

## Problème de Mathématiques

Référence pp2136 — Version du 6 février 2026

On se donne un entier  $n \geq 2$  et on munit  $\mathbb{R}^n$  de la norme euclidienne canonique :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

La boule unité fermée de  $\mathbb{R}^n$  est notée  $B_n$  :

$$B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}.$$

On fixe une famille réelle  $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$  et on considère l'application  $f : B_n \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} x_i x_j.$$

L'objectif de ce problème est d'étudier les extrema de la fonction  $f$  sur la boule  $B_n$ . Pour cela, on définit la matrice symétrique  $M_f \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  en posant

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad m_{i,i} = a_{i,i}$$

et

$$\forall 1 \leq i < j \leq n, \quad m_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{2}.$$

La transposée d'une matrice  $A$  sera ici notée  $A^\top$ .

### Partie A. Étude d'un exemple

Dans cette partie, on suppose que  $n = 2$  et que l'application  $f : B_2 \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par

$$\forall (x_1, x_2) \in B_2, \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2.$$

1. Justifier que l'application  $f$  atteint un maximum et un minimum sur  $B_2$ .
2. Donner une condition nécessaire et suffisante simple pour que les deux vecteurs

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

soient colinéaires. Démontrer que la frontière

$$S_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

de  $B_2$  est une partie fermée de  $\mathbb{R}^2$ . En déduire que la restriction de  $f$  à  $S_2$  atteint un maximum et un minimum et que ces deux extrema sont atteints en des points  $M = (x_1, x_2)$  tels que  $x_2 = \pm x_1$ .

3. Retrouver les extrema de l'application  $f$  sur  $S_2$  en étudiant la fonction

$$[t \mapsto f(\cos t, \sin t)].$$

4. Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et démontrer que la fonction  $f$  n'a qu'un seul point critique dans la boule unité ouverte

$$B'_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}.$$

Atteint-elle un extremum local en ce point ?

5. En déduire que le maximum de  $f$  sur  $B_2$  est égal à 3 et que le minimum de  $f$  sur  $B_2$  est égal à  $-1$ .
6. Vérifier que la plus grande valeur propre de  $M_f$  est égale au maximum de  $f$  sur  $B_2$  et que la plus petite valeur propre de  $M_f$  est égale au minimum de  $f$  sur  $B_2$ .

**Partie B. Cas général**

Dans cette partie, l'entier  $n$  est supérieur ou égal à 2. Pour tout vecteur  $x = (x_1, \dots, x_n) \in B_n$ , on notera

$$X = (x_1 \quad \dots \quad x_n)^T \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

7. Démontrer que  $f(x) = X^T \cdot M_f \cdot X$ .

8. On suppose que  $S$  est une matrice symétrique telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = X^T \cdot S \cdot X.$$

Démontrer que  $S = M_f$ .

9. Justifier que la matrice  $M_f$  est diagonalisable dans  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ .

Dans la suite, on note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $M_f$  comptées avec leur multiplicité et on suppose que

$$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

On fixe également une matrice orthogonale  $P \in GL_n(\mathbb{R})$  telle que

$$M_f = PDP^{-1}$$

où

$$D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}).$$

Enfin, on note  $Y = P^{-1}X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

10. Démontrer que

$$Y^T \cdot Y = X^T \cdot X = \|x\|^2.$$

11. On suppose que  $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$ . Démontrer que

$$\lambda_1 \leq Y^T \cdot D \cdot Y \leq \lambda_n$$

et en déduire que  $\lambda_1 \leq f(x) \leq \lambda_n$ .

12. En déduire que : si  $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$ , alors

$$\min_{x \in B_n} f(x) = \lambda_1 \quad \text{et} \quad \max_{x \in B_n} f(x) = \lambda_n.$$

13. Dans le cas où  $\lambda_1 \geq 0$ , déterminer le maximum et le minimum de  $f$  sur  $B_n$ .

**Partie C. Application**

Dans cette dernière partie, on suppose que  $n \geq 3$  et que l'application  $f : B_n \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par

$$\forall x \in B_n, \quad f(x) = \sum_{k=1}^n x_k^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2x_i x_j.$$

14. Déterminer le maximum et le minimum de  $f$  sur  $B_n$ .

☞ On pourra commencer par déterminer le rang de la matrice  $M_f - 2I_n$ .

## Solution ✿ Extrema d'une forme quadratique

### Partie A. Étude d'un exemple

1. La boule unité fermée  $B_2$  est une partie fermée et bornée de  $\mathbb{R}^2$ , espace vectoriel de dimension finie, donc  $B_2$  est une partie compacte.

L'application  $f$  est continue (en tant qu'application polynomiale), donc elle atteint un maximum et un minimum sur le compact  $B_2$ .

2. Deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  sont proportionnels si, et seulement si, leur déterminant est nul. Or

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 + 2x_2 \\ x_2 & 2x_1 + x_2 \end{vmatrix} = 2(x_1^2 - x_2^2),$$

donc les deux vecteurs sont proportionnels si, et seulement si,  $x_2^2 = x_1^2$ , c'est-à-dire  $x_2 = \pm x_1$ .

• Soit  $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , une suite de points situés sur  $S_2$ . On suppose que cette suite converge vers un point  $L = (\ell_1, \ell_2)$  et il faut vérifier que  $L \in S_2$ .

Par hypothèse,

$$\ell_1 = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k, \quad \ell_2 = \lim_{k \rightarrow +\infty} y_k$$

et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x_k^2 + y_k^2 = 1.$$

On en déduit que  $\ell_1^2 + \ell_2^2 = 1$  et donc que  $L \in S_2$ .

• La partie  $S_2$  est donc fermée. Elle est aussi bornée (puisqu'elle est contenue dans la boule  $B_2$ ) et comme  $\mathbb{R}^2$  est un espace de dimension finie, la partie  $S_2$  est une partie compacte.

Comme la fonction  $f$  est continue (elle est polynomiale), elle est bornée et atteint ses bornes sur le compact  $S_2$ .

• Le cercle  $S_2$  est une ligne de niveau d'une fonction  $g$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  :

$$S_2 = [g(x_1, x_2) = 0] \quad \text{où} \quad g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1.$$

En tout point  $M = (x_1, x_2) \in S_2$ , le gradient de  $g$  est différent du vecteur nul car les dérivées partielles

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = 2x_1, \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} = 2x_2$$

ne peuvent pas s'annuler en même temps (l'origine  $O$  n'appartient pas au cercle  $S_2$ ).

Par conséquent, si la restriction à  $S_2$  de la fonction  $f$  atteint un extremum en un point  $M$ , alors les deux gradients

$$\nabla f(M) = 2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla g(M) = 2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

doivent être proportionnels. Il faut donc que  $x_2 = \pm x_1$  et comme  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ , les seules possibilités sont les suivantes :

$$f\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3, \quad f\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \mp \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1.$$

On en déduit que le maximum de  $f$  sur  $S_2$  est égal à 3 et que son minimum est égal à  $-1$ .

3. Lorsque  $t$  varie de 0 à  $2\pi$ , le couple  $(\cos t, \sin t)$  parcourt le cercle unité  $S_2$ . Par conséquent, les extrema de la restriction à  $S_2$  de  $f$  sont aussi les extrema de

$$g = [t \mapsto f(\cos t, \sin t)]$$

sur  $[0, 2\pi]$ .

Pour tout  $t \in [0, 2\pi]$ ,

$$g(t) = 1 + 2 \sin 2t$$

donc

$$\max_{t \in [0, 2\pi]} g(t) = g(\pi/4) = 3$$

$$\text{et } \min_{t \in [0, 2\pi]} g(t) = g(3\pi/4) = -1.$$

Autrement dit

$$\max_{(x_1, x_2) \in S_2} f(x_1, x_2) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3$$

et

$$\min_{(x_1, x_2) \in S_2} f(x_1, x_2) = f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1.$$

4. La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur l'ouvert  $B'_2$  en tant qu'application polynomiale.

Comme

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 \quad \text{et que} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2,$$

le point  $(x_1, x_2)$  est critique si, et seulement si,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}.$$

La fonction  $f$  a donc un seul point critique sur l'ouvert  $B'_2$  : il s'agit de l'origine  $(0, 0)$ .

La hessienne de  $f$  est la même en tout point de  $\mathbb{R}^2$  :

$$\forall M \in B'_2, \quad H_f(M) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles. Son déterminant est strictement négatif  $(-12)$ , donc elle admet une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative. Par conséquent,  $f(0)$  n'est pas un extremum local.

**Variante** — Il est clair que  $f(x, 0) = x^2 > 0$  et que  $f(x, -x) = -2x^2 < 0$  pour tout  $x \neq 0$ , donc  $f(0)$  n'est ni un maximum local, ni un minimum local.

5. On sait [1.] que l'application  $f$  atteint un maximum et un minimum sur  $B_2$ . Comme

$$B_2 = S_2 \sqcup B'_2,$$

il n'y a que deux possibilités : ou bien  $f$  atteint son maximum sur l'ouvert  $B'_2$ , ou bien  $f$  atteint son maximum sur la frontière  $S_2$  (idem pour le minimum).

Comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , si elle atteint un extremum en un point de l'ouvert  $B'_2$ , c'est nécessairement en un point critique et d'après la question précédente, cet extremum est égal à  $f(0, 0) = 0$ .

Or  $f$  prend les valeurs  $3 > 0$  et  $-1 < 0$  sur  $S_2$ , donc  $f$  n'atteint ni son minimum, ni son maximum à l'origine. Par conséquent,  $f$  atteint son maximum et son minimum sur  $S_2$ . D'après [3.],

$$\max_{x \in B_2} f(x) = \max_{x \in S_2} f(x) = 3$$

et

$$\min_{x \in B_2} f(x) = \min_{x \in S_2} f(x) = -1.$$

6. Ici, la matrice  $M_f$  est égale à

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2I_2 - J_2$$

donc

$$M + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M - 3I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

donc les valeurs propres de  $M_f$  sont  $-1$  et  $3$ , avec

$$\text{Ker}(M_f + I_2) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker}(M_f - 3I_2) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix},$$

ce qui a un petit air de déjà vu...

**Partie B. Cas général**

7. D'après les règles du produit matriciel,

$$X^T \cdot M_f \cdot X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i m_{i,j} x_j$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^n m_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{i,j} x_i x_j + \sum_{1 \leq j < i \leq n} m_{i,j} x_i x_j$$

ou encore (en changeant d'indices dans la dernière somme)

$$\sum_{i=1}^n m_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{i,j} x_i x_j + \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{j,i} x_i x_j.$$

Comme la matrice  $M_f$  est symétrique, on en déduit que

$$X^T \cdot M_f \cdot X = \sum_{i=1}^n m_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{i,j} x_i x_j = f(x).$$

8. Quelles que soient les colonnes  $X$  et  $Y$ ,

$$\begin{aligned} X^T \cdot M_f \cdot X &= X^T \cdot S \cdot X, \\ Y^T \cdot M_f \cdot Y &= Y^T \cdot S \cdot Y, \\ (X + Y)^T \cdot M_f \cdot (X + Y) &= (X + Y)^T \cdot S \cdot (X + Y). \end{aligned}$$

En développant la troisième égalité et en la simplifiant à l'aide des deux premières égalités, on obtient

$$Y^T \cdot M_f \cdot X + X^T \cdot M_f \cdot Y = Y^T \cdot S \cdot X + X^T \cdot S \cdot Y.$$

Toute matrice de  $\mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$  étant symétrique, on déduit de la symétrie de  $M_f$  que

$$X^T \cdot M_f \cdot Y = (X^T \cdot M_f \cdot Y)^T = Y^T \cdot M_f^T \cdot X = Y^T \cdot M_f \cdot X.$$

Comme  $S$  est symétrique elle aussi, on en déduit que

$$\forall X, Y \in \mathfrak{M}_{1,1}(\mathbb{R}), \quad Y^T \cdot M_f \cdot X = Y^T \cdot S \cdot X.$$

En faisant varier  $X$  et  $Y$  dans la base canonique de  $\mathfrak{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ , on en déduit que

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad M_f(i, j) = S(i, j)$$

et donc que  $M_f = S$ .

9. La matrice  $M_f$  est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable (Théorème spectral) et il existe même une matrice orthogonale  $Q$  telle que  $Q^{-1} M_f Q$  soit diagonale.

10. Tout d'abord,

$$X^T \cdot X = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|^2.$$

D'autre part, comme  $P$  est orthogonale, on a

$$P^{-1} = P^T$$

et par conséquent

$$Y^T \cdot Y = (P^{-1} X)^T \cdot (P^{-1} X) = X^T \cdot (P \cdot P^T) X = X^T \cdot X.$$

11. Par hypothèse,

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \lambda_1 \leq \lambda_k \leq \lambda_n.$$

Comme les  $y_k^2$  sont positifs,

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \lambda_1 y_k^2 \leq \lambda_k y_k^2 \leq \lambda_n y_k^2$$

et en sommant

$$\lambda_1 \sum_{k=1}^n y_k^2 \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2 = Y^T D Y \leq \lambda_n \sum_{k=1}^n y_k^2.$$

Or, d'après la question précédente,

$$\sum_{k=1}^n y_k^2 = Y^T Y = X^T X \leq 1$$

puisque  $x \in B_n$ .

Comme  $\lambda_n > 0$  et  $\lambda_1 < 0$ , on en déduit que

$$\lambda_1 \leq \lambda_1 \|x\|^2 \quad \text{et} \quad \lambda_n \|x\|^2 \leq \lambda_n.$$

Ainsi

$$\lambda_1 \leq Y^T \cdot D \cdot Y \leq \lambda_n.$$

• D'après [7.],

$$\begin{aligned} f(x) &= X^T \cdot M_f \cdot X \\ &= X^T (P D P^{-1}) X = (P^{-1} X)^T \cdot D \cdot (P^{-1} X) \\ &= Y^T \cdot D \cdot Y. \end{aligned}$$

**12.** Pour les mêmes raisons qu'en [1.], la fonction  $f$  atteint un maximum et un minimum sur  $B_n$ . D'après la question précédente,

$$\min_{x \in B_n} f(x) \leq -1 \quad \text{et} \quad 3 \leq \max_{x \in B_n} f(x).$$

Comme  $\lambda_1$  et  $\lambda_n$  sont des valeurs propres de  $M_f$ , il existe des vecteurs propres  $x_1$  et  $x_n$  de  $M_f$  associés respectivement à  $\lambda_1$  et à  $\lambda_n$ . On peut supposer que ces vecteurs propres sont des vecteurs unitaires :

$$x_1 \in B_n \quad x_n \in B_n$$

(puisque tout vecteur proportionnel à un vecteur propre est encore un vecteur propre).

Alors

$$f(x_1) = X_1^T \cdot M_f \cdot X_1 = X_1^T \cdot (\lambda_1 X_1) = \lambda_1 \|x_1\|^2 = \lambda_1$$

et de même  $f(x_n) = \lambda_n$ . Par conséquent,

$$\min_{x \in B_n} f(x) = -1 \quad \text{et} \quad \max_{x \in B_n} f(x) = 3.$$

**13.** L'étude précédente est encore valable pour le maximum :

$$\max_{x \in B_n} f(x) = \lambda_n.$$

En revanche, la minoration du [11.] est fautive puisque  $\lambda_1$  est positive. On a cette fois

$$\forall x \in B_n, \quad 0 \leq \lambda_1 \|x\|^2 \leq f(x)$$

et comme  $f(0) = 0$ , on en déduit que

$$\min_{x \in B_n} f(x) = 0.$$

### Partie C. Application

**14.** Ici, la matrice  $M_f$  est constituée de 1 (sur la diagonale) et de  $-1$  (en dehors de la diagonale) si bien que  $M_f - 2I_n$  est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à  $-1$ .

Comme  $\text{rg}(M_f - 2I_n) = 1$ , cette matrice admet 0 pour valeur propre avec un sous-espace propre de dimension  $(n - 1)$ . L'autre valeur propre est donc donnée par la trace :  $-n$  est l'autre valeur propre de  $(M_f - 2I_n)$ .

Tout vecteur propre de  $(M_f - 2I_n)$  est aussi un vecteur propre de  $I_n$ , donc de  $M_f$ . Les valeurs propres de  $M_f$  s'en déduisent :

$$\text{Sp } M_f = \{-n + 2 \ ; \ 2\}.$$

Comme  $n \geq 3$ , on en déduit que

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = -n + 2 < 0 < \lambda_n = 2$$

et donc que

$$\min_{x \in B_n} f(x) = -n + 2 \quad \text{et} \quad \max_{x \in B_n} f(x) = 2$$

d'après [12.]

REMARQUE.— La matrice  $M_f$  est donc un polynôme en  $J_n$  :

$$M_f = -J_n + 2I_n$$

donc chaque vecteur propre de  $J_n$  est aussi un vecteur propre de  $M_f$ . On en déduit que l'hyperplan propre associé à 2 admet

$$[x_1 + \dots + x_n = 0]$$

pour équation et la droite propre associée à  $(2 - n)$  est dirigée par la colonne

$$(1 \quad \dots \quad 1)^T.$$

On retrouve alors les valeurs extrêmes de  $f$  en choisissant des vecteurs propres unitaires, comme

$$\left( \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{-\sqrt{2}}{2} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right)^T \quad \text{et} \quad \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \dots \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^T.$$