqslant 0$. En déduire que

$$\forall\, y \in C, \quad \left\langle p - 2Ay_1 \,|\, y - y_1 \right\rangle \leqslant 0$$

et interpréter géométriquement cette inégalité.

Solution ❀ Un problème d'extremum

1. a. On *fixe* $y \in E$ et on pose
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = f(t \cdot y).$$
L'application φ, en tant que composée de
$$t \longmapsto (x_1, \ldots, x_n) = (ty_1, \ldots, ty_n)$$
par
$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f(x_1, \ldots, x_n)$$
est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $E = \mathbb{R}^n$.

❧ D'après la règle de la chaîne,
$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t \cdot y) \frac{d(ty_i)}{dt}$$
c'est-à-dire
$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(t \cdot y)$$
pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par ailleurs,
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = 2tf(y).$$
Pour $t = 1$, on en déduit que
$$\varphi'(1) = 2f(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(y).$$

1. b. La fonction $g = [x \mapsto \langle\, p \,|\, x \,\rangle]$ est linéaire, donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. La fonction F est donc aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (en tant que combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$).

Comme g est linéaire,
$$\forall\, h \in E, \quad dg(x)(h) = g(h) = \langle\, p \,|\, h \,\rangle$$
et donc, par définition du gradient,
$$\forall\, x \in E, \quad \nabla g(x) = p.$$
Par linéarité de la différentiation, on en déduit que
$$\nabla F(x) = \nabla g(x) - \nabla f(x) = p - \nabla f(x).$$

1. c. Comme F est de classe $\mathscr{C}^1$ et que $\mathbb{R}^2$ est un ouvert, si F atteint un extremum au point x_0, alors $\nabla F(x_0) = 0_E$, donc
$$p = \nabla f(x_0).$$
On déduit alors de **[1.a.]** que
$$\langle\, p \,|\, x_0 \,\rangle = \langle\, x_0 \,|\, \nabla f(x_0) \,\rangle = 2f(x_0)$$
et donc que
$$F(x_0) = \langle\, p \,|\, x_0 \,\rangle - f(x_0) = f(x_0).$$

2. a. Comme les valeurs propres de A sont *strictement* positives, alors 0 n'est pas valeur propre de A, donc A est inversible.

2. b. Comme la matrice A est symétrique *réelle*, on peut appliquer le Théorème spectral.

— Elle admet n valeurs propres réelles (en les comptant avec multiplicité) qu'on peut supposer rangées par ordre croissant : $0 < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$;

— Il existe une base orthonormée $(\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ où chaque ε_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i ;

— En notant P, la matrice de passage de la base $(\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ à la base canonique (*et non pas l'inverse !*), on obtient une matrice orthogonale (changement de base orthonormée) telle que $PAP^\top = \Delta$ et comme $P^{-1} = P^\top$, alors
$$A = P^\top.\Delta.P.$$

2. c. On en déduit que
$$\forall\, x \in E, \quad f(x) = (Px)^\top.\Delta.(Px).$$
En notant $Px = (y_1, \dots, y_n)$, on obtient
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2.$$
Or $\lambda_1 \leqslant \lambda_i \leqslant \lambda_n$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, donc
$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 = f(x) \leqslant \lambda_n \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$
Comme la matrice P est orthogonale,
$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = (Px)^\top.(Px) = x^\top.x = \|x\|^2$$
donc
$$\forall\, x \in E, \quad \lambda_1\|x\|^2 \leqslant f(x) \leqslant \lambda_n\|x\|^2.$$
2. d. On développe $f(x_0 + h)$ par bilinéarité du produit matriciel. On conclut en rappelant que la matrice A est symétrique :
$$h^\top.A.x_0 = (h^\top.A.x_0)^\top = x_0^\top.A.h.$$
2. e. Comme la fonction f est polynomiale :
$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_ix_j$$
elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur E (et en fait de classe $\mathscr{C}^\infty$).

❧ Par **[2.c.]**, lorsque le vecteur h tend vers 0_E, on a
$$f(h) = \mathcal{O}(\|h\|^2) = o(h)$$
et on déduit de **[2.d.]** que
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \langle\, 2Ax_0 \,|\, h\,\rangle + o(h)$$
(puisque la matrice A est symétrique). On retrouve ainsi que f est différentiable au point x_0 mais cela démontre en outre que
$$\nabla f(x_0) = 2Ax_0.$$
3. a. On a démontré que f était de classe $\mathscr{C}^1$ sur E (question précédente). Par ailleurs, quel que soit $x \in E$,
$$f(t\cdot x) = (t\cdot x)^\top.A.(t\cdot x) = t^2(x^\top.A.x) = t^2 f(x)$$
donc cette fonction f vérifie bien les hypothèses du **[1.]**

3. b. D'après **[1.b.]** et **[2.e.]**, le point $x_0 \in E$ est un point critique pour F si, et seulement si, $2Ax_0 = p$. Or la matrice A est inversible (**[2.a.]**), donc il existe un unique point critique pour F :
$$x_0 = \frac{1}{2}\cdot A^{-1}p.$$
3. c. D'après **[2.d.]** et **[2.c.]**, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,
$$\begin{aligned} F(x_0+h) = F(x_0) + \langle\, p \,|\, h\,\rangle - 2\,\langle\, Ax_0 \,|\, h\,\rangle - f(h) &= F(x_0) - f(h) \\ &\leqslant F(x_0) - \alpha\|h\|^2 \leqslant F(x_0) \end{aligned}$$
ce qui prouve que F atteint un maximum en $F(x_0)$ et que $F(x_0 + h) < F(x_0)$ pour tout déplacement $h \neq 0_E$: il s'agit donc bien d'un maximum global strict.

D'après l'expression de x_0 trouvée à la question précédente, ce maximum est égal à
$$F(x_0) = \langle\, p \,|\, {}^1\!/_2 A^{-1}p\,\rangle - ({}^1\!/_2 A^{-1}p)^\top.A.({}^1\!/_2 A^{-1}p) = {}^1\!/_4 p^\top.A^{-1}.p = f({}^1\!/_2 A^{-1}p) = f(x_0)$$
ainsi qu'on l'a établi au **[1.c.]**

4. a. On a démontré que la fonction F atteignait un maximum sur E et que ce maximum était égal à $p^\top.B.p$ avec
$$B = \frac{1}{4}A^{-1}.$$
Comme la matrice A est symétrique et inversible, la matrice B est aussi symétrique et inversible. De plus, μ est une valeur propre de B si, et seulement si, $1/4\mu$ est une valeur propre de A : comme les valeurs propres de A sont toutes strictement positives, on en déduit que les valeurs propres de B sont strictement positives.

4. b. Comme B vérifie les mêmes hypothèses que A, on peut appliquer à $L(f)$ le raisonnement qu'on a appliqué à f. Par conséquent,
$$\forall\, q \in E, \quad L[L(f)](q) = q^\top.C.q$$
avec
$$C = \frac{1}{4}B^{-1} = \frac{1}{4}(4A) = A$$
ce qui prouve bien que $L[L(f)] = f$.

5. a. Par **[3.c.]**, la fonction F est majorée sur E, donc sur $C \subset E$. Cela prouve que $\sup_{y\in C} F(y)$ est bien un nombre réel et donc que l'ensemble M est *bien défini*.

5. b. En tant qu'image réciproque d'un intervalle fermé par la fonction continue F, la partie
$$\{y \in \mathbb{R}^n \;:\; F(y) \geqslant F(y_0)\} = [F(y) \in [F(y_0), +\infty[]$$
est fermée. La partie
$$K = \{y \in \mathbb{R}^n \;:\; F(y) \geqslant F(y_0)\} \cap C$$
est donc fermée comme intersection de deux fermés (puisque C est fermée par hypothèse).

❧ Par **[2.c.]** et l'inégalité de Schwarz,
$$\forall\, y \in E, \quad F(y) \leqslant \|p\|\,\|y\| - \alpha\|y\|^2$$
donc F tend vers $-\infty$ au voisinage de l'infini. En particulier, $F(y) < F(y_0)$ pour tout $x \in E$ assez grand (*en norme*), ce qui prouve que K est une partie bornée.

❧ Ainsi, K est une partie, fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$: c'est un compact.

Par définition, la partie K contient y_0, donc n'est pas vide. Comme ce compact n'est pas vide et que la fonction F est continue, elle atteint un maximum sur ce compact : il existe donc $y_1 \in K$ tel que
$$\forall\, y \in K, \quad F(y) \leqslant F(y_1)$$
et en particulier $F(y_0) \leqslant F(y_1)$.

Par définition de K, si $y \in C$ n'appartient pas à K, alors
$$F(y) < F(y_0) \leqslant F(y_1).$$
On en déduit que
$$\forall\, y \in C, \qquad F(y) \leqslant F(y_1)$$
et comme $y_1 \in C$, alors $y_1 \in M$: l'ensemble M n'est pas vide.

5. c. En utilisant (deux fois) la relation du **[2.d.]**,
$$\begin{aligned}
F\big((1-t)y_1 + ty_2\big) &= (1-t)\,\langle\, p \,|\, y_1 \,\rangle + t\,\langle\, p \,|\, y_2 \,\rangle - f\big((1-t)y_1) + ty_2\big) \\
&= (1-t)\,\langle\, p \,|\, y_1 \,\rangle - (1-t)^2 f(y_1) + t\,\langle\, p \,|\, y_2 \,\rangle - t^2 f(y_2) - 2t(1-t)\,\langle\, y_1 \,|\, Ay_2 \,\rangle \\
&= (1-t)F(y_1) + t(1-t)f(y_1) + tF(y_2) + t(1-t)f(y_2) - 2t(1-t)\,\langle\, y_1 \,|\, Ay_2 \,\rangle \\
&= (1-t)F(y_1) + tF(y_2) + t(1-t)f(y_1 - y_2).
\end{aligned}$$

❧ Supposons que M contienne deux points distincts y_1 et y_2. On a alors
$$F(y_1) = F(y_2) = \max_{z\in C} F(z)$$
et, d'après **[2.c.]**,
$$f(y_1 - y_2) = (y_1 - y_2)^\top.A.(y_1 - y_2) > 0$$
puisque $(y_1 - y_2) \neq 0_E$. Par conséquent,
$$\forall\, 0 < t < 1, \quad F(y) > \max_{z\in C} F(z)$$

alors que $y \in C$ (en tant que combinaison convexe de deux points de C, qui est convexe) : c'est absurde.
Ainsi, l'ensemble M est un singleton.

> *Comme F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, si elle atteint un extremum au point m_0, alors ou bien m_0 est un point critique de F (et la* seule *possibilité est $m_0 = x_0$), ou bien m_0 est un point du bord de C.*
> *Bien évidemment, si le fermé C contient l'unique point critique x_0, alors l'ensemble M est réduit à $\{x_0\}$.*
> *En revanche, si $x_0 \notin C$, alors la fonction F atteint un maximum sur C en un point situé sur le bord de C.*

5. d. L'expression de $F(y_1 + t \cdot h)$ est une conséquence directe de **[2.d.]** déjà vue au **[3.c.]**
❧ Soit $y \in C$ et posons $h = y - y_1$. Par convexité de C, on a

$$\forall\, t \in [0,1], \quad y_1 + t \cdot h = (1-t)\cdot y_1 + t \cdot y \in C$$

et comme, par définition de y_1,

$$F(y_1) = \max_{z \in C} F(z),$$

alors

$$\forall\, t \in [0,1], \quad t\,\langle\, p - 2Ay_1 \,|\, h \,\rangle - t^2 f(h) \leqslant 0.$$

Si $\langle\, p - 2Ay_1 \,|\, h \,\rangle > 0$, alors le membre de gauche est équivalent à une quantité *strictement positive* lorsque $t \in]0,1]$ tend vers 0 : c'est contradictoire ! Par conséquent

$$\forall\, y \in C, \quad \langle\, p - 2Ay_1 \,|\, y - y_1 \,\rangle \leqslant 0.$$

❧ Pour interpréter géométriquement cette inégalité, il faut discuter sur le vecteur $(p - 2Ay_1)$.
Si $p = 2Ay_1$, alors $y_1 = x_0$. Dans ce cas, le maximum de F sur C est en fait le maximum de F sur $\mathbb{R}^n$ et cela ne peut arriver que si $x_0 \in C$.
Si $x_0 \notin C$, alors l'équation $2Ay = p$ n'a pas de solution dans C (sa *seule* solution étant $x_0 \notin C$), donc le vecteur $(p - 2Ay_1)$ n'est pas nul. Dans ce cas, l'inégalité signifie que l'angle formé par le vecteur $p - 2Ay_1$ et le vecteur (variable) $y - y_1$ est un angle obtus, donc la partie C est contenue dans le demi-espace limité par l'hyperplan (affine) qui contient le point y_1 et qui admet $(p - 2Ay_1)$ pour vecteur normal.

Complément
Pour $E = \mathbb{R}^2$, considérons

$$p = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}.$$

Avec

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$$

on a $PAP^\top = \Delta = \mathrm{Diag}(1/2,\ 3/2)$.
REMARQUE.— Comme on l'a remarqué au **[2.b.]**, les vecteurs propres de A sont les colonnes de

$$P^\top = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

(et non pas les colonnes de P, comme c'est le cas d'ordinaire).
❧ La fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est alors définie par

$$F(x,y) = 4x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{4}y^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}xy$$

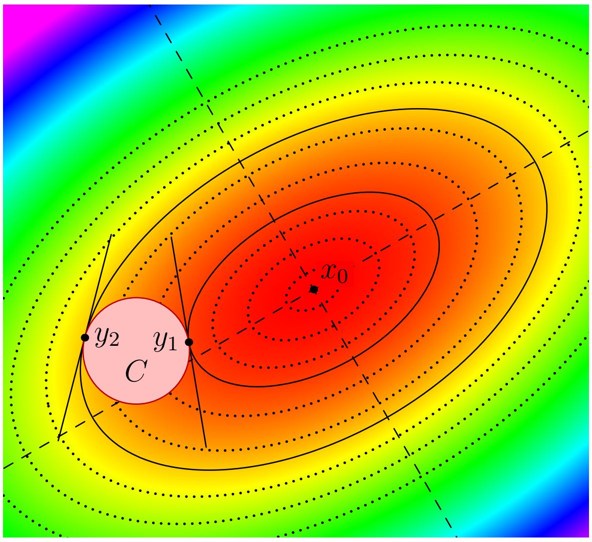
et elle atteint son maximum global au point

$$x_0 = \frac{1}{2}A^{-1}p = \begin{pmatrix} 5 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

❧ On peut démontrer que les lignes de niveau de la fonction F sont des ellipses, toutes centrées en x_0, dont les deux axes de symétrie sont les directions propres de la matrice A.
❧ Le disque unité fermé

$$C = [x^2 + y^2 \leqslant 1]$$

est une partie compacte non vide de $\mathbb{R}^2$ qui ne contient pas le point critique x_0.
Comme F est continue, elle atteint un maximum sur le compact C en un point y_1, ainsi qu'un minimum sur C en un point z_1.



On voit que la fonction F atteint ses valeurs extrêmes en deux points du bord du disque C et qu'en ces deux points, le bord du disque est tangent aux lignes de niveau de F : la tangente au point y_1 est l'hyperplan affine mis en évidence à la dernière question.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

r = np.sqrt(3)

def F(x,y):
  return 4*x-3*x**2/4-5*y**2/4+r*x*y/2

def g(x,y):
  return x**2+y**2

# Valeurs de F
MF = 6.66 # max global de F
MFC = 3.3225 # max de F sur C
mFC = -4.863 # min de F sur C

plt.figure(figsize=(3,3))

n = 256
x = np.linspace(-3, 8, n)
y = np.linspace(-3, 8, n)
X, Y = np.meshgrid(x, y)

plt.contourf(X, Y, f(X, Y), 128, alpha=.25,
             cmap='spectral')
plt.contourf(X, Y, g(X, Y), [0,1], alpha=1,
             cmap="binary")

# Lignes de niveaux de F
plt.contour(X, Y, f(X, Y), [mFC, MFC, MF],
            colors='black', linewidth=.5)
plt.contour(X, Y, f(X, Y), 8, colors='black',
            linewidth=.5)
```