Problème de Mathématiques

Référence pp2214 — Version du 6 février 2026

On considère une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\|I_n\| = 1$$

et que

$$\forall\, M, N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \|MN\| \leqslant \|M\|.\|N\|.$$

Une telle norme est dite **norme d'algèbre** (il en existe !).

1. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $\|A\| < 1$. Démontrer que $(I_n - A)$ est inversible et que son inverse est la matrice

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A^n.$$

2. a. Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Démontrer que $A + H$ est encore une matrice inversible pour toute matrice $H \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\|H\| < 1/\|A^{-1}\|$.

2. b. En déduire que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

3. On note $U = GL_n(\mathbb{K})$ et on considère l'application $f : U \to U$ définie par

$$\forall\, M \in U, \qquad f(M) = M^{-1}.$$

3. a. Démontrer que f est différentiable en I_n et calculer l'application linéaire tangente $df(I_n)$.

3. b. Même question pour toute matrice $M_0 \in U$.

Solution ❀ Différentiabilité de l'inversion

1. D'après les propriétés des normes d'algèbre,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \|A^n\| \leqslant \|A\|^n.$$

Comme $\|A\| < 1$, la série de matrices $\sum A^n$ est absolument convergente et comme $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension finie, on en déduit qu'elle est convergente. La matrice

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$$

est donc bien définie et

$$S = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} A^n.$$

❧ Les applications

$$[M \mapsto (I_n - A).M] \quad \text{et} \quad [M \mapsto M.(I_n - A)]$$

sont continues en tant qu'applications linéaires définies sur un espace vectoriel de dimension finie.

Par composition de limites,

$$\begin{aligned}
(I_n - A).S &= \lim_{N\to+\infty} (I_n - A).\left(\sum_{n=0}^{N} A^n\right) \\
&= \lim_{N\to+\infty} I_n - A^{N+1}, \\
S.(I_n - A) &= \lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} A^n\right).(I_n - A) \\
&= \lim_{N\to+\infty} I_n - A^{N+1}.
\end{aligned}$$

Or $\|A^{n+1}\| \leqslant \|A\|^{n+1}$ et comme $\|A\| < 1$, alors

$$\lim_{N\to+\infty} I_n - A^{N+1} = I_n.$$

On a ainsi démontré que $(I_n - A)$ était inversible et que son inverse était la matrice S.

2. a. Comme A est inversible,

$$A + H = A.\big(I_n - [-A^{-1}.H]\big)$$

et d'après la question précédente, si $\|-A^{-1}.H\| < 1$, alors $A + H$ est inversible en tant que produit de deux matrices inversibles.

Comme on a une norme d'algèbre,

$$\|-A^{-1}.H\| \leqslant \|A^{-1}\|.\|H\|$$

et par conséquent,

$$\|H\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|} \implies \|-A^{-1}.H\| < 1.$$

2. b. On vient de démontrer que : pour toute matrice inversible $A \in GL_n(\mathbb{K})$, la boule ouverte de centre A et de rayon $1/\|A^{-1}\|$ était contenue dans $GL_n(\mathbb{K})$. Cela signifie que $GL_n(\mathbb{K})$ est un voisinage de A.

Comme c'est vrai pour tout point $A \in GL_n(\mathbb{K})$, on en déduit que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque.— On peut aussi partir du fait que

$$\det : \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

est une application continue, puisqu'elle est polynomiale (en fonction des coordonnées de M) :

$$\det M = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) m_{1,\sigma(1)} \cdots m_{n,\sigma(n)}.$$

Comme
$$M \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \det M \neq 0,$$
on en déduit que $GL_n(\mathbb{K})$ est l'image réciproque de l'ouvert
$$]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$
par l'application continue det et donc que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

3. Comme $f : U \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ où $U = GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, l'application linéaire tangente à f en $A \in U$, si elle existe, est nécessairement une fonction
$$df(A) : \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}).$$

3. a. Pour $\|H\| < 1$ (et donc lorsque H tend vers la matrice nulle),
$$\begin{aligned}(I_n + H)^{-1} &= \big(I_n - (-H)\big)^{-1} \\ &= I_n - H + \sum_{n=2}^{+\infty} (-H)^n.\end{aligned}$$
D'après l'inégalité triangulaire (pour les séries absolument convergentes) et la propriété de norme d'algèbre,
$$\left\| \sum_{n=2}^{+\infty} (-H)^n \right\| \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \|H\|^n = \frac{\|H\|^2}{1 - \|H\|}.$$
Par conséquent, lorsque H tend vers 0,
$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-H)^n = \mathcal{O}\big(\|H\|^2\big) = o(H)$$
et donc
$$f(I_n + H) = f(I_n) - H + o(H).$$
Cela prouve que f est différentiable en I_n et que
$$\forall\, H \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \qquad df(I_n)(H) = -H.$$

3. b. On reprend le même calcul : lorsque le réel $\|H\|$ tend vers 0,
$$\begin{aligned}(M_0 + H)^{-1} &= \big(I_n - (-M_0^{-1}H)\big)^{-1}.M_0^{-1} \\ &= \big[I_n - M_0^{-1}H + o(H)\big].M_0^{-1} \\ &= M_0^{-1} - M_0^{-1}HM_0^{-1} + o(H)\end{aligned}$$
et comme l'application
$$\big[H \mapsto -M_0^{-1}HM_0^{-1}\big]$$
est linéaire, on en déduit que f est bien différentiable en chaque point $M_0 \in U$ et que
$$\forall\, H \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \qquad df(M_0)(H) = -M_0^{-1}HM_0^{-1}.$$

REMARQUE.— On ne peut manquer de faire l'analogie avec le développement limité bien connu :
$$\frac{1}{x_0 + h} = \frac{1}{x_0} - \frac{h}{x_0^2} + o(h)$$
pour $x_0 \in \mathbb{R}^*$ et $h \in \mathbb{R}$ assez proche de 0.

REMARQUE.— Il est important de bien comprendre comment on développe le produit dans la dernière ligne du calcul.

L'expression $o(H)$ représente en fait une expression $g(H)$ qu'on peut factoriser sous la forme
$$g(H) = \|H\|.\varepsilon(H)$$
où la fonction ε tend vers 0_E au voisinage de 0_E.

Par conséquent,

$$g(H).M_0^{-1} = \|H\|.\varepsilon(H).M_0^{-1}$$

avec

$$\lim_{H \to 0_E} \varepsilon(H).M_0^{-1} = 0_E$$

parce que l'application

$$\left[A \mapsto A.M_0^{-1}\right] \,:\, \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$$

est continue (d'après la propriété des normes d'algèbre ou parce qu'il s'agit d'une application linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie).

Une dernière remarque

L'application $\left[M \mapsto M^{-1}\right]$ est en fait de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'ouvert $U = GL_n(\mathbb{K})$. En effet, d'après les formules de Cramer,

$$M^{-1} = \frac{[\mathrm{Co}(M)]^\top}{\det M}.$$

On a expliqué plus haut pourquoi le dénominateur était une fonction polynomiale. Les n^2 composantes du numérateur sont également polynomiales (pour les mêmes raisons : les cofacteurs sont les déterminants de matrices extraites de la matrice M). Comme le dénominateur ne s'annule pas sur U (par définition même de U !), il s'agit donc d'une fonction rationnelle définie sur l'ouvert U et par conséquent de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur U.

Cela ne nous donne aucune indication sur l'expression de l'application linéaire tangente...