Problème de Mathématiques

Référence pp2213 — Version du 6 février 2026

---

1. On considère l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on pose

$$\forall\, P \in E, \quad \|P\| = \sup_{t\in[0,1]} \big|P(t)\big|.$$

Démontrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.

2. Pour tout $P \in E$, on pose

$$\Phi(P) = \int_0^1 P^3(t)\,dt.$$

Démontrer que Φ est différentiable et calculer l'application linéaire tangente $d\Phi(P_0)$ pour tout polynôme $P_0 \in E$.

Solution ❀ Application linéaire tangente

1. L'application $[t \mapsto P(t)]$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc elle est bornée, ce qui prouve que $\|\cdot\|$ est bien une application de l'espace vectoriel E dans $\mathbb{R}$.

Il est clair que $\|\cdot\|$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, qu'elle est positivement homogène, qu'elle vérifie l'inégalité triangulaire (démonstration très classique, *à connaître impérativement*).

Si $\|P\| = 0$, alors $P(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$. Comme $[0,1]$ est un ensemble de cardinal infini, on en déduit que P est bien le polynôme nul. Par conséquent, l'application $\|\cdot\|$ sépare les points et c'est donc bien une norme sur E.

2. Tout d'abord, l'application $\left[t \mapsto P^3(t)\right]$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc $\Phi(P)$ est bien définie pour tout $P \in E$: ainsi, Φ est bien une application de E dans $\mathbb{R}$.

REMARQUE.— Dans les calculs qui suivent, on ne considère que des fonctions continues sur le segment $[0,1]$, donc toutes les intégrales existent (on n'y reviendra pas).

❧ Soient $P_0, H \in E$. D'après la formule du binôme et la linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}\Phi(P_0 + H) = \Phi(P_0) &+ 3\int_0^1 P_0^2(t)H(t)\,dt \\ &+ 3\int_0^1 P_0(t)H^2(t)\,dt + \Phi(H).\end{aligned}$$

Il est clair que l'application

$$\left[H \mapsto 3\int_0^1 P_0^2(t)H(t)\,dt\right]$$

est une forme linéaire sur E.

Comme la borne supérieure est un majorant, alors

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \left|P(t)\right| \leqslant \|P\|$$

et donc

$$\begin{aligned}\forall\, t \in [0,1], \quad \left|P_0(t)H^2(t)\right| &\leqslant \|P_0\|\,\|H\|^2, \\ \left|H^3(t)\right| &\leqslant \|H\|^3.\end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire et positivité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 P_0(t)H^2(t)\,dt\right| &\leqslant \|P_0\|\,\|H\|^2, \\ \left|\int_0^1 H^3(t)\,dt\right| &\leqslant \|H\|^3.\end{aligned}$$

Lorsque u tend vers 0, on sait que $\mathcal{O}(u^2) = o(u)$ et que $\mathcal{O}(u^3) = o(u)$. Donc, lorsque H tend vers 0_E (c'est-à-dire lorsque $\|H\|$ tend vers $0_\mathbb{R}$),

$$\Phi(P_0 + H) = \Phi(P_0) + 3\int_0^1 P_O^2(t)H(t)\,dt + o\big(\|H\|\big).$$

Ce développement limité prouve que Φ est différentiable au point M_0 et que

$$d\Phi(M_0) = \left[H \mapsto 3\int_0^1 P_0^2(t)H(t)\,dt\right].$$