Problème de Mathématiques

Référence pp2215 — Version du 6 février 2026

On considère la fonction

$$f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$$

définie par $f(1,1) = 0$ et par

$$\forall\,(x,y) \neq (1,1), \quad f(x,y) = \frac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy}.$$

1. Démontrer que $K = [0,1] \times [0,1]$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$.

2. Démontrer que f est continue sur K. En déduire que f atteint un maximum M et un minimum m sur K.

3. Déterminer m et les points où f atteint la valeur m.

4. Que dire du maximum de f ?

Solution ❀ Extrema d'une fonction continue

1. L'espace $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel de dimension finie et K est une partie fermée (produit cartésien de deux intervalles fermés) et bornée, donc K est un compact de $\mathbb{R}^2$.

2. En tant que fonction rationnelle définie sur $K \setminus \{(1,1)\}$, la fonction f est continue sur cet ensemble. Il reste donc à étudier la continuité de f au point $M_0 = (1,1)$.

Pour $0 \leqslant h, k \leqslant 1$ et $u = (h,k) \neq (0,0)$,

$$\begin{aligned}\left|f(M_0+u) - f(M_0)\right| &= \left|f(1-h, 1-k) - f(1,1)\right| \\ &= \frac{(1-h)(1-k)hk}{1-(1-h)(1-k)} \\ &= \frac{(1-h)(1-k)hk}{h+k-hk} \\ &\leqslant \frac{hk}{h+k-hk}.\end{aligned}$$

En coordonnées polaires, on obtient

$$\left|f(M_0+u) - f(M_0)\right| \leqslant \frac{r\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta - r\sin\theta\cos\theta}.$$

Or, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\cdot\sin\big(\theta + \pi/4\big).$$

Ici, avec $h, k \geqslant 0$, on a $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, donc

$$\sin\theta+\cos\theta \geqslant \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

Par conséquent, pour $0 < r < 1$,

$$\left|f(M_0+u) - f(M_0)\right| \leqslant \frac{r}{1-r}$$

et ce majorant tend vers 0 lorsque r tend vers 0 (c'est-à-dire lorsque $\|u\|$ tend vers 0).

Cela prouve que f est bien continue au point $M_0 = (1,1)$ et donc qu'elle est continue sur le compact K tout entier.

❧ Toute application continue d'un compact dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes, donc l'application f atteint un minimum et un maximum.

3. Il est clair que f est positive sur K (tous les facteurs sont positifs) et nulle sur le bord de K (les quatre côtés du carré).

Sur l'intérieur du carré, tous les facteurs sont *strictement* positifs, donc f n'est pas nulle.

Bref, le minimum de f est égal à 0, il est atteint en chaque point de ∂K et seulement en ces points.

4. Comme f n'est pas identiquement nulle et que son minimum est nul, son maximum est strictement positif. Il est donc atteint en un point $A \in K^\circ$, qui est nécessairement un point critique de f.

❧ Pour tout $(x,y) \in K^\circ$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(1-y)(1-2x+x^2y)}{(1-xy)^2}$$

et, par symétrie,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(1-x)(1-2y+xy^2)}{(1-xy)^2}.$$

Comme on est sur l'ouvert K°, les points critiques sont les points (x,y) tels que

$$1-2x+x^2y = 1-2y+xy^2 = 0.$$

Il faut donc que

$$0 = (1-2x+x^2y) - (1-2y+xy^2) = (x-y)(xy-2)$$

et comme $0 < xy < 1$, il faut donc que $x = y$. Il reste à résoudre

$$1-2x+x^3 = (x-1)(x^2+x-1) = 0$$

où la racine "évidente" 1 est impossible, puisque $0 < x < 1$.

Ne reste finalement plus que

$$x^2 + x - 1 = \left(x + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = 0.$$

Il n'y a donc qu'un seul point critique sur K° :

$$A = (x_0, y_0) \quad \text{avec} \quad x_0 = y_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

et c'est nécessairement en ce point que f atteint son maximum.

Donc, en tenant compte du fait que $x_0^2 + x_0 - 1 = 0$,

$$M = f(x_0, x_0) = \frac{(1-x_0)^2}{1+x_0} = \frac{5\sqrt{5}-11}{2} \approx 9.10^{-2}.$$