

Problème de Mathématiques

Référence pp2134 — Version du 6 février 2026

On considère la partie

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| \leq 2 \text{ et } |x - y| \leq 2\}$$

et on s'intéresse à la fonction

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$\forall (x, y) \in D, \quad f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1) - x.$$

1. a. Vérifier que D possède deux axes de symétrie et un centre de symétrie.

☞ On pourra commencer par vérifier que : si $(x, y) \in D$, alors $(x, -y) \in D$.

1. b. L'ensemble D est-il ouvert ? fermé ? compact ?

1. c. Dessiner l'ensemble D .

2. Démontrer que la fonction f est bornée sur D . Atteint-elle ses bornes ?

On étudie maintenant la fonction f sur l'ensemble

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| < 2 \text{ et } |x - y| < 2\}.$$

3. Démontrer que U est un ouvert, puis que U est l'intérieur de D .

4. Calculer le gradient de f sur U et vérifier que

$$M_0 = (1, 0)$$

est l'unique point critique de f sur U .

5. Calculer la matrice hessienne de f au point M_0 :

$$Hf(M_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0) \end{pmatrix}.$$

Quel est son spectre ?

6. On **admet** que

$$f(M_0 + X) = f(M_0) + \frac{1}{2} X^T \cdot Hf(M_0) \cdot X + o(\|X\|^2)$$

lorsque $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tend vers le vecteur nul.

6. a. Que dire du signe de $X^T \cdot Hf(M_0) X$?

6. b. Peut-on en déduire que f atteint un extremum local au point M_0 ?

7. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $t = 0$ de $f(1 + t, 0)$. Que peut-on en déduire ?

Solution ✱ Fonction de deux variables

1. a. Si $(x, y) \in D$, alors $|x + y| \leq 2$ et $|x - y| \leq 2$ et par conséquent

$$|x + (-y)| \leq 2 \quad \text{et} \quad |x - (-y)| \leq 2$$

donc $(x, -y) \in D$. Cela signifie (figure!) que l'axe des abscisses est un axe de symétrie pour D .

De même, si $(x, y) \in D$, alors $(-x, y) \in D$ et (figure!) l'axe des ordonnées est aussi un axe de symétrie pour D .

L'intersection de deux axes de symétrie est toujours un centre de symétrie, donc l'origine est un centre de symétrie pour D . (Techniquement : si $(x, y) \in D$, alors $(-x, -y) \in D$.)

1. b. L'ensemble $|x + y| \leq 2$ est l'image réciproque du fermé $[-2, 2]$ par l'application continue (linéaire sur un espace de dimension finie)

$$[(x, y) \mapsto x + y],$$

donc c'est un fermé.

De même, $|x - y| \leq 2$ est fermé.

L'ensemble D est donc fermé comme intersection de deux fermés :

$$D = \{|x + y| \leq 2\} \cap \{|x - y| \leq 2\}.$$

✱ Par inégalité triangulaire,

$$|x| = \left| \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \right| \leq \frac{|x+y| + |x-y|}{2} \leq 2$$

et de même $|y| \leq 2$ pour tout $(x, y) \in D$. L'ensemble D est donc fermé et borné dans un espace vectoriel de dimension finie, c'est bien une partie compacte de \mathbb{R}^2 (quelle que soit la norme choisie sur \mathbb{R}^2).

✱ Le point $M_1 = (1, 1)$ appartient à D , mais D n'est pas un voisinage de M_1 puisque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad N_\varepsilon = (1 + \varepsilon, 1) \notin D$$

(on a $|x + y| > 2$) et la distance de M_1 à N_ε tend vers 0 lorsque ε tend vers 0. Par conséquent, D n'est pas ouvert.

REMARQUE.— On peut aussi avancer un argument théorique : dans \mathbb{R}^n , les seules parties à la fois ouvertes et fermées sont \mathbb{R}^n et l'ensemble vide.

1. c. C'est le carré de sommets $(\pm 2, 0)$ et $(0, \pm 2)$.

2. La fonction f est continue sur D en tant que différence de deux fonctions continues : la fonction

$$\begin{array}{ccccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & 1 + x^2 + y^2 & \longmapsto & \ln(1 + x^2 + y^2) \end{array}$$

est continue comme composée de fonctions continues et la fonction

$$\begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{array}$$

est continue en tant qu'application linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie.

✱ Comme f est continue et que D est compacte, la fonction f est bornée sur D et atteint ses bornes.

3. Les ensembles

$$|x + y| < 2 \quad \text{et} \quad |x - y| < 2$$

sont ouverts en tant qu'images réciproques de l'ouvert $] -2, 2[$ par des applications continues (cf ci-dessus), donc U est ouvert en tant qu'intersection de deux ouverts.

4. Le gradient de f au point $M = (x, y)$ est égal à

$$\left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} - 1, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \right).$$

Il est nul si, et seulement si, $y = 0$ (deuxième coordonnée) et $2x = x^2 + 1$ (première coordonnée), c'est-à-dire $(x, y) = (1, 0) \in U$.

5. Après quelques calculs sans mystère mais pas forcément sympathiques, on trouve

$$Hf(M_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le spectre de cette matrice est donc $\{0; 1\}$.

6. a. Quels que soient x et y dans \mathbb{R} ,

$$X^T \cdot Hf(M_0)X = y^2 \geq 0.$$

6. b. Si on impose $y = 0$, le développement limité de f au voisinage de M_0 nous donne :

$$f(M_0 + X) = f(M_0) + o(\|X\|^2),$$

ce qui ne permet pas de connaître le signe de

$$f(M_0 + X) - f(M_0).$$

On ne peut donc pas encore conclure à l'existence d'un extremum local (pas plus qu'à l'absence d'un tel extremum).

Le signe de la forme quadratique nous indique cependant que si un extremum devait être atteint en M_0 , ce serait un minimum.

7. Pour t voisin de 0,

$$f(1+t, 0) = \ln(2+2t+t^2) - 1 - t = f(1, 0) - \frac{t^3}{6} + o(t^3).$$

Pour $X = (t, 0)$, cela montre que la différence

$$f(M_0 + X) - f(M_0)$$

n'est pas de signe constant (négative pour $t > 0$ et positive pour $t < 0$). Par conséquent, la fonction f ne passe pas par un extremum au point M_0 .

• On sait que la fonction f atteint un maximum et un minimum sur D . D'après de cours, si f atteignait un extremum local sur l'ouvert U , ce serait nécessairement en un point critique et par conséquent au point M_0 et on vient de constater qu'il n'en est rien.

La fonction f atteint donc son maximum et son minimum sur $D \setminus U$ (= le bord du carré).

• Il nous reste à paramétrer les quatre côtés du carré pour trouver les extrema de f .

De $(2, 0)$ à $(0, 2)$, on paramètre avec

$$\forall t \in [0, 1], \quad (x(t), y(t)) = (2(1-t), 2t)$$

et on étudie les variations de

$$g(t) = f(x(t), y(t)) = -2 + 2t + \ln(5 - 8t + 8t^2).$$

On en déduit que

$$g'(t) = \frac{16t^2 + 2}{5 - 8t + 8t^2} > 0.$$

Donc g est minimale en $t = 0$ et maximale en $t = 1$:

$$g(0) = \ln 5 - 2 \quad g(1) = \ln 5.$$

Même chose de $(0, -2)$ à $(2, 0)$.

De $(-2, 0)$ à $(0, 2)$, on paramètre cette fois avec

$$\forall t \in [0, 1], \quad (x(t), y(t)) = (-2(1-t), 2t)$$

et on étudie les variations de

$$h(t) = f(x(t), y(t)) = 2 - 2t + \ln(5 - 8t + 8t^2).$$

On en déduit que

$$h'(t) = \frac{-16t^2 + 32t - 18}{5 - 8t + 8t^2} < 0.$$

Donc h est maximale en $t = 0$ et minimale en $t = 1$:

$$h(0) = 2 + \ln 5 \quad \text{et} \quad h(1) = \ln 5.$$

Même chose de $(-2, 0)$ à $(0, 2)$.

Conclusion : le minimum de f sur D est égal à $\ln 5 - 2$ (atteint en $(2, 0)$) et le maximum de f sur D à $\ln 5 + 2$ (atteint en $(-2, 0)$).