

1. L'**optimisation** consiste à déterminer les extrema d'une fonction à valeurs réelles.

2. Un **extremum** (maximum ou minimum) est une valeur particulière de la fonction. On distingue deux types d'extrema.

2.1 $\nrightarrow$ La fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ atteint un **maximum global**, ou **maximum absolu**, au point $M_0 \in X$ si, et seulement si,

$$\forall M \in X \quad f(M) \leq f(M_0).$$

2.2 On note $\mathcal{V}_X(M_0)$, l'ensemble des voisinages du point M_0 relatifs à l'ensemble X sur lequel la fonction f est définie.

2.3 $\nrightarrow$ La fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ atteint un **maximum local**, ou **maximum relatif**, au point $M_0 \in X$ si, et seulement si,

$$\exists V \in \mathcal{V}_X(M_0), \forall M \in V, \quad f(M) \leq f(M_0).$$

2.4 Tout extremum absolu est en particulier un extremum local.

2.5 Il ne faut pas confondre un extremum de f , qui est une valeur réelle de f , avec les points de X , parfois appelés **extrémants** de f , où la fonction f prend cette valeur particulière.

2.6 Si f atteint un maximum global, cette valeur maximale est unique. Il est atteint en un point au moins de X , mais peut être atteint en plusieurs points de X (éventuellement en une infinité de points de X).

2.7 Une fonction peut atteindre plusieurs maxima relatifs différents sans atteindre de maximum absolu.

3. Les extrema d'une fonction numérique f définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ peuvent se déduire des variations de f .

Pour une fonction f définie sur une partie X de $\mathbb{R}^d$, l'étude des variations n'a plus de sens et la recherche des extrema, qu'il s'agisse de leur valeur ou des endroits où ils sont atteints, est un problème difficile en général.

I

Compacité et existence d'extrema

4. Toute fonction bornée $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure, mais cela ne prouve pas qu'elle atteigne effectivement un maximum ou un minimum.

5. **Parties compactes de $\mathbb{R}^d$**

La notion de **partie compacte** généralise la notion de **segment** sur $\mathbb{R}$ et l'étend aux espaces vectoriels de dimension finie.

5.1 Une partie K de $\mathbb{R}^d$ est **fermée** lorsqu'elle est stable par passage à la limite : si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs appartenant à K qui converge vers le vecteur ℓ , alors le vecteur ℓ appartient encore à K .

Cette notion ne dépend pas de la norme choisie sur $\mathbb{R}^d$.

5.2 Une partie K de $\mathbb{R}^d$ est **compacte** lorsqu'elle est simultanément fermée et bornée.

Cette notion ne dépend pas non plus de la norme choisie sur l'espace $\mathbb{R}^d$.

5.3 Tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ est donc compact, mais une partie compacte de $\mathbb{R}$ n'est pas nécessairement un segment : l'union de deux segments est une partie compacte de $\mathbb{R}$.

5.4 L'ensemble **triadique** K_C de Cantor est une partie compacte contenue dans $[0, 1]$ qui possède des propriétés étonnantes.

- Comme $\mathbb{Q}$, il est totalement discontinu : entre deux points de K_C , il existe un réel qui n'appartient pas à K_C .
- Comme $\mathbb{Q}$, tout voisinage d'un point de K_C contient une infinité de points de K_C .

— Comme $\mathbb{Q}$, il est de mesure nulle : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-intervalles de $[0, 1]$ dont l'union contient K_C alors que la somme de leurs longueurs est inférieure à ε .

— Comme $\mathbb{R}$ et contrairement à $\mathbb{Q}$, il n'est pas dénombrable.

6. **Théorème d'existence d'extrema**

6.1 $\rightarrow$ Soit f , une fonction continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. La restriction de f à une partie compacte $K \subset \mathbb{R}^d$ est bornée et atteint ses bornes.

6.2 Le théorème [6.1] prouve l'existence d'extrema absolus (maximum et minimum), mais ne permet pas d'estimer la valeur de ces extrema puisqu'il ne donne aucune indication sur les points de K où ces extrema sont atteints.

6.3 En outre, l'existence d'éventuels extrema relatifs distincts des extrema absolus ne peut être prouvée de cette manière.

7. **Exemples**

7.1 La fonction f définie sur $D = [x^2 + y^2 \leq 2]$ par

$$\forall (x, y) \in D, \quad f(x, y) = xy|x^2 + y^2 - 1|$$

atteint un maximum absolu et un minimum absolu sur D .

7.2 La fonction f définie sur $D = [x^2 + y^2 \leq 1]$ par

$$\forall (x, y) \in D, \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + y^2$$

atteint un maximum absolu et un minimum absolu sur D .

7.3 La fonction f définie sur $D = [x^2 + y^2 \leq 16]$ par

$$\forall (x, y) \in D, \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 - y^2$$

atteint un maximum absolu et un minimum absolu sur D .

7.4 Soit $K = [x \geq 0] \cap [y \geq 0] \cap [x + y \leq 1] \subset \mathbb{R}^2$.

La fonction $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in K, \quad f(x, y) = xy(1 - x - y)$$

atteint un maximum absolu et un minimum absolu sur K . $\rightarrow$ [25]

8. **Extrema d'une forme affine**

On étudie une **forme affine** f sur $\mathbb{R}^d$, définie par

$$\forall M \in \mathbb{R}^d, \quad f(M) = f(O) + \varphi(OM)$$

où $\varphi \in L(E, \mathbb{R})$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^d$.

8.1 En général, la fonction f n'a pas de point critique.

8.2 Quelle que soit la partie fermée et bornée $K \subset \mathbb{R}^d$, la fonction f atteint un maximum et un minimum sur K .

8.3 Si $\mathbb{R}^d$ est muni de sa structure euclidienne canonique, alors

$$\forall u \in \mathbb{R}^d, \quad f(A + u) = f(A) + \langle \nabla f(A) | u \rangle$$

quel que soit le point $A \in \mathbb{R}^d$.

8.4 Si le compact K est la boule fermée de centre A et de rayon r :

$$K = [\|AM\|^2 \leq r^2],$$

alors f atteint respectivement son maximum strict et son minimum strict aux points M_+ et M_- définis par

$$M_+ = A + r \cdot \frac{\nabla f(A)}{\|\nabla f(A)\|}, \quad M_- = A - r \cdot \frac{\nabla f(A)}{\|\nabla f(A)\|}.$$

8.5 Si f prend la même valeur (extrémale ou non) en deux points distincts M_1 et M_2 , alors la droite $(M_1 M_2)$ est orthogonale au gradient de f et

$$\forall M \in [M_1, M_2], \quad f(M) = f(M_1) = f(M_2).$$

8.6 En dimension 2, si K est un rectangle :

$$K = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$$

alors f atteint ses valeurs extrêmes en l'un des sommets du rectangle. Il suffit de calculer ces quatre valeurs de f et de les comparer pour obtenir le maximum et le minimum de f .

8.7 Exemples

1. Calculer les extrema de la fonction définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = 2x - y + 3$$

sur $K = [x^2 + y^2 + 2x - 3y \leq 5]$.

2. Calculer les extrema de la fonction définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x + 3y + 2$$

sur $K = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

3. Calculer les extrema de la fonction définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = -3x + 2y + z - 2$$

sur $K = [x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 6z \leq 3]$.

4. Calculer les extrema de la fonction définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = x + 2y - z + 1$$

sur $K = [-1, 1] \times [-2, 2] \times [0, 2]$.

Existence d'extrema sur une partie non compacte

9. Un argument de compacité permet de justifier qualitativement l'existence d'un extremum, en n'effectuant que les calculs nécessaires pour appliquer le théorème [6.1].

9.1 Fonctions propres

Si $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue qui tend vers $+\infty$ au voisinage de l'infini, alors la fonction f atteint un minimum absolu.

9.2 Si $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et positive qui tend vers 0 au voisinage de l'infini, alors elle atteint un maximum absolu.

10. Exemples

- 10.1 La fonction définie sur
- $\mathbb{R}^2$
- par

$$f = [(x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 4xy]$$

atteint un minimum absolu sur $\mathbb{R}^2$.

- 10.2 La fonction définie sur
- $\mathbb{R}^2$
- par

$$f = [(x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2]$$

atteint un minimum absolu sur $\mathbb{R}^2$.

- 10.3 La fonction
- f
- définie sur
- $\mathbb{R}^2$
- par

$$f = [(x, y) \mapsto (x + y)e^{-(x^2 + y^2)}]$$

atteint un maximum absolu et un minimum absolu sur $\mathbb{R}^2$.

- 10.4 Soit
- $a > 0$
- . Les fonctions définies sur
- $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$
- par

$$f_1(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy \quad f_2(x, y) = \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^2}{y^2} + \frac{xy}{a^2}$$

$$f_3(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{a}{xy} \quad f_4(x, y) = x + y + \frac{a}{xy}$$

atteignent un minimum absolu sur U .

- 10.5 La fonction
- f
- définie sur
- $A = [0 < x \leq a \leq b \leq y] \subset \mathbb{R}^2$
- par

$$\forall (x, y) \in A, \quad f(x, y) = \frac{(x + y)^2}{xy}$$

atteint un minimum absolu sur A .

11. L'application

$$f = [(x, y) \mapsto (x^2 - y^2)e^{-x^2 - y^2}]$$

atteint un maximum et un minimum sur $\mathbb{R}^2$.

II

Recherche d'extrema locaux

12. Lorsque la fonction f est définie sur un ouvert, la formule de Taylor peut servir à localiser un extremum en décrivant le comportement de f au voisinage d'un point $M_0 \in U$.

Un développement limité ayant une valeur locale, cette technique ne peut servir qu'à justifier la présence d'un extremum relatif.

13. En particulier, on pourra peut-être déterminer l'endroit où un extremum global est atteint (et la valeur de cet extremum), mais les techniques qui vont être présentées maintenant ne peuvent en aucune manière prouver que cet extremum est bien un extremum global.

14. Si la fonction f est définie sur une partie X qui n'est pas ouverte, il faudra étudier f d'une part sur l'intérieur U de X (qui est bien un ouvert) et d'autre part sur le bord ∂X de X (qui est un fermé d'intérieur vide).

II.1 Condition nécessaire au premier ordre

15. Il suffit de savoir où un extremum est atteint pour déterminer sa valeur!

15.1 Si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ atteint un extremum local au point $M_0 \in U$, alors la fonction

$$\varphi_v = [t \mapsto f(M_0 + t \cdot v)]$$

atteint un extremum local en $t = 0$, quel que soit $v \in E$.

15.2 On déduit alors de [18.21.3] la condition nécessaire suivante.

15.3 $\rightarrow$ Si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ atteint un extremum local en un point M_0 de l'ouvert U , alors M_0 est un point critique de f .

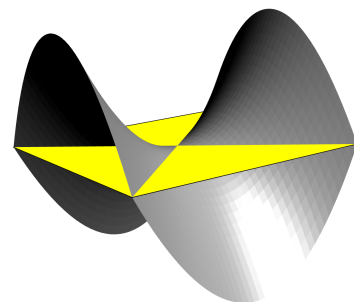
15.4 Si f est continue sur le compact K et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intérieur U de K , alors f atteint chacun de ses deux extrema

- ou bien en un point critique $M_0 \in U$;
- ou bien en un point $M_0 \in \partial K$ du bord de K .

16. L'application
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
- définie par

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

admet l'origine pour unique point critique, mais n'atteint ni maximum local, ni minimum local en ce point.



17. Un point critique singulier

1. La fonction
- f
- définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = y^2 - 4x^2y + 3x^4$$

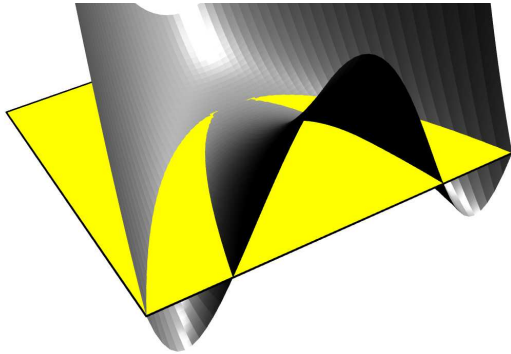
admet l'origine O comme seul point critique. La hessienne [18.3] de f en O est positive, mais pas définie positive.

2. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\mathbf{u}_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$.
Un équivalent de $f(t \cdot \mathbf{u}_\theta)$ au voisinage de $t = 0$ montre que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \exists \alpha_\theta > 0, \forall 0 < t < \alpha_\theta, f(t \cdot \mathbf{u}_\theta) > f(O).$$

Ainsi, la restriction de f à une droite quelconque passant par O atteint un minimum local strict en O — ce qui ne signifie que pas que f atteigne un minimum strict en O .

3. Comme $f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$, la fonction f n'atteint pas un minimum strict en O .



II.2 Étude au second ordre

18. Soit U , un ouvert de l'espace $E = \mathbb{R}^d$. On suppose que E est muni de sa structure euclidienne canonique, pour laquelle la base canonique est une base orthonormée et on étudie une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ au voisinage d'un point M_0 .

18.1 On sait [18.32.2] alors que, pour tout vecteur $\mathbf{w} \in E$,

$$f(M_0 + t \cdot \mathbf{v}) = f(M_0) + t \langle \nabla f(M_0) | \mathbf{v} \rangle + o(t)$$

lorsque t tend vers 0.

18.2 Nous allons préciser ce développement limité en supposant que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U .

18.3 La matrice hessienne de f au point $M_0 \in U$ est définie par

$$H_f(M_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_0) \right)_{1 \leq i, j \leq d} \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R}).$$

18.4 L'endomorphisme auto-adjoint représenté dans la base canonique par la matrice $H_f(M_0)$ est noté $\nabla^2 f(M_0)$.

18.5 → Formule de Taylor-Young à l'ordre deux

Si la fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$, alors

$$f(M_0 + \mathbf{h}) = f(M_0) + \langle \nabla f(M_0) | \mathbf{h} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{h} | \nabla^2 f(M_0)(\mathbf{h}) \rangle + o(\|\mathbf{h}\|^2)$$

lorsque $\mathbf{h}$ tend vers 0.

18.6 Si M_0 est un point critique, alors

$$\begin{aligned} f(M_0 + \mathbf{h}) &\underset{\mathbf{h} \rightarrow 0}{=} f(M_0) + \frac{1}{2} \langle \mathbf{h} | \nabla^2 f(M_0)(\mathbf{h}) \rangle + o(\|\mathbf{h}\|^2) \\ &\underset{\mathbf{h} \rightarrow 0}{=} f(M_0) + \frac{\|\mathbf{h}\|^2}{2} (\langle \mathbf{u} | \nabla^2 f(M_0)(\mathbf{u}) \rangle + o(1)) \end{aligned}$$

où on a posé $\mathbf{u} = \mathbf{h}/\|\mathbf{h}\|$ (en supposant que le déplacement $\mathbf{h}$ n'était pas nul).

18.7 Le comportement de f au voisinage de M_0 est donc décrit par le comportement sur la sphère unité de $E = \mathbb{R}^d$ de la forme quadratique q associée à la hessienne de f :

$$\forall \mathbf{v} \in E, q(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v} | \nabla^2 f(M_0)(\mathbf{v}) \rangle.$$

Condition nécessaire au second ordre

19. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U et que le point $M_0 \in U$ est un point critique de f .

19.1 Si f atteint un maximum local en M_0 , alors pour tout vecteur unitaire $\mathbf{u}$ et tout réel t assez petit,

$$f(M_0 + t \cdot \mathbf{u}) - f(M_0) \leq 0$$

et par conséquent, pour tout vecteur unitaire $\mathbf{u}$,

$$\langle \mathbf{u} | \nabla^2 f(M_0)(\mathbf{u}) \rangle \leq 0.$$

19.2 → Si f atteint un maximum local au point $M_0 \in U$, alors la hessienne de f en M_0 est négative :

$$H_f(M_0) \in \mathcal{S}_d^-(\mathbb{R}).$$

19.3 → Si f atteint un minimum local au point $M_0 \in U$, alors la hessienne de f en M_0 est positive :

$$H_f(M_0) \in \mathcal{S}_d^+(\mathbb{R}).$$

And now a word from our sponsor.



19.4 → Point col ou point selle

Si la hessienne de f en M_0 admet une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative, alors f n'atteint pas un extremum local en M_0 .

Condition suffisante au second ordre

20. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U et que le point $M_0 \in U$ est un point critique de f .

20.1 Si la hessienne $H_f(M_0)$ est définie positive, alors il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\langle \mathbf{u} | \nabla^2 f(M_0)(\mathbf{u}) \rangle \geq \alpha$$

pour tout vecteur unitaire $\mathbf{u}$.

→ [16.67.5]

20.2 → Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U et si $M_0 \in U$ est un point critique de f tel que la hessienne de f soit définie positive :

$$H_f(M_0) \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$$

alors f atteint un minimum local strict au point M_0 .

20.3 → Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U et si $M_0 \in U$ est un point critique de f tel que la hessienne de f soit définie négative :

$$H_f(M_0) \in \mathcal{S}_d^{--}(\mathbb{R})$$

alors f atteint un maximum local strict au point M_0 .

Cas de la dimension deux

21. Réduction de la hessienne en dimension 2

La base canonique de $E = \mathbb{R}^2$ est notée $\mathcal{B}_0 = (e_x, e_y)$.

21.1 La décomposition d'un vecteur $h \in E$ dans cette base orthonormée

$$h = h_x \cdot e_x + h_y \cdot e_y$$

permet de calculer sa norme :

$$\|h\|^2 = h_x^2 + h_y^2.$$

21.2 La matrice de $\nabla^2 f(M_0)$ dans la base canonique est

$$H_f(M_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0) \end{pmatrix}$$

et le développement limité de f à l'ordre deux au voisinage du point critique peut aussi s'écrire

$$f(M_0 + h) = f(M_0) + \frac{1}{2}q(h) + o(\|h\|^2)$$

avec

$$\begin{aligned} q(h) &= \langle h | \nabla^2 f(M_0)(h) \rangle = (h_x \ h_y) H_f(M_0) \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0) h_x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0) h_x h_y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0) h_y^2. \end{aligned}$$

21.3 Il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (u, v)$ de vecteurs propres de $\nabla^2 f(M_0)$.

1. La décomposition du vecteur h dans cette base

$$h = h_u \cdot u + h_v \cdot v$$

donne

$$\|h\|^2 = h_x^2 + h_y^2 = h_u^2 + h_v^2.$$

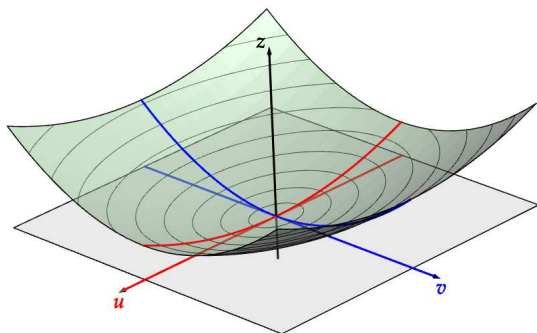
2. En notant λ et μ , les valeurs propres de $\nabla^2 f(M_0)$ respectivement associées à u et v ,

$$\forall h \in E, \quad q(h) = \lambda h_u^2 + \mu h_v^2.$$

3. Si $0 < \lambda \leq \mu$, alors $q(h) \geq \lambda \|h\|^2$ et

$$f(M_0 + h) > f(M_0)$$

pour tout vecteur non nul h assez petit.



4. Si $\lambda \leq \mu < 0$, alors $q(h) \leq \mu \|h\|^2$ et

$$f(M_0 + h) < f(M_0)$$

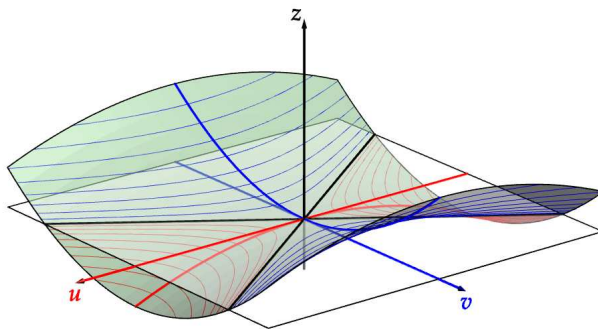
pour tout vecteur non nul h assez petit.

5. Si $\lambda < 0 < \mu$, alors [19.4]

$$f(M_0 + t \cdot u) < f(M_0) < f(M_0 + t \cdot v)$$

pour tout scalaire $t \neq 0$ assez petit.

→[16]

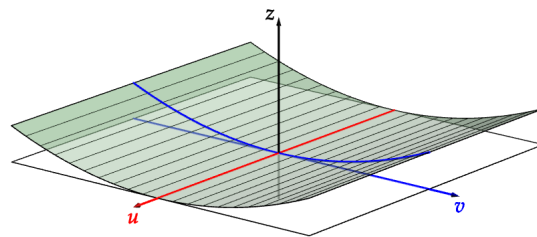


6. Si le vecteur propre u est associé à la valeur propre $\lambda = 0$, alors

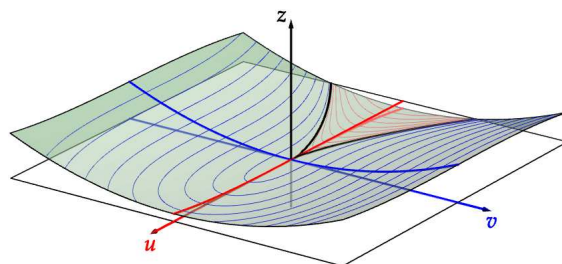
$$f(M_0 + t \cdot u) - f(M_0) = o(t^2)$$

pour t voisin de 0 et le signe de cette différence ne peut être déduit de la formule de Taylor-Young à l'ordre deux.

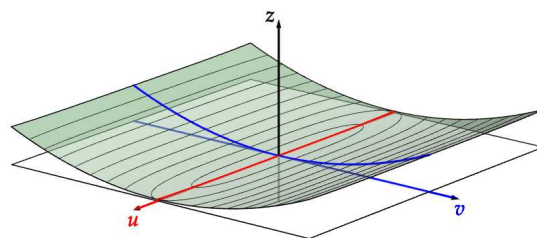
6.a Pour $f(M_0 + h) = h_v^2$, la fonction f passe par un minimum en M_0 , mais ce minimum n'est pas strict.



6.b Pour $f(h) = h_v^2 + h_u^3$, la fonction f ne passe pas par un minimum en M_0 , mais l'allure du graphe (une *fronce*) n'est pas celle d'un col pour autant.

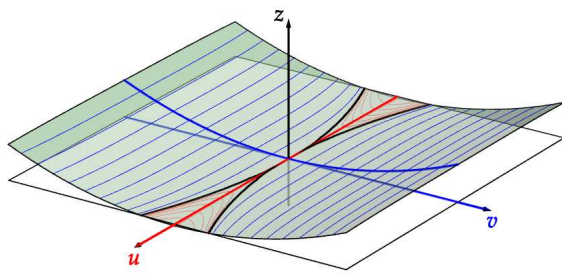


6.c Pour $f(h) = h_v^2 + h_u^4$, la fonction f passe par un minimum local strict en M_0 , comme dans le cas où les deux valeurs propres de la hessienne sont strictement positives.



6.d Pour $f(h) = h_v^2 - h_u^4$, la fonction f passe par un col en M_0 , comme dans le cas où la hessienne possède une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative.

→[16]



21.4 Les notations de Monge sont :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0).$$

21.5 → Soit $M_0 \in U$, un point critique de $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$.

1. Si $\det H_f(M_0) = rt - s^2 > 0$, alors f atteint un extremum local strict en M_0 . Il s'agit d'un minimum pour $\text{tr } H_f(M_0) > 0$ et d'un maximum pour $\text{tr } H_f(M_0) < 0$.

2. Si $\det H_f(M_0) < 0$, alors la fonction f ne passe pas par un extremum local en M_0 .

22. Exemples

22.1 La fonction $[(x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy]$ n'est ni majorée, ni minorée sur $\mathbb{R}^2$. Elle admet deux points critiques : $M_0 = (0, 0)$ et $M_1 = (1, 1)$. Elle atteint un minimum local strict en M_1 . La valeur en M_0 n'est pas un extremum local.

22.2 Suite de [10.1] – La fonction f admet trois points critiques : $M_{-1} = (-1, -1)$, $M_0 = (0, 0)$ et $M_1 = (1, 1)$. Elle atteint son minimum global en M_{-1} et en M_1 . La valeur $f(M_0)$ n'est pas un extremum local.

22.3 La fonction $f = [(x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + 2x - 2y]$ admet $M_0 = (-2, 2)$ pour seul point critique. Elle atteint son minimum absolu en M_0 . → [95]

22.4 Suite de [10.2] – La fonction f admet trois points critiques : $M_0 = (0, 0)$, $M_1 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $M'_1 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. La valeur $f(M_0)$ n'est pas un extremum local. La fonction f atteint son minimum absolu en M_1 et en M'_1 .

22.5 La fonction $f = [(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - x^3]$ n'est ni majorée, ni minorée sur $\mathbb{R}^2$. Elle admet deux points critiques : $M_0 = (0, 0)$ et $M_1 = (2/3, 0)$. Elle passe par un minimum local strict en M_0 ; la valeur $f(M_1)$ n'est pas un extremum local.

Entraînement

23. Suite de [10.4] –

1. La fonction f_1 admet le point $(1, 1)$ pour unique point critique et atteint son minimum absolu en ce point.

2. La fonction f_4 admet le point $(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a})$ pour unique point critique.

3. Les fonctions f_2 et f_3 admettent chacune un unique point critique, situé sur la droite $[y = x]$.

24. La fonction $f = [(x, y) \mapsto xy - x^2y + xy^2]$ n'est ni majorée, ni minorée sur $\mathbb{R}^2$. Elle admet quatre points critiques :

$$M_0 = (0, 0), \quad M_1 = (0, -1), \quad M_2 = (1, 0), \quad M_3 = (1/3, -1/3).$$

La fonction f passe par un minimum local strict en M_3 . Elle ne passe pas par un extremum local aux autres points critiques.

25. Suite de [7.4] – Quels que soient $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$, la fonction g définie par

$$\forall (x, y) \in K, \quad g(x, y) = x^a y^b (1 - x - y)^c$$

atteint un maximum absolu sur K au point

$$(x, y) = \left(\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c} \right)$$

et atteint son minimum absolu en chaque point du bord de K .

26. La fonction f définie par

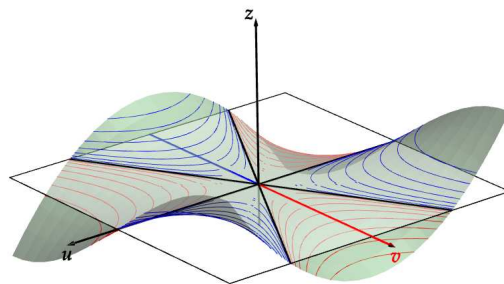
$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = xyz + xy + yz$$

n'atteint aucun extremum sur $\mathbb{R}^3$ car la trace de sa hessienne est nulle en tout point.

27. Au voisinage de l'origine, le graphe de la fonction

$$f = [(x, y) \mapsto 2x^2y - y^3]$$

ne ressemble à aucun des cas répertoriés au [21.3]. Expliquer.



III

Extrema globaux

III.1 Extremum d'un polynôme quadratique

28. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 5x - y.$$

1. Il existe une matrice symétrique et inversible $S \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et une matrice colonne $B \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad f(x, y) = \frac{1}{2} X^\top \cdot S \cdot X - B^\top \cdot X.$$

2. Quelles que soient X_0 et H dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$,

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + (X_0^\top \cdot S - B^\top) H + \frac{1}{2} H^\top \cdot S \cdot H.$$

On choisit $X_0 = S^{-1}B$. Pourquoi ?

3. Soit $\Delta = \text{Diag}(3, 1)$. Il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ telle que $P^\top \cdot S \cdot P = \Delta$.

4. Pour tout $H \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non nul,

$$H^\top \cdot S \cdot H = H^\top \cdot P \cdot \Delta \cdot P^\top \cdot H \geq H^\top \cdot P \cdot P^\top \cdot H = H^\top \cdot H > 0.$$

5. La fonction f atteint son minimum global strict en X_0 et n'est pas majorée sur $\mathbb{R}^2$. → [95]

III.2 Convexité

29. Alors que l'étude au second ordre est une étude *locale*, la convexité permet d'établir des inégalités *globales*.

30. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe, alors

$$f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}$$

quels que soient les réels $x_1, \dots, x_n$ dans I .

31. Cas d'égalité

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle ouvert I , dont la dérivée seconde est strictement positive.

31.1 Quels que soient $x_1, \dots, x_n$ dans I , quels que soient les réels strictement positifs $t_1, \dots, t_n$ tels que $t_1 + \dots + t_n = 1$, on a

$$f\left(\sum_{k=1}^n t_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n t_k f(x_k).$$

31.2 Si cette inégalité est une égalité, alors le point

$$M = (x_1, \dots, x_n)$$

est un point critique de la fonction Φ définie par

$$\Phi(u_1, \dots, u_n) = \sum_{k=1}^n t_k f(u_k) - f\left(\sum_{k=1}^n t_k u_k\right)$$

pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in I^n$ et par conséquent

$$x_1 = \dots = x_n.$$

Applications

32. L'expression définie sur $]0, 1[^n \cap [x_1 + \dots + x_n = 1]$ par

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - x_k}$$

atteint son minimum absolu en $x_1 = \dots = x_n = 1/n$.

33. Soient a, b et c , les longueurs des côtés d'un triangle. Alors

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

avec égalité si, et seulement si, le triangle est équilatéral.

34. Entropie d'une variable aléatoire discrète

Soit $(p_1, \dots, p_n)$, une famille de réels strictement positifs dont la somme est égale à 1. L'*entropie* de cette famille, définie par

$$H(p_1, \dots, p_n) = - \sum_{k=1}^n p_k \ln p_k,$$

est maximale pour $p_1 = \dots = p_n = 1/n$.

35. Inégalité arithmético-géométrique

35.1 La fonction $-\ln$ est strictement convexe sur $]0, +\infty[$.

35.2 * Quels que soient les réels strictement positifs $x_1, \dots, x_n$,

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$$

avec égalité si, et seulement si, $x_1 = \dots = x_n$.

35.3 La fonction définie par $g(x, y, z) = (xyz)^3$ sur le compact $K = (\mathbb{R}_+)^3 \cap [x + y + z = 1]$ admet 0 pour minimum et atteint son maximum en $x = y = z = 1/3$.

35.4 La fonction définie par $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sur le fermé $[x^2 y^2 z^2 = 1]$ n'est pas majorée. Elle atteint son minimum aux points (x, y, z) tels que $x^2 = y^2 = z^2 = 1$.

35.5 Soit $(p_1, \dots, p_n) \in (]0, 1[)^n$, des réels dont le produit est égal à 2^{-n} . Les sommes

$$\sum_{k=1}^n p_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n \frac{p_k}{1 - p_k}$$

sont minimales pour $p_1 = \dots = p_n = 1/2$.

III.3 Méthode des crêtes

36. La méthode des crêtes ramène la recherche des extrema globaux d'une fonction de 2 variables à l'étude des extrema de 2 fonctions d'une variable.

36.1 Soit $K = [a, b] \times [c, d]$. Si $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors les fonctions m et M définies par

$$m(x) = \min_{c \leq y \leq d} f(x, y) \quad \text{et} \quad M(x) = \max_{c \leq y \leq d} f(x, y)$$

sont continues sur $[a, b]$ et

$$\min_{(x,y) \in K} f(x, y) = \min_{a \leq x \leq b} m(x) \quad \text{et} \quad \max_{(x,y) \in K} f(x, y) = \max_{a \leq x \leq b} M(x).$$

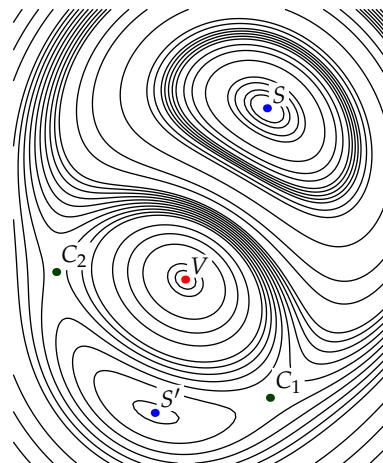
36.2 Si Ω est l'image de $[a, b] \times [c, d]$ par une fonction φ , alors

$$\min_{M \in \Omega} f(M) = \min_{\substack{a \leq u \leq b \\ c \leq v \leq d}} (f \circ \varphi)(u, v)$$

$$\max_{M \in \Omega} f(M) = \max_{\substack{a \leq u \leq b \\ c \leq v \leq d}} (f \circ \varphi)(u, v)$$

et la méthode des crêtes peut s'appliquer à la fonction $(f \circ \varphi)$.

37. On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un rectangle $U =]a, b[\times]c, d[$.



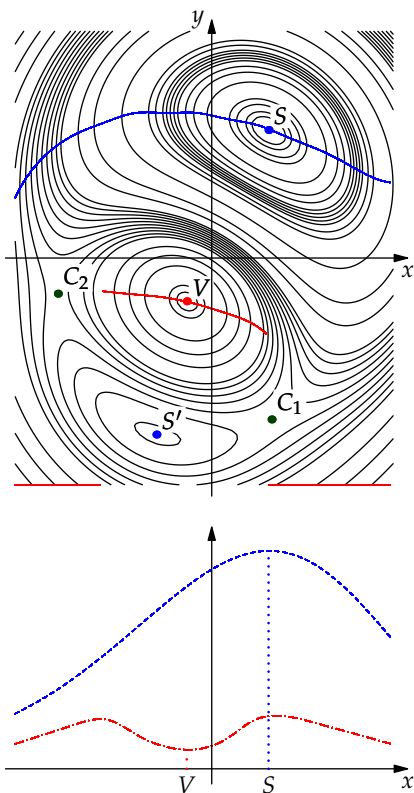
On voit sur ses courbes de niveau que cette fonction admet cinq points critiques :

- Elle atteint son maximum global en S .
- Elle passe par un maximum local en S' .
- Elle atteint son minimum global en V .
- En deux autres points critiques C_1 et C_2 , elle n'atteint ni maximum local, ni minimum local.

37.1 Pour chaque valeur de $x_0 \in]a, b[$, on cherche les valeurs extrêmes de la fonction

$$[y \mapsto f(x_0, y)]$$

sur $]c, d[$. Le minimum est atteint en $y_m = \varphi_m(x_0)$ (courbe rouge) et le maximum en $y_M = \varphi_M(x_0)$ (courbe bleue).



En étudiant f le long de ces deux courbes, c'est-à-dire en étudiant

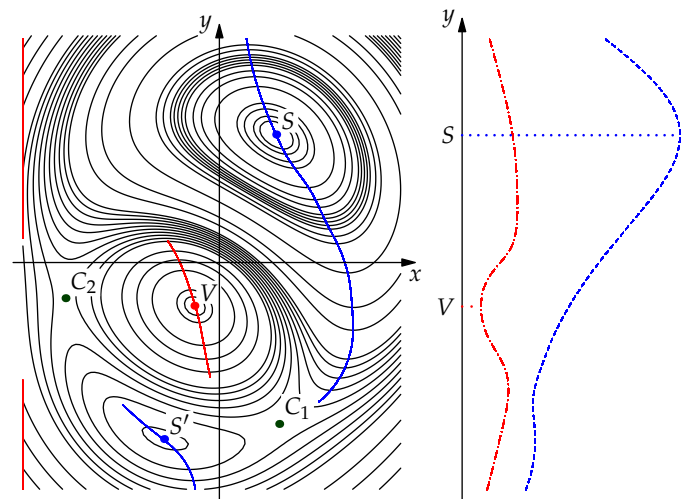
$$[x \mapsto f(x, \varphi_m(x))] \quad \text{et} \quad [x \mapsto f(x, \varphi_M(x))]$$

on peut situer les abscisses des points S (*maximum maximorum*) et V (*minimum minimorum*).

37.2 De manière analogue, on peut aussi, pour chaque valeur de $y_0 \in]c, d[$, chercher les valeurs extrêmes de la fonction

$$[x \mapsto f(x, y_0)]$$

sur $]a, b[$. Le minimum est atteint en $x_m = \psi_m(y_0)$ (courbe rouge) et le maximum en $x_M = \psi_M(y_0)$ (courbe bleue).



En étudiant f le long de ces deux courbes, c'est-à-dire en étudiant

$$[y \mapsto f(\psi_m(y), y)] \quad \text{et} \quad [y \mapsto f(\psi_M(y), y)]$$

on peut situer les ordonnées des points S et V .

38. Exemples

38.1 La fonction f définie par

$$\forall (x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1], \quad f(x, y) = x^4 y^2 + \ln(1 + y^4)$$

est bornée et atteint ses bornes.

Les points critiques de f sont $(x, 0)$ pour $x \in [-1, 1]$.

Pour tout $y \in [-1, 1]$, elle atteint son minimum en $x = 0$ et son maximum en $x = \pm 1$.

$$\min_{x \in [-1, 1]} f(x, y) = \ln(1 + y^4)$$

$$\max_{x \in [-1, 1]} f(x, y) = y^2 + \ln(1 + y^4)$$

Le minimum de f est donc 0, valeur prise en $(0, 0)$. Son maximum est égal à $1 + \ln 2$, valeur prise en $(\pm 1, \pm 1)$.

38.2 On étudie la fonction f définie par

$$\forall (x, y) \in T, \quad f(x, y) = xy\sqrt{1-x-y}$$

où $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : 1 - x - y \geq 0\}$.

1. La fonction f est positive sur T et nulle sur le bord de T .
2. La fonction f atteint son maximum en un point critique de l'intérieur de T .

L'unique point critique de f situé à l'intérieur de T a pour coordonnées $(2/5, 2/5)$ et le maximum de f est égal à $4\sqrt{5}/125$.

3. Pour chaque $x \in [0, 1]$, en restriction à $[0, 1 - x]$, la fonction $[y \mapsto f(x, y)]$ passe par un maximum en

$$\varphi_M(x) = \frac{2}{3}(1 - x).$$

Sur $[0, 1]$, la fonction g définie par

$$g(x) = f(x, \varphi_M(x)) = \frac{2}{3\sqrt{3}}x(1 - x)^{3/2}$$

atteint son maximum en $x = 2/5$.

Applications

39.1 La fonction f définie sur $[0, 1] \times \mathbb{R}$ par

$$f = [(x, y) \mapsto 2xy^2 + \ln(4 + y^2)]$$

atteint un minimum absolu en $(0, 0)$.

39.2 Suite de [10.5] – Le minimum absolu de f sur A est atteint en $(x, y) = (a, b)$.

39.3 Suite de [10.4] – La méthode des crêtes s'applique aux fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 .

40. Utilisation des coordonnées polaires

40.1 La fonction f définie par

$$f(x, y) = y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} - 1$$

est bornée sur $D = \{x^2 + y^2 \leq 9\}$ et atteint ses bornes. Son maximum est égal à 11.

40.2 Suite de [10.3] – Le maximum absolu de f est égal à $1/\sqrt{e}$. Le minimum absolu s'en déduit par symétrie.

40.3 Suite de [7.2] – Le maximum absolu de f est égal à 2; le minimum absolu est nul.

40.4 Suite de [7.3] – Le maximum absolu de f est égal à 20; le minimum absolu est égal à -12.

40.5 Suite de [7.1] – Le maximum absolu de f est égal à 1; le minimum absolu s'en déduit par symétrie.

41. Autres changements de variables

41.1 On peut trouver les extrema de $e^{x+t} - 2(x+t) + (x-t)^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en posant $u = x+t$ et $v = x-t$.

41.2 L'étude de $x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$ sur $\mathbb{R}^2$ conduit naturellement à poser $u = y - x/2$ et $v = x$.

41.3 Étudier les extrema de $f(x, y) = (xy)^\alpha + \beta xy$ en fonction de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

IV**Introduction à la géométrie différentielle****IV.1 Arcs paramétrés**

42. Soit E , un espace vectoriel de dimension finie.

42.1 Un **arc paramétré** est un couple (I, f) , où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle et f , une fonction de I dans E .

Les réels $t \in I$ sont appelés **paramètres**.

42.2 L'image d'un arc paramétré

$$\Gamma = \{f(t), t \in I\}$$

est une partie de E considérée comme une **courbe**. Une courbe qui est contenue dans un plan est dite **courbe plane**. Une courbe qui n'est pas plane est dite **courbe gauche**.

42.3 Interprétation cinématique

Un couple (I, γ) est compris comme le mouvement d'un point matériel au cours du temps.

L'ensemble

$$\Gamma = \{\gamma(t), t \in I\}$$

des positions occupées par ce point matériel, c'est-à-dire la **trajectoire** de ce point, est une courbe tracée sur l'ensemble X et le vecteur $\gamma'(t_0)$ est le **vecteur vitesse** à l'instant $t_0 \in I$.

43. Exemple fondamental

Soient $v \neq 0_E$ et $M_0 \in E$. L'arc paramétré $(\mathbb{R}, \delta)$ défini par

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad \delta(h) = M_0 + h \cdot v$$

décrit un mouvement rectiligne uniforme. Son image

$$\Delta = \{\delta(h), h \in \mathbb{R}\} = M_0 + \mathbb{R} \cdot v$$

est la droite dirigée par le vecteur v et qui passe par le point M_0 .

44. Soit (I, f) , un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$: la fonction f est continûment dérivable sur I .

44.1 Pour tout $t_0 \in I$,

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + h \cdot f'(t_0) + o(h)$$

lorsque h tend vers 0.

44.2 Le réel $t_0 \in I$ est un **paramètre régulier** lorsque le vecteur $f'(t_0) \in E$ n'est pas nul.

44.3 Si t_0 est un paramètre régulier, lorsque t est voisin de t_0 , le mouvement décrit par γ est proche du mouvement rectiligne [43] avec $v = f'(t_0)$.

Localement, la courbe Γ ressemble donc à une droite.

44.4 Si $t_0 \in I$ est un paramètre régulier de l'arc paramétré (I, f) , la **tangente** à la courbe Γ au point $M_0 = f(t_0)$ est la droite issue du point M_0 et dirigée par le vecteur $f'(t_0) \in E$.

44.5 Si $t_0 \in I$ n'est pas un paramètre régulier, on dit alors que $f(t_0)$ est un **point stationnaire**.

Au voisinage d'un point stationnaire, la courbe Γ peut ne pas ressembler à une droite. →[45.4]

45. Dérivée le long d'un arc

Soit $f : U \rightarrow F$, une fonction différentiable sur l'ouvert U et $\gamma : I \rightarrow U$, une fonction dérivable sur l'intervalle I , à valeurs dans U .

L'étude de la composée $g = f \circ \gamma$ décrit le comportement de la fonction f le long de la courbe paramétrée par γ .

45.1 Soient $M_0 \in U$ et $h \in E$: comme U est ouvert, il existe un intervalle $I =]-\alpha, \alpha[$ tel que

$$\forall t \in I, \quad \gamma(t) = M_0 + t \cdot h \in U$$

et $(f \circ \gamma)'(0)$ est la dérivée de f en M_0 selon h [18.22].

45.2 → La composée $f \circ \gamma : I \rightarrow F$ est dérivable et

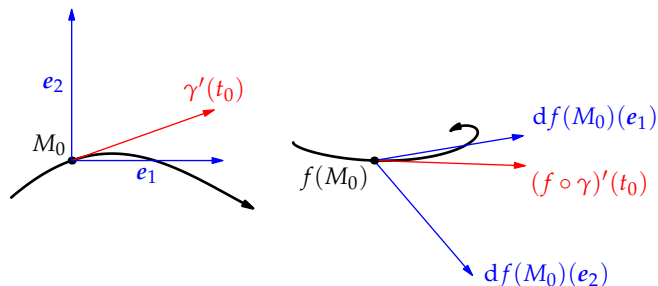
$$\forall t_0 \in I, \quad (f \circ \gamma)'(t_0) = [df(\gamma(t_0))](\gamma'(t_0)).$$

45.3 Si le vecteur $\gamma'(t_0) \in E$ n'est pas nul, alors il dirige la tangente au point $M_0 = \gamma(t_0)$ à la courbe paramétrée par γ .

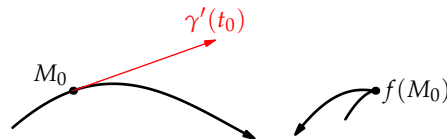
Si de plus il n'appartient pas au noyau de l'application linéaire tangente $df(M_0)$, alors son image

$$df(M_0)(\gamma'(t_0)) \in F$$

dirige la tangente au point $N_0 = f(M_0)$ à la courbe paramétrée par $f \circ \gamma$.



45.4 Si $\gamma'(t_0)$ appartient au noyau de $df(M_0)$, il se peut que la courbe paramétrée par $f \circ \gamma$ n'ait pas de tangente au point N_0 .

**46. Caractérisation des fonctions constantes**

Soit $f : U \rightarrow F$ et $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$, deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

46.1 Si $\gamma(0) = a \in U$ et $\gamma(1) = b \in U$, alors

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt.$$

46.2 → Soient U , un ouvert convexe et $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$. L'application f est constante si, et seulement si, l'application linéaire tangente $df(M)$ est l'application nulle pour tout $M \in U$.

46.3 Soit U , un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$. Si f et g sont deux applications différentiables sur U telles que

$$\forall M \in U, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{\partial g}{\partial x}(M) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{\partial g}{\partial y}(M),$$

alors $f - g$ est constante sur U .

IV.2 Vecteurs tangents

47. Soit X , une partie d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. On définit la notion de **vecteur tangent** en traçant des courbes sur X .

47.1 Un vecteur $v \in E$ est **tangent** à X au point $M_0 \in X$ lorsqu'il existe une fonction γ définie sur un voisinage I de 0 telle que

$$\forall t \in I, \quad \gamma(t) \in X, \quad \gamma(0) = M_0 \quad \text{et} \quad \gamma'(0) = v.$$

L'ensemble des vecteurs tangents à X au point M_0 est noté $T_{M_0}X$.

47.2 L'ensemble des vecteurs tangents à X au point M_0 est un **cône** : si le vecteur v est tangent à X au point M_0 , alors $\lambda \cdot v$ est tangent à X au point M_0 pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

47.3 En général, si X est une courbe (resp. une surface), alors l'ensemble des vecteurs tangents à X en un point $M_0 \in X$ est une droite (resp. un plan).

Dans certains cas néanmoins, l'ensemble des vecteurs tangents à X en un point M_0 n'est pas un sous-espace vectoriel. →[49.2]

48. → Condition nécessaire de tangence

Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction différentiable sur l'ouvert $U \in E$ et $M_0 \in U$, un point de l'ensemble

$$X = [f(M) = \lambda] \subset U.$$

Si le vecteur $v \in E$ est tangent à X au point M_0 , alors

$$df(M_0)(v) = 0.$$

Exemples

49. Vecteurs tangents à un arc paramétré

Soit (I, f) , un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$.

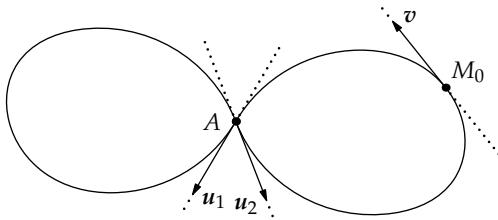
49.1 Les vecteurs proportionnels à $f'(t_0)$ sont tangents à la courbe Γ au point $M_0 = f(t_0)$.

49.2 Point double

S'il existe deux paramètres t_0 et t_1 tels que

$$M_0 = f(t_0) = f(t_1),$$

alors la courbe Γ peut avoir deux tangentes distinctes au point M_0 . Dans ce cas, l'ensemble des vecteurs tangents au point M_0 n'est pas un sous-espace vectoriel.



50. Plan affine

On considère un plan affine de $\mathbb{R}^3$:

$$X = [ax + by + cz = d].$$

50.1 La direction du plan affine X est le plan vectoriel

$$P = [ax + by + cz = 0].$$

50.2 Pour tout vecteur $v = (x_0, y_0, z_0) \in P$, la droite affine

$$M_0 + \mathbb{R} \cdot v$$

est contenue dans le plan X :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \gamma(t) = M_0 + t \cdot v \in X.$$

50.3 → En chaque point M_0 du plan X , l'ensemble $T_{M_0}X$ des vecteurs tangents est la direction de X .

51. Sphère

On considère une sphère d'un espace euclidien E :

$$X = \{M \in E : \|AM\| = r\}$$

de rayon $r > 0$ et un point $M_0 \in X$.

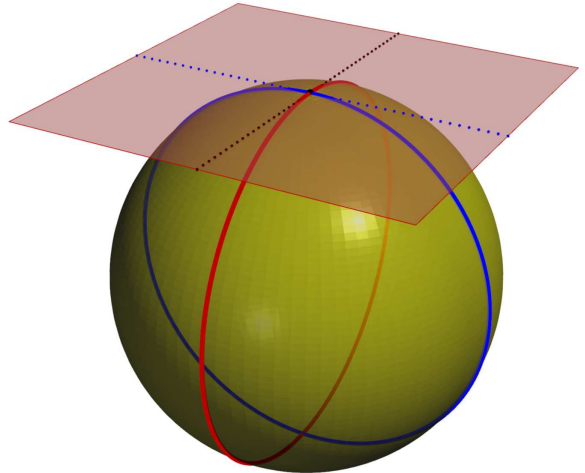
51.1 Pour tout vecteur u de norme r orthogonal au vecteur AM_0 et pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point

$$\gamma(t) = A + \cos \omega t \cdot AM_0 + \sin \omega t \cdot u$$

appartient à la sphère X .

51.2 → En chaque point $M_0 \in X$, l'ensemble $T_{M_0}X$ est l'hyperplan

$$(\mathbb{R} \cdot AM_0)^\perp.$$



52. Graphe d'une fonction

On considère le graphe d'une fonction $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$:

$$X = \{(x, y, g(x, y)), (x, y) \in U\} \subset \mathbb{R}^3$$

et un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de X .

52.1 Pour tout vecteur $v = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ assez proche de 0, le point

$$\gamma(t) = (x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta, g(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta))$$

appartient à X .

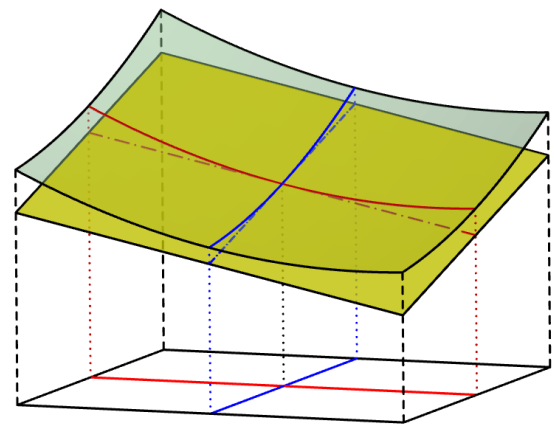
52.2 → En chaque point $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in X$, l'ensemble $T_{M_0}X$ est le plan

$$\text{Vect}\left(\left(1, 0, \frac{\partial g}{\partial x}(M_0)\right), \left(0, 1, \frac{\partial g}{\partial y}(M_0)\right)\right).$$

L'équation cartésienne

$$(x - x_0) \frac{\partial g}{\partial x}(M_0) + (y - y_0) \frac{\partial g}{\partial y}(M_0) - (z - z_0) = 0$$

représente le plan affine $M_0 + T_{M_0}X$.



IV.3 Lignes et surfaces de niveau

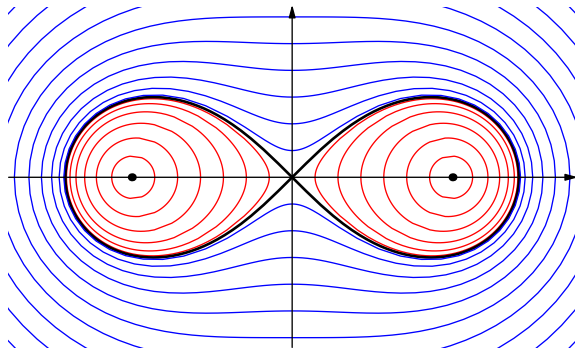
53. Soient Ω , un ouvert de l'espace $E = \mathbb{R}^d$ et $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, une application.

53.1 $\Rightarrow$ Les **lignes de niveau** (pour $d = 2$) ou les **surfaces de niveau** (pour $d \geq 3$) de g sont les parties de Ω définies par

$$[g(M) = \lambda]$$

lorsque λ parcourt $\mathbb{R}$.

53.2 Les lignes (ou surfaces) de niveau de g constituent une partition de Ω .



54. Hyperplan tangent [48]

Soient $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et

$$X = [g(M) = 0],$$

une ligne (ou une surface) de niveau de g .

54.1 $\Rightarrow$ Un point M_0 de la ligne (ou surface) de niveau X est dit **régulier** lorsque la forme linéaire $dg(M_0)$ est surjective.

54.2 Une forme linéaire sur $E = \mathbb{R}^d$ est surjective si, et seulement si, elle n'est pas identiquement nulle. Dans ce cas, son noyau est un hyperplan de E .

54.3 $\rightarrow$ (Admis)

Si $M_0 \in X$ et si la forme linéaire tangente $dg(M_0)$ est surjective, alors l'ensemble des vecteurs tangents à X au point M_0 est l'hyperplan

$$T_{M_0}X = \text{Ker } dg(M_0).$$

Interprétation euclidienne

55. On suppose que l'espace E est muni d'une structure euclidienne et on étudie les lignes (ou les surfaces) de niveau d'une fonction $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

55.1 Pour tout point M_0 de Ω ,

$$\forall v \in E, \quad dg(M_0)(v) = D_v g(M_0) = \langle \nabla g(M_0) | v \rangle.$$

55.2 La forme linéaire tangente $dg(M_0)$ est surjective si, et seulement si, le gradient de g en M_0 n'est pas nul.

$$\text{rg } dg(M_0) = 1 \iff \nabla g(M_0) \neq 0_E$$

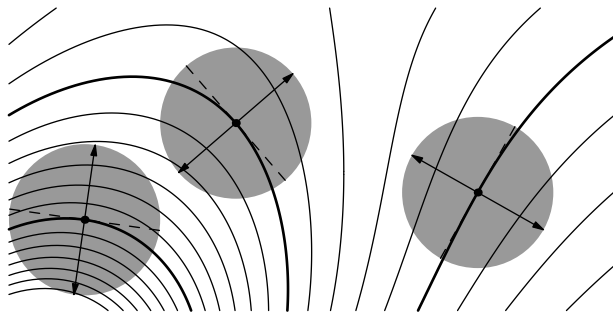
55.3 Soit M_0 , un point de la ligne (ou surface) de niveau

$$X_\alpha = [g(M) = \alpha].$$

Si $\nabla g(M_0) \neq 0_E$, alors [48] les vecteurs tangents à X_α au point M_0 sont orthogonaux au gradient $\nabla g(M_0)$ et plus précisément [54] l'hyperplan tangent à X_α en M_0 est l'orthogonal du gradient de g .

$$T_{M_0}X = (\mathbb{R} \cdot \nabla g(M_0))^\perp$$

55.4 En chacun de leurs points, les lignes (ou surfaces) de niveau de la fonction g sont orthogonales au gradient de g .



56. Ligne de plus grande pente

Soit $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

56.1 $\rightarrow$ Si h est unitaire, la dérivée de g en M_0 selon h

$$D_h g(M_0) = \langle \nabla g(M_0) | h \rangle$$

est maximale si, et seulement si, h est colinéaire à $\nabla g(M_0)$.

56.2 Dans la direction du gradient, la fonction g varie rapidement et les lignes de niveau de cette fonction sont très serrées.

56.3 Si le déplacement h est assez petit et orthogonal au gradient $\nabla g(M_0)$, alors la dérivée de g selon h est nulle :

$$g(M_0 + h) = g(M_0) + \langle \nabla g(M_0) | h \rangle + o(h) = g(M_0) + o(h).$$

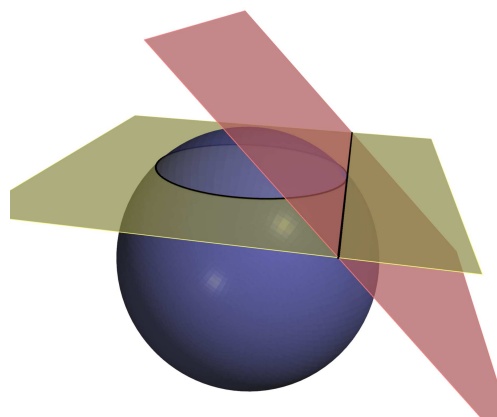
Par conséquent, dans une direction orthogonale au gradient, la fonction g varie très lentement.

IV.4 Intersections de deux surfaces

57. En général, l'intersection de deux plans est une droite et, de même, l'intersection de deux surfaces est une courbe.

58. Sphère et plan

On considère un cercle Γ défini comme l'intersection d'une sphère Σ et d'un plan Π .



58.1 Soit $M_0 \in \Gamma = \Sigma \cap \Pi$.

Comme tous les points de la sphère Σ sont réguliers [54.1], il existe un plan $T_{M_0}\Sigma$ tangent à la sphère au point M_0 . Comme Π est un plan affine, $\rightarrow$ [50]

$$\Pi = M_0 + T_{M_0}\Pi.$$

58.2 En général, $T_{M_0}\Sigma \neq \Pi$ et l'intersection des deux plans affines

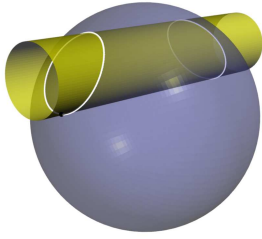
$$(M_0 + T_{M_0}\Sigma) \cap (M_0 + T_{M_0}\Pi)$$

est une droite, la tangente au cercle Γ au point M_0 .

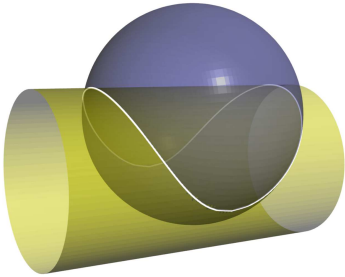
59. Sphère et cylindre

On considère la courbe Γ définie comme l'intersection d'une sphère Σ_1 et d'un cylindre de révolution Σ_2 .

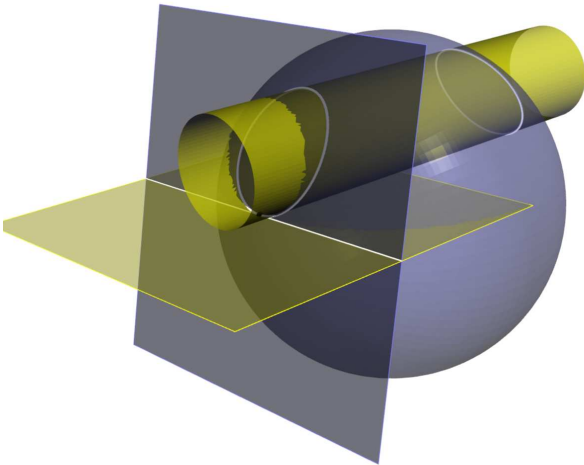
59.1 Si le rayon du cylindre est assez petit, la courbe Γ est en deux morceaux.



59.2 Si le rayon du cylindre est plus gros, la courbe n'a qu'une seule composante connexe.



59.3 En un point M_0 de Γ , la sphère Σ_1 et le cylindre Σ_2 admettent chacun un plan tangent et, en général, ces plans sont distincts. On dit alors que les deux surfaces sont *transverses*.



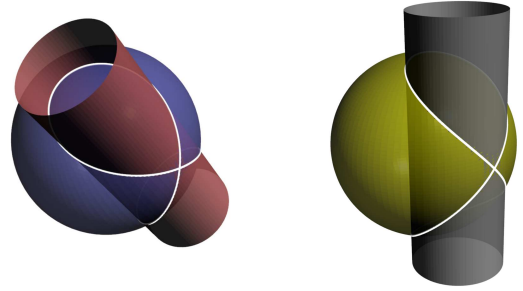
59.4 L'intersection des deux plans affines

$$(M_0 + T_{M_0}\Sigma_1) \cap (M_0 + T_{M_0}\Sigma_2)$$

est alors une droite, qui est la tangente à la courbe Γ en M_0 .

59.5 La fenêtre de Viviani

Lorsque le cylindre est tangent à la sphère, la courbe Γ est assez particulière.



En un point de cette courbe, la sphère et le cylindre ont le même plan tangent :

$$M_0 + T_{M_0}\Sigma_1 = M_0 + T_{M_0}\Sigma_2.$$

L'intersection des deux plans affines n'est donc pas une droite et on constate qu'en ce point particulier, la courbe admet *deux* tangentes.

Tangentes à une courbe

60. On considère une courbe Γ de l'espace $\mathbb{R}^3$, intersection de deux surfaces Σ_1 et Σ_2 définies comme des surfaces de niveau

$$\Sigma_1 = [g_1(M) = 0] \quad \text{et} \quad \Sigma_2 = [g_2(M) = 0]$$

où les fonctions numériques g_1 et g_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$.

On s'intéresse à l'allure locale de cette courbe Γ et en particulier aux vecteurs tangents à Γ en un point donné M_0 .

61. La fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall M \in U, \quad f(M) = (g_1(M), g_2(M))$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et, en tout point M de U ,

$$\forall h \in \mathbb{R}^3, \quad df(M)(h) = (dg_1(M)(h), dg_2(M)(h)).$$

62. On suppose que M_0 est un point régulier [54.1] pour Σ_1 et pour Σ_2 : les formes linéaires $dg_1(M_0)$ et $dg_2(M_0)$ sont surjectives.

62.1 Comme les formes linéaires $dg_1(M_0)$ et $dg_2(M_0)$ ne sont pas identiquement nulles, l'application linéaire tangente

$$df(M_0) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

n'est pas identiquement nulle. Son rang est donc égal à 1 ou à 2.

62.2 Le rang de $df(M_0)$ est égal à 1 si, et seulement si, les deux formes linéaires $dg_1(M_0)$ et $dg_2(M_0)$ sont proportionnelles, c'est-à-dire si

$$T_{M_0}\Sigma_1 = T_{M_0}\Sigma_2.$$

Autrement dit, l'application linéaire tangente $df(M_0)$ est surjective si, et seulement si, les plans tangents $T_{M_0}\Sigma_1$ et $T_{M_0}\Sigma_2$ sont distincts : on dit dans ce cas que les deux surfaces Σ_1 et Σ_2 sont *transverses*.

62.3 Si les deux plans tangents $T_{M_0}\Sigma_1$ et $T_{M_0}\Sigma_2$ sont distincts, alors le noyau de l'application linéaire tangente $df(M_0)$ est une droite vectorielle :

$$\text{Ker } df(M_0) = (T_{M_0}\Sigma_1) \cap (T_{M_0}\Sigma_2).$$

Tous les vecteurs de cette droite sont des vecteurs tangents en M_0 à la courbe Γ .

63. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$.

63.1 $\nRightarrow$ Un point M_0 de la ligne de niveau

$$X = [f(M) = (0, 0)]$$

est **régulier*** si, et seulement si, l'application linéaire tangente

$$df(M_0) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

est surjective.

63.2 * Si M_0 est un point régulier de la ligne de niveau

$$X = [f(M) = 0],$$

alors l'ensemble des vecteurs tangents à X en M_0 est une droite vectorielle :

$$T_{M_0}\Gamma = \text{Ker } df(M_0),$$

ce qui permet de considérer X comme une courbe.

64. Interprétation euclidienne

Si on munit $\mathbb{R}^3$ d'une structure euclidienne, on peut traduire ce qui précède en termes de gradient.

64.1 Les plans tangents $T_{M_0}\Sigma_1$ et $T_{M_0}\Sigma_2$ sont distincts si, et seulement si, les vecteurs $\nabla g_1(M_0)$ et $\nabla g_2(M_0)$ ne sont pas colinéaires.

64.2 Dans ce cas, la droite $\text{Ker } df(M_0) = T_{M_0}\Sigma_1 \cap T_{M_0}\Sigma_2$ est dirigée par le vecteur

$$\nabla g_1(M_0) \wedge \nabla g_2(M_0).$$

Entraînement

65. Suite de [52.2] –

1. Le plan tangent à Σ est horizontal si, et seulement si, le gradient de f est nul.

2. Ce plan tangent peut-il être vertical ?

66. Une courbe plane Γ est représentée d'une part comme une ligne de niveau d'une fonction différentiable $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et d'autre part comme l'image d'un arc paramétré (I, γ) où γ est une fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}^2$.

$$\Gamma = [F(x, y) = 0] = \{\gamma(t), t \in I\}.$$

On suppose que $(x_0, y_0) = \gamma(t_0)$ et que $F(x_0, y_0) = 0$. Comparer $\gamma'(t_0)$ et les dérivées partielles $F_x(x_0, y_0)$ et $F_y(x_0, y_0)$.

67. Exemples de points stationnaires

67.1 L'arc paramétré défini par

$$f(t) = \left(t^2 + \frac{2}{t}, t^2 + \frac{1}{t^2}\right)$$

admet un point stationnaire pour $t = 1$.

67.2 La *cissoïde de Dioclès*, paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \left(\frac{t^3}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}\right)$$

admet $O = f(0)$ pour seul point stationnaire.

67.3 La *tractrice*, paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \left(t - \text{th } t, \frac{1}{\text{ch } t}\right)$$

admet $M_0 = f(0)$ pour seul point stationnaire.

67.4 La *cycloïde*, paramétrée par

$$\forall t \in [0, 2\pi], \quad f(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

admet $M_0 = f(0)$ et $M_{2\pi} = f(2\pi)$ pour seuls points stationnaires.

67.5 La *néphroïde* paramétrée par

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \quad f(t) = (3 \sin t - \sin 3t, 3 \cos t - \cos 3t)$$

admet $M_{-\pi} = f(-\pi)$, $M_0 = f(0)$ et $M_\pi = f(\pi)$ pour seuls points stationnaires.

68. Calculs de tangentes

Pour calculer la tangente au point $M_0 = f(t_0)$, il est parfois plus efficace de calculer le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de t_0 de chacune des composantes de f que de dériver ces composantes.

68.1 Calculer la tangente à l'arc paramétré par

$$f(t) = \left(\frac{t}{1-t^2}, \frac{t^2}{1-t^2}\right)$$

au point $f(0)$.

68.2 L'arc paramétré par

$$\forall t \in]-\pi, \pi[, \quad f(t) = (\tan^4 t + \cos t, 1 - \sin t)$$

admet $f(\pi/2)$ pour point stationnaire. Calculer la tangente au point $f(0)$.

68.3 Calculer la tangente à l'*astroïde* paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$$

au point $M_0 = f(\pi/4)$.

68.4 Calculer les tangentes au *folium*, paramétré par

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right)$$

aux points $M_0 = f(0)$ et $M_1 = f(1)$.

68.5 Calculer les tangentes à la *lemniscate*, paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4}\right)$$

aux points $M_{-1} = f(-1)$, $M_0 = f(0)$ et $M_1 = f(1)$.

68.6 Calculer les tangentes à la *strophoïde*, paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \left(\frac{t(t^2-1)}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\right)$$

aux points $M_{-1} = f(-1)$, $M_0 = f(0)$ et $M_1 = f(1)$.

68.7 L'arc paramétré défini par

$$f(t) = \left(\frac{t^3}{1-t^2}, \frac{t-2}{1-t^2}\right)$$

est un arc régulier. Calculer sa tangente au point $M_0 = f(0)$.

69. Représentation implicite de la lemniscate

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = -x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)^2.$$

69.1 Comme $f(x, y) \geq f(x, 0)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la fonction f atteint son minimum global en $(\pm\sqrt{2}/2, 0)$.

69.2 Pour $\lambda \leq -1/4$, les lignes de niveau

$$C_\lambda = [f(x, y) = \lambda]$$

ne sont pas des courbes.

69.3 Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la ligne de niveau C_λ admet les deux axes de coordonnées pour axes de symétrie.

69.4 La *lemniscate* est la ligne de niveau C_0 .

1. L'origine $O = (0, 0)$ appartient à C_0 , mais n'est pas un point régulier de cette courbe [54.1]. Les vecteurs $(1, 1)$ et $(1, -1)$ sont tangents à C_0 en O . $\rightarrow$ [53.2]

2. Le point $M_0 = (1, 0)$ appartient à C_0 . La tangente à C_0 en M_0 est une droite verticale.

70. Plan tangent à un cône

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

et la surface de niveau

$$X = [f(x, y, z) = 0].$$

70.1 Un point $M = (x, y, z)$ appartient à X si, et seulement si, il existe un réel $r \in \mathbb{R}$ et un angle $\theta \in [-\pi, \pi]$ tels que

$$(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r).$$

70.2 Soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in X$. Si $z_0 \neq 0$, alors le vecteur

$$v = (x, y, z)$$

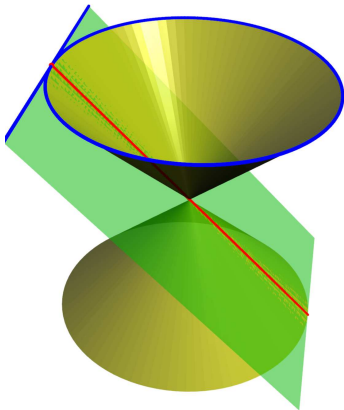
est tangent à X au point M_0 si, et seulement si,

$$x_0 x + y_0 y - z_0 z = 0.$$

L'ensemble des vecteurs tangents à X en M_0 est donc le sous-espace

$$\text{Vect}(OM_0, (y_0, -x_0, 0)).$$

70.3 L'origine est un point singulier [54.1] de X .



71. Plan tangent à une quadrique

On pourra retrouver l'allure des surfaces suivantes au [21.3].

71.1 Le plan tangent en $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ au graphe de

$$f = [(x, y) \mapsto -17x^2 + 14xy - y^2 + 8x + 8y + 16]$$

est horizontal si, et seulement si, $(x_0, y_0, z_0) = (-1, -3, 0)$.

La fonction f prend des valeurs supérieures à $f(x_0, y_0)$ et des valeurs inférieures à $f(x_0, y_0)$: elle n'a ni minimum, ni maximum.

71.2 Le plan tangent en M_0 au graphe de la fonction

$$f = [(x, y) \mapsto 13x^2 - 14xy + 5y^2 + 14x - 10y + 5]$$

est horizontal si, et seulement si, $M_0 = (0, 1, 0)$. Quels que soient les réels h_x et h_y ,

$$f(h_x, 1 + h_y) = (h_x \quad h_y) \begin{pmatrix} 13 & -7 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} \geq f(0, 1)$$

donc $f(0, 1)$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}^2$.

71.3 Le plan tangent en $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ au graphe de

$$f = [(x, y) \mapsto 9x^2 - 6xy + y^2 - 12x + 4y + 5]$$

est horizontal si, et seulement si, $y_0 = 3x_0 - 2$.

Quels que soient les réels h_x et h_y ,

$$f(1 + h_x, 1 + h_y) = 1 + (h_x \quad h_y) \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}$$

donc le minimum de f sur $\mathbb{R}^2$ est égal à 1.

72. Suite de [18.132] – On rappelle que $SL_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le déterminant est égal à 1. La matrice I_n appartient à $SL_n(\mathbb{R})$ et le sous-espace tangent à $SL_n(\mathbb{R})$ en I_n est dirigé par l'hyperplan des matrices de trace nulle.

V

Recherche d'extrema sous contrainte

73. On s'intéresse aux extrema d'une fonction numérique

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}$$

définie sur une partie X d'un espace vectoriel E de dimension finie.

73.1 On suppose dans ce qui suit que la fonction f est différentiable sur un ouvert U de E qui contient l'ensemble X .

73.2 Le calcul différentiel ne permet de mener l'étude de la fonction f qu'au voisinage d'un point donné. On peut ainsi espérer localiser des extrema locaux, mais l'étude des extrema globaux nécessite de recourir à d'autres méthodes.

74. $\rightarrow$ Si la restriction de f à X passe par un extremum en un point M_0 de la partie X , alors

$$\forall v \in T_{M_0}X, \quad df(M_0)(v) = 0.$$

75. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction différentiable.

75.1 On considère la surface de niveau

$$X = [g(M) = 0]$$

d'une fonction $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ comme une **contrainte** sur la fonction f , au sens où on étudie la restriction de f à X .

En général, la surface X est une partie d'intérieur vide, ce qui nous empêche d'appliquer [15.3].

75.2 $\rightarrow$ **Optimisation sous contrainte (condition nécessaire)**

Si la restriction de f à X atteint un extremum local en un point régulier [54.1] M_0 de X :

$$dg(M_0) \neq 0,$$

alors la forme linéaire $df(M_0)$ est proportionnelle à la forme linéaire $dg(M_0)$ et [54.3]

$$T_{M_0}X = \text{Ker } dg(M_0) \subset \text{Ker } df(M_0).$$

75.3 Interprétation euclidienne

Supposons que E soit muni d'une structure euclidienne.

Si la restriction de f à la surface X atteint un extremum local en un point M_0 de X tel que $\nabla g(M_0) \neq 0$, alors le gradient $\nabla f(M_0)$ de la fonction est colinéaire au gradient $\nabla g(M_0)$ de la contrainte.

Entraînement

76. On considère les fonctions f et g définies par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = xy \quad \text{et} \quad g(x, y) = x^2 + y^2.$$

Déterminer les extrema de f sous la contrainte $\Gamma = [g(x, y) = 1]$, puis les extrema de g sous la contrainte $\Phi = [f(x, y) = 1]$.

L'utilisation du Théorème [75.2] est-elle pertinente ?

77. Déterminer les extrema de la fonction f sous la contrainte $[g(x, y) = 0]$ dans les cas suivants.

77.1 $f(x, y) = xy, g(x, y) = x^2 + y^2 - x - y$

77.2 $f(x, y) = \ln(x - y), g(x, y) = x^2 + y^2 - 2$

77.3 $f(x, y) = x^2 + y^2, g(x, y) = 4x^2 - 16y^2 - 1$

78. Suite de [35.3] – Sous la contrainte $[x + y + z = 1]$, la fonction g n'admet qu'un seul point critique et n'a pas d'extremum global.

79. L'application f définie par

$$\forall (x, y) \neq (0, 0), \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

La fonction f atteint un maximum et un minimum sur l'ensemble

$$D = [x^2 + y^2 \leq 2],$$

respectivement égaux à $1/2$ et à 0 .

80. Déterminer les points les plus éloignés de l'origine (pour la distance euclidienne canonique) de l'ensemble

$$\mathcal{E} = [3x^2 + 3y^2 - 2xy \leq 1].$$

81. On considère les fonctions f et g définies par

$$f(x, y) = 4x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad g(x, y) = x^2 + y^2.$$

81.1 Déterminer les extrema de la fonction f sous la contrainte $[g(x, y) \leq 4]$.

81.2 Déterminer les extrema de la fonction g sous la contrainte $[f(x, y) \leq 1]$.

82. On doit fabriquer des canettes cylindriques en aluminium de volume V_0 imposé. Quelles doivent être les dimensions des canettes pour minimiser la quantité d'aluminium utilisé?

83. Soient $1 < p \leq q$. Étudier le maximum de la fonction

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k^p$$

définie sur $(\mathbb{R}_+)^n$ et soumise à la contrainte

$$\sum_{k=1}^n x_k^q = 1.$$

84. Méthode du lagrangien (condition suffisante)

Soit U , un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On considère deux fonctions

$$f : U \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : U \rightarrow \mathbb{R}$$

de classe $\mathcal{C}^2$ et on étudie la fonction f sous la contrainte

$$X = [g(M) = 0]$$

en supposant que la forme linéaire $dg(M)$ est surjective en chaque point de X .

84.1 Le lagrangien est la fonction $\mathcal{L} : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y, \lambda) \in U \times \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y).$$

84.2 Si le point $M_0 = (x_0, y_0) \in X$ et le réel λ_0 vérifient

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(M_0) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(M_0) = g(M_0) = 0,$$

alors $df(M_0) = \lambda_0 \cdot dg(M_0)$.

84.3 On définit alors la fonction $\mathcal{L}_0 : U \rightarrow \mathbb{R}$ en posant

$$\forall (x, y) \in U, \quad \mathcal{L}_0(x, y) = f(x, y) - \lambda_0 \cdot g(x, y).$$

1. Pour tout point $M \in X$, le réel $f(M)$ est égal à $\mathcal{L}_0(M)$.
2. Si la hessienne de $\mathcal{L}_0$ est définie positive (resp. définie négative) en M_0 , alors, sous la contrainte X , la fonction f atteint un minimum local strict (resp. un maximum local strict) en M_0 .
3. Si la restriction de la hessienne $H_{\mathcal{L}_0}(M_0)$ au sous-espace $\text{Ker } dg(M_0)$ est définie positive (resp. définie négative), alors, sous la contrainte X , la fonction f atteint un minimum local strict (resp. un maximum local strict) en M_0 .

Questions, exercices & problèmes

Perfectionnement

85. Questions pour réfléchir

1. Suite de [3] – Pourquoi ne peut-on définir le sens de variation d'une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$?
2. On suppose que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ atteint un extremum en un point $M_0 \in \Omega$ qui n'est pas un point critique de f . Que peut-on en déduire?
3. Soit f , une fonction continue sur un compact K . Condition pour que les extrema soient atteints sur la frontière de K .
4. Suite de [21.5] – Exemple d'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que $rt - s^2 = 0$ et :
 - 4.a admettant un maximum local en M_0 ?
 - 4.b admettant un minimum local en M_0 ?
 - 4.c n'admettant pas d'extremum local en M_0 ?
5. On suppose que $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$ est une application telle que $df(M)$ soit l'application nulle pour tout $M \in U$. Alors l'application f est **localement constante** au sens où, pour tout $M_0 \in U$,

$$\exists V \in \mathcal{V}(M_0), \exists u \in F, \quad \forall M \in V, \quad f(M) = u.$$

L'application f est-elle constante? Et si on suppose que U est connexe par arcs?

86. Étudier les extrema sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction définie par

$$f(x, y) = x^2 + (y^2 - y)^2.$$

87. La fonction polynomiale f définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 y^2 - y^2$$

possède sept points critiques :

$$P_0 = (0, 0), \quad P_{1,2,3,4} = (\pm \sqrt{1/3}, \pm \sqrt{2/3}), \quad P_{5,6} = (0, \pm \sqrt{1/2}).$$

La fonction f atteint un minimum local aux points P_1, P_2, P_3 et P_4 ; les points P_0, P_5 et P_6 sont des points selles.

Pour tout $r \geq 0$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) \geq \frac{r^4}{4} - r^2.$$

La fonction f n'a donc pas de maximum global, mais un minimum global, égal à $-1/3$.

88. La fonction f définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x^2 - y^2) \exp[-(x^2 + y^2)]$$

possède cinq points critiques. Elle atteint un maximum global en $(\pm 1, 0)$; un minimum global en $(0, \pm 1)$; le dernier point critique est un point selle.

89. Soit $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. La fonction f définie par

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = y(x^2 + \ln^2 y)$$

n'est pas majorée, mais elle atteint un minimum global. Elle admet deux points critiques : $(0, 1)$ et $(0, e^{-2})$.

90. Fonctions strictement convexes

On considère ici une fonction convexe f et on étudie le cas d'égalité :

$$\sum_{k=1}^n t_k f(x_k) = f\left(\sum_{k=1}^n t_k x_k\right)$$

en supposant que les réels t_k sont tous strictement positifs.

90.1 Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **strictement convexe** lorsque, quels que soient y et z dans I ,

$$\forall 0 < t < 1, \quad f((1-t)y + tz) < (1-t)f(y) + tf(z).$$

90.2 Version analytique

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle ouvert I et que $y < z$ sont deux points de I . Si $f''(u) > 0$ sur $[y, z]$, alors l'étude des variations de la fonction

$$\varphi = [t \mapsto f((1-t)y + tz) - (1-t)f(y) - tf(z)]$$

montre que $\varphi(t) > 0$ pour tout $0 < t < 1$.

90.3 Version géométrique

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe et s'il existe $0 < t_0 < 1$ tel que

$$f((1-t_0)y + t_0z) = (1-t_0)f(y) + t_0f(z),$$

alors

$$\forall 0 < t < 1, \quad f((1-t)y + tz) = (1-t)f(y) + tf(z).$$

En particulier, si $y < z$, alors la restriction de f à $[y, z]$ est affine et si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I , on retrouve le résultat établi ci-dessus.

90.4 Convexité et cas d'égalité

Soit f , une fonction strictement convexe sur l'intervalle I . On considère des réels strictement positifs $t_1, \dots, t_n$ tels que

$$\sum_{k=1}^n t_k = 1$$

et des réels $x_1, \dots, x_n$ dans I tels que

$$\sum_{k=1}^n t_k f(x_k) = f\left(\sum_{k=1}^n t_k x_k\right).$$

Si les réels $x_1, \dots, x_n$ ne sont pas tous égaux, alors on peut supposer que

$$x_1 \leq \dots \leq x_r < m < x_{r+1} \leq \dots \leq x_n$$

et en déduire que

$$f\left(\sum_{k=1}^n t_k x_k\right) < (1-s)f\left(\sum_{k=1}^r \frac{t_k x_k}{1-s}\right) + sf\left(\sum_{k=r+1}^n \frac{t_k x_k}{s}\right)$$

où $s = t_{r+1} + \dots + t_n = 1 - (t_1 + \dots + t_r)$.

On retrouve ainsi le résultat établi en [31].

91. Homographies et similitudes

On considère la fonction f définie par

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-2\}, \quad f(z) = \frac{2z+1}{z+2}$$

comme une fonction de $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-2, 0)\}$ dans $\mathbb{R}^2$:

$$\forall (x, y) \in U, \quad \varphi(x, y) = (\Re f(x+iy), \Im f(x+iy)).$$

La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U . Pour tout point $M \in U$, comme il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\text{Jac } \varphi(M) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ et une matrice orthogonale $P \in O_2(\mathbb{R})$ tels que $\text{Jac } \varphi(M) = \lambda P$.

92. Image d'un arc paramétré par une fonction $\mathcal{C}^1$

On suppose que $f : U \rightarrow F$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ et que, pour tout $M_0 \in U$, l'application linéaire tangente $df(M_0)$ est un isomorphisme de E sur F .

On suppose que les deux supports Γ_1 et Γ_2 de deux arcs paramétrés (I_1, γ_1) et (I_2, γ_2) ont un point commun

$$M_0 = \gamma_1(s_1) = \gamma_2(t_2).$$

1. Définir l'angle formé par les deux courbes Γ_1 et Γ_2 au point M_0 .
2. Comparer cet angle avec l'angle formé par $f_*(\Gamma_1)$ et $f_*(\Gamma_2)$ en $P_0 = f(M_0)$.
3. Étudier le cas où $df(M_0)$ est une similitude.

Approfondissement

93. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'espace $\mathbb{R}^d$ est muni de sa structure euclidienne canonique et, pour tout vecteur x , on note Ax , l'image de x par l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A .

93.1 La fonction $g = [x \mapsto \|x\|^2]$ n'a pas de point critique sur la sphère unité $\Sigma = [\|x\| = 1]$ [54.1].

93.2 Pour tout $x \in E$, on pose

$$\varphi(x) = \langle x | A^\top \cdot Ax \rangle.$$

Restreinte à la sphère unité Σ , l'application φ atteint un maximum en un vecteur x_0 qui est un vecteur propre de $A^\top \cdot A$:

$$A^\top \cdot Ax_0 = \|Ax_0\|^2 x_0.$$

93.3 On suppose que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et, pour tout $x \in E$, on pose

$$\psi(x) = \langle x | Ax \rangle.$$

Restreinte à la sphère unité Σ , l'application ψ atteint un maximum en un vecteur x_0 qui est un vecteur propre de A :

→[16.33.1]

$$Ax_0 = \langle Ax_0 | x_0 \rangle x_0.$$

94. Fonction de Leibniz

Soient n points $A_1, \dots, A_n$ d'un espace euclidien et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, une famille de réels. On pose $\sigma = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

1. Si $\sigma \neq 0$, la fonction f définie par

$$\forall M \in E, \quad f(M) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \|A_k M\|^2$$

atteint un extremum global au point $G = \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_n A_n$.

2. Étudier le cas $\sigma = 0$.

95. Théorème de Lax-Milgram

On suppose que E est un espace euclidien.

On choisit un vecteur $u \in E$ et un endomorphisme $f \in \mathcal{S}(E)$ dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

95.1 L'application g définie par

$$\forall x \in E, \quad g(x) = \frac{1}{2} \langle f(x) | x \rangle - \langle u | x \rangle$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ sur E et pour tout $x_0 \in E$,

$$\nabla g(x_0) = f(x_0) - u \quad \text{et} \quad \nabla^2(g)(x_0) = f.$$

L'unique point critique de g est $x_0 = f^{-1}(u)$.

95.2 Pour tout vecteur $h \in E$ non nul,

$$g(x_0 + h) = g(x_0) + \frac{1}{2} \langle f(h) | h \rangle > g(x_0)$$

donc $g(x_0)$ est un minimum global strict.

96. Soient $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Exprimer, en fonction de $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le gradient $\nabla f(X_0)$ et la hessienne $H_f(X_0)$ de la fonction f définie par

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad f(X) = \|AX - B\|^2$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

97. La fonction f définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + z^2)e^{x(y^2 + z^2 + 1)} \geq xe^x$$

admet $M_0 = (-1, 0, 0)$ pour seul point critique. Elle atteint son minimum absolu en ce point.

98. La fonction définie par $f(x, y) = xe^y + ye^x$ admet le point $(-1, -1)$ pour seul point critique. Elle ne passe pas par un extremum local en ce point.

99. L'origine est le seul point critique de la fonction

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_n^2 + (1 + x_n)^3 \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2$$

et f atteint un minimum local strict en ce point. En revanche, cette fonction n'a pas de minimum global.

100. Polynômes de Hermite

Si la fonction f définie sur l'ouvert

$$U = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$$

par

$$f(x) = \sum_{k=1}^n x_k^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \ell_n |x_i - x_j|.$$

atteint un minimum local au point $x_0 = (r_1, \dots, r_n) \in U$, alors on pose

$$H_n(t) = \prod_{i=1}^n (t - r_i).$$

Comme $H_n''(r_i) - 2r_i H_n'(r_i) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$, la fonction H_n est une solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) - 2tx'(t) + 2nx(t) = 0.$$

101. Soit $K = [0, 1] \times [0, 1]$.

1. Étudier la continuité de la fonction $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ y(1-x) & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Peut-on en conclure à l'existence d'un maximum et d'un minimum de f ?

2. Calculer le minimum et le maximum de f à l'aide de la méthode des crêtes. Comment trouver les extrema de f en cherchant ses points critiques?

Fonctions implicites

102. Soit F , une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^{d+1}$ dans $\mathbb{R}$.

102.1 Soit $M_0 = (x_1^0, \dots, x_d^0, x_{d+1}^0)$, un point de l'hypersurface $X = [F(M) = 0]$. Si

$$\frac{\partial F}{\partial x_{d+1}}(M_0) \neq 0,$$

alors le **théorème des fonctions implicites** affirme qu'il existe un voisinage

$$\mathcal{V}_{d+1} = \mathcal{V}_d \times]x_{d+1}^0 - \alpha, x_{d+1}^0 + \alpha[$$

du point M_0 dans $\mathbb{R}^{d+1}$ avec

$$\mathcal{V}_d =]x_1^0 - \alpha, x_1^0 + \alpha[\times \dots \times]x_d^0 - \alpha, x_d^0 + \alpha[$$

et une fonction $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{V}_d$, tels que l'hypersurface X puisse être représentée comme le graphe de la fonction g au voisinage de M_0 .

$$\left\{ (x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) \in \mathcal{V}_{d+1} \right\} \iff \left\{ (x_1, \dots, x_d) \in \mathcal{V}_d \right\}$$

$$\left\{ F(x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) = 0 \right\} \iff \left\{ x_{d+1} = g(x_1, \dots, x_d) \right\}$$

On dit alors que l'équation $F(x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) = 0$ définit implicitement x_{d+1} comme une fonction des variables $x_1, \dots, x_d$: il est en général impossible de donner une expression simple de la fonction g .

102.2 On suppose que $y = g(x)$ sur la courbe $[F(x, y) = 0]$ au sens où

$$F(x, g(x)) = 0$$

sur un voisinage de x_0 . Alors

$$g'(x) = \frac{-F_x(x, g(x))}{F_y(x, g(x))}$$

pour tout x voisin de x_0 .

102.3 On suppose que $z = g(x, y)$ sur la surface $[F(x, y, z) = 0]$. Exprimer les dérivées partielles de g en fonction des dérivées partielles de F .

103. Soient $F = (F_1, \dots, F_p) : \mathbb{R}^{n+p} \rightarrow \mathbb{R}^p$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$M_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, x_{n+1}^0, \dots, x_{n+p}^0),$$

un point de l'hypersurface $X = [F(M) = 0]$.

103.1 Si la matrice carrée (extraite de la jacobienne de F au point M_0)

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(M_0) \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ n+1 \leq j \leq n+p}} \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$$

est inversible, alors le **théorème des fonctions implicites** affirme qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}_n$ du point

$$M'_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$$

dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage $\mathcal{V}_p$ du point

$$M''_0 = (x_{n+1}^0, \dots, x_{n+p}^0)$$

dans $\mathbb{R}^p$ et une fonction $g : \mathcal{V}_n \rightarrow \mathcal{V}_p$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que X puisse être localement représentée comme le graphe de la fonction g .

$$\left\{ \begin{array}{l} M' \in \mathcal{V}_n \\ M'' \in \mathcal{V}_p \\ F(M', M'') = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} M' \in \mathcal{V}_n \\ M'' = g(M') \end{array} \right\}$$

103.2 En particulier, si $F = (F_1, F_2) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, alors la ligne de niveau $X = [F(M) = 0]$ peut être vue localement comme l'intersection des deux surfaces

$$\Sigma_1 = [F_1(M) = 0] \quad \text{et} \quad \Sigma_2 = [F_2(M) = 0].$$

Si en un point $M_0 \in X$ les dérivées partielles

$$\frac{\partial F_1}{\partial z}(M_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial F_2}{\partial z}(M_0)$$

ne sont pas nulles, alors X peut être vue localement comme l'intersection des deux surfaces

$$[z = g_1(x, y)] \quad \text{et} \quad [z = g_2(x, y)].$$

Si de plus la matrice

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{\partial F_1}{\partial y}(M_0) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(M_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}(M_0) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(M_0) \end{array} \right)$$

est inversible, alors X peut être vue localement comme une courbe paramétrée :

$$(y, z) = (f_1(x), f_2(x)).$$

103.3 On suppose que $y = f_1(x)$ et $z = f_2(x)$ sur la courbe

$$[F_1(x, y, z) = 0] \cap [F_2(x, y, z) = 0].$$

Exprimer les dérivées de f_1 et f_2 en fonction des dérivées partielles de F_1 et de F_2 .