# Fonctions de la variable réelle : énoncés

## Exercices CCP

**1)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^\infty$, $n$ un entier naturel non nul, $x_1$, $x_2, \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts. On suppose que $f(x_i) = f'(x_i) = 0$ pour tout $i$ compris entre 1 et $n$. Quelle est le plus grand entier $N$ pour lequel il existe à coup sûr un réel $c$ tel que $f^{(N)}(c) = 0$ (on pourra commencer par étudier les cas $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$).

**2)** Soit $f :\ [a, +\infty[ \to \mathbb{R}$ convexe croissante non constante. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

**3)** Étudier les variations et tracer les graphes des applications définies par les expressions suivantes :

a) $f_1(x) = x \exp\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)$ b) $f_2(x) = \dfrac{x^2 e^{1/x}}{x+1}$ c) $f_3(x) = x^2 e^{1/x} - x^2 - x$

d) $f_4(x) = e^{-1/x} \operatorname{Arctan}\sqrt{x^2+x+1}$ e) $f_5(x) = (1+x)^{1+\frac{1}{\ln x}}$

**4)** Calculer un développement limité des fonctions suivantes en 0 :

a) $x^2 \operatorname{cotan}^2 x$ (ordre 6) b) $\ln \dfrac{\tan x}{x}$ (ordre 6) c) $\dfrac{\operatorname{Arcsin}\sqrt{x}}{\sqrt{x(1+x)}}$ (ordre 3) d) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$ (ordre 4)

**5)** Calculer les limites des expressions suivantes en 0 :

a) $\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\operatorname{th} x} - \dfrac{1}{\tan x}\right)$ b) $\dfrac{x^{\sin x} - \sin^x x}{x^{\operatorname{sh} x} - \operatorname{sh}^x x}$ c) $\dfrac{\sin(\ln(x+1)) - \sqrt{\left|\ln\left(\sin\frac{\pi(x+1)}{2}\right)\right|}}{x}$ d) $\dfrac{2(1-\cos x)\sin x - x^3\sqrt[4]{1-x^2}}{\sin^5 x - x^5}$

**6)** Soit $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, on note $P$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de $f$ aux points d'abscisses $a - h$, $a$ et $a + h$ et $T_a(2, h)$ la dérivée seconde de ce polynôme. Montrer que si $f$ est deux fois dérivable en $a$, $T_a(2, h)$ converge vers $f''(a)$ quand $h$ tend vers 0. Donner l'ordre de grandeur de l'erreur $|T_a(2, h) - f''(a)|$ quand $f$ est de classe $C^4$.

## Exercices Mines-Centrale

**7)** Soit $f :\ [0, 1] \to [0, 1]$ continue telle que $f(0) = 0$ et $f(x) < x$ si $x \in ]0, 1]$. Montrer que les suites récurrentes définies par : $u_0 \in ]0, 1]$ et $\forall n,\ u_{n+1} = f(u_n)$ décroissent vers 0.

**8)** Montrer qu'une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$ et à valeur dans $\mathbb{R}$ est monotone si et seulement si elle l'est au voisinage de chaque point de $I$, c'est-à-dire si pour tout $x \in I$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f$ soit monotone sur $I \cap [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$.

**9)** Soit $f : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$. Montrer que si $f$ est croissante et si $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante, alors $f$ est continue.

**10) Inégalités de convexité :**

a) Inégalité de Hölder

Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, on a $\displaystyle\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i} \le \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$.

En déduire :

$$\forall p,q>1, \forall u,v>0,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Longrightarrow uv \leq \frac{u^p}{p}+\frac{v^q}{q}$$

$$\forall p,q>1,\ \forall a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n>0,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Longrightarrow \sum_{i=1}^n a_ib_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}$$

On pourra poser $\alpha=\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}$ et $\beta=\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}$ et appliquer la première inégalité avec $u=\dfrac{a_i}{\alpha}$ et $v=\dfrac{b_i}{\beta}$.

b) Inégalité de Minkowski

En déduire que pour $n\in\mathbb{N}^*$, $p\in\,]1,+\infty[$ et $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n>0$ on a :

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p}$$

On pourra écrire $(a_i+b_i)^p=a_i(a_i+b_i)^{p-1}+b_i(a_i+b_i)^{p-1}$.

**11)** a) Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille non vide d'applications convexes définies sur un intervalle $J$. On suppose que pour tout $x$ de $J$, la famille $(f_i(x))_{i\in I}$ est bornée. Montrer que l'application $g=\sup\limits_{i\in I} f_i$ est convexe. On dit que $g$ est l'enveloppe convexe des $f_i$.

b) Soit $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ croissante et continue. Montrer qu'il existe une plus petite grande application convexe majorée par $f$. Montrer que cette application est continue.

**12)** Soit $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue.

a) On suppose : $\mathcal{P}_1:\ \forall u,v\in\mathbb{R},\ u<v,\ \exists\,\lambda\in]0,1[\ /\ f(\lambda u+(1-\lambda)v)\leq \lambda f(u)+(1-\lambda)f(v)$. Montrer que $f$ est convexe.

b) On suppose $\mathcal{P}_2:\ \forall x\in\mathbb{R},\ \exists\, p\in\mathbb{R}\ /\ f(t)\geq f(x)+p(t-x)$ pour $t$ assez proche de $x$. Montrer que $f$ est convexe.

c) On suppose : $\mathcal{P}_3:\ \forall u,v\in\mathbb{R},\ u\leq v\Longrightarrow\ (v-u)\,f\left(\dfrac{u+v}{2}\right)\leq\displaystyle\int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $f$ est convexe.

d) On suppose que $f$ est dérivable et que pour tout $u,v\in\mathbb{R}$ tel que $u<v$, il existe un unique $c\in]u,v[$ tel que $f(v)-f(u)=(v-u)f'(c)$. Montrer que $f$ est soit convexe, soit concave.

**13)** Soit $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ croissante et $F:\ x\longmapsto\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que $F$ est continue et que $F\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\leq\dfrac{F(x)+F(y)}{2}$ pour tous réels $x,y$.

b) Soient $u,v\in\mathbb{R}$. On pose $I=\big\{\alpha\in[0,1],\ F((1-\alpha)u+\alpha v)\leq(1-\alpha)F(u)+\alpha F(v)\big\}$.

Montrer que $I$ est une partie fermée, contenant 0 et 1 et stable par milieu (i.e. que si $\alpha,\beta\in I\Longrightarrow\dfrac{\alpha+\beta}{2}\in I$). En déduire que $F$ est convexe.

b) Étudier la dérivabilité de $F$.

**14)** Soit $f:\ [0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue telle que $f(0)=f(1)$. Montrer que pour tout $n\geq1$, il existe $x\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ tel que $f(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)$.

**15)** Soit $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe $a$ et $b$ tels que : $\forall x\in\mathbb{R},\ |f(x)|\leq a|x|+b$.

**16)** Soient $f, g : [0,1] \to [0,1]$ continues telles que $f \circ g = g \circ f$.

a) Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$. On pose ensuite $x_{n+1} = g(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f(x_n) = x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = g(x)$ (on pourra distinguer selon que $(x_n)_{n\geq 0}$ est monotone ou ne l'est pas).

**17)** Trouver les $f : ]-1,1[ \to \mathbb{R}$ continues en 0 telles que $f(x) - f(x^2) = x$ pour tout $x \in ]-1,1[$.

**18)** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $C^\infty$ et $p \geq 1$ tel que $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(p-1)}(0) = 0$. En utilisant une formule de Taylor, montrer qu'il existe $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $C^\infty$ telle que : $\forall t,\ f(t) = t^p g(t)$.

**19)** Soit $f$ de classe $C^2$ sur $[a,b]$.

a) Montrer que pour tout $x, y \in [a,b]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$f(y) = f(x) + (y-x)f'(x) + \frac{(y-x)^2}{2} f''(c).$$

b) Montrer que $||f'||_\infty \leq \dfrac{4}{b-a}||f||_\infty + \dfrac{b-a}{4}||f''||_\infty$.

**20)** Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : t \longmapsto \det(A + tB)$. Montrer que $f$ est dérivable et exprimer $f'(0)$.

**21)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^\infty$ et non nulle vérifiant : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

a) Montrer que $f(0) = 1$ et que $f$ est paire.

b) Trouver une équation différentielle vérifiée par $f$, et en déduire une expression de $f$.

c) Montrer que l'hypothèse "$f$ de classe $C^\infty$" peut être remplacée par "$f$ continue".

**22)** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(a) = f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in ]a,b[$ tel que :

$$f'(c)(c-a) = f(c) - f(a).$$

**23)** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ strictement croissante et de classe $C^2$. On suppose que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Soit $L$ le polynôme de degré 1 prenant même valeur que $f$ aux points $a$ et $b$. On notera $\alpha$ et $\alpha_0$ les racines respectives de $L$ et $f$.

a) Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(x) - L(x) = \dfrac{1}{2}f''(c)(x-a)(x-b)$.

b) En déduire qu'il existe $c, d \in [a,b]$ tels que $\alpha - \alpha_0 = \dfrac{f''(c)}{2f'(d)}(\alpha - a)(\alpha - b)$. En déduire un intervalle $[a_1, b_1] \subset [a,b]$ contenant $\alpha_0$.

c) En itérant, on construit une suite $([a_n, b_n])_{n\geq 0}$ de segments emboités contenant $\alpha_0$ (on pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$). Montrer que les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ tendent vers $\alpha_0$ et que la convergence est quadratique (on pourra supposer que les deux points $a$ et $b$ sont assez proches de $\alpha_0$, dans un sens que l'on précisera).

d) Appliquer cette méthode pour calculer avec Maple les 100 premières décimales de $\sqrt{2}$.

**24)** a) Soit $\Delta$ l'opérateur de $C^\infty(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ qui à $f$ associe l'application $t \longmapsto f(t+1) - f(t)$. Démontrer la propriété :

$$\forall\, f \in C^\infty(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R}),\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall t > 0,\ \exists\, c \in ]t, t+k[,\ \Delta^k(f)(t) = f^{(k)}(c).$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $n^x \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $x \in \mathbb{N}$.

**25)** (Mines) Montrer qu'il n'existe pas de primitive de $f: t \longmapsto e^{t^2}$ de la forme $t \longmapsto R(t)f(t)$ avec $R \in \mathbb{R}(X)$.

**26)** Soit $f \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 |f'(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \geq \frac{1}{e}$.

**27)** Soit $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

a) Montrer que $u_n$ tend vers 0.

b) Si $f$ est dérivable en 0, que dire de $(u_n)_{n\geq 1}$ ?

**28)** Soit $f: ]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue. On pose $g: x \longmapsto xf(1/x)$. Montrer que $f$ est convexe si et seulement si $g$ l'est.

## Exercices X-ENS

**29)** Soit $f: [0,1] \to [0,1]$ croissante. En considérant $\{x \in [0,1],\ x \leq f(x)\}$, montrer que $f$ possède au moins un point fixe.

**30)** Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone. Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}_f$ des points de discontinuité de $f$ est au plus dénombrable. Réciproquement, montrer que toute partie au plus dénombrable de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des points de discontinuité d'une telle fonction.

**31)** Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme $\|\ \|_\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $E_n$ le sous-espace des applications polynômiales de degré au plus n. On fixe enfin $f \in E$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in E_n$ tel que : $\mathrm{d}(f,E_n) = \mathrm{d}(f,P_n) = M_n$.

b) Montrer l'unicité du polynôme $P_0$ et calculer la valeur de $M_0$. Montrer qu'il existe $a,b \in [0,1]$ et $\varepsilon \in \{-1,1\}$ tels que :

$$a < b \qquad \text{et} \qquad (f-P_0)(a) = \varepsilon M_0,\ (f-P_0)(b) = -\varepsilon M_0$$

c) On suppose maintenant $n = 1$. Montrer qu'il existe $a,b,c \in [0,1]$ et $\varepsilon > 0$ tels que :

$$a < b < c \qquad \text{et} \qquad (f-P_1)(a) = \varepsilon M_1,\ (f-P_1)(b) = -\varepsilon M_1,\ (f-P_1)(c) = \varepsilon M_1$$

En déduire l'unicité de $P_1$. Que vaut $P_1$ quand $f$ est convexe et dérivable ?

d) Généraliser la preuve du c) à tout entier $n$.

**32)** (X) Soit $f: [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que l'application $g: x \longmapsto \displaystyle\max_{y\in[0,1]} f(x,y)$ est continue.

**33)** Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant un développement limité à l'ordre $n \geq 1$ en $0$ : $f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n + o(t^n)$. Pour $x < y$, on note $T_f(x,y)$ la dérivée $n$-ième du polynôme d'interpolation de Lagrange de $f$ associé à la subdivision $\sigma = \left(x, x+\dfrac{1}{n}(y-x), \ldots, x+\dfrac{n-1}{n}(y-x), y\right)$.

a) Pour $x < y$, exprimer $T_f(x,y)$ en fonction des valeurs prises par $f$ aux points de la subdivision.

b) Montrer que $T_f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0^-,0^+)]{} n!\,a_n$. Qu'en déduit-on quand on suppose que $f$ est $n$-fois dérivable en $0$ ?

**34)** Soit $I$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $g: I \to \mathbb{R}$ continue. On dit que $g$ est pseudo-dérivable en un point $x$ de $I$ si $\dfrac{g(x+h) - g(x-h)}{2h}$ a une limite quand $h$ tend vers 0. Si elle existe, nous noterons $\widetilde{g}'(x)$ cette limite.

a) Quelle relation existe-t-il entre dérivabilité et pseudo-dérivabilité ?

b) On suppose que $g$ est pseudo-dérivable en tout point de $I$ et que l'application $\widetilde{g}'$ est strictement positive. Montrer que $g$ est croissante.

c) Généraliser le b) en supposant uniquement que $\widetilde{g}'$ est positive

**35)** Soit $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ continue et concave telle que $f(0) = 1$. Montrer que

$$\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

Indication : on montrera tout d'abord le résultat quand $f$ est affine, puis on introduira l'application affine $g$ définie par les conditions $g(0) = 1$ et $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

**36)** (X 2012) Si $[a,b]$ est un segment, on note $\mathcal{S}_a^b$ l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$. Si $f :\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et si $\sigma = (t_0, t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{S}_a^b$, on note :

$$V_\sigma(f) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(t_{k+1} - f(t_k)|.$$

On dit que $f$ est *à variations bornées* s'il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_a^b,\ V_\sigma(f) \leq M.$$

Si $f$ est à variation bornée sur $[a,b]$, on note $V_a^b(f) = \sup_{\sigma\in\mathcal{S}_a^b} V_\sigma(f)$.

Par abus d'écriture, si $[c,d] \subset [a,b]$ et si $\sigma \in \mathcal{S}_c^d$, nous noterons $V_\sigma(f)$ au lieu de $V_\sigma(f_{|[c,d]})$. De même, si la restriction de $f$ à $[c,d]$ est à variations bornées, nous noterons $V_c^d(f)$ au lieu de $V_a^b(f_{|[c,d]})$.

a) Montrer que toute fonction monotone est à variations bornées.

b) Montrer que si $f :\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et si $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}_a^b$ sont telles que $\sigma_1$ est plus fine que $\sigma_2$, alors $V_{\sigma_1}(f) \geq V_{\sigma_2}(f)$.

c) Montrer que toute fonction $f :\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1$ est à variations bornées et calculer $V_a^b(f)$.

d) Montrer que si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et si $c \in ]a,b[$, $f$ est à variations bornées sur $[a,b]$ si et seulement si elle l'est sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$. Quelle relation existe-t-il entre $V_a^b(f)$, $V_a^c(f)$ et $V_c^b(f)$ quand $f$ est à variations bornées sur $[a,b]$ ?

e) Montrer que $f :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ est à variation bornée si et seulement si $f$ est la différence de deux fonctions croissantes.

**37)** (X 2017) Montrer que pour $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n \geq 1$, $\max_{-1\leq x\leq 1} |P(x)| \geq \dfrac{1}{2^{n-1}}$. On pourra utiliser la suite $(T_n)_{n\geq 0}$ des polynômes de Tchebychev : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(nx\theta)$.

**38)** Soient $T_1, \ldots, T_n$ des réels strictement positifs tels que $T_i/T_j \notin \mathbb{Q}$ pour $i \neq j$. Soient $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que pour tout $i$, $f_i$ est $T_i$-périodique et que $f_1 + \cdots + f_n = 0$. Montrer que les $f_i$ sont constantes.

**39)** Soit $f$ de classe $C^2$ sur $[0,1]$ telle que $f(1) = 1$ et $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$. Montrer que $\|f"\|_\infty \geq 4$.

# Fonctions de la variable réelle : corrigés

## Exercices CCP

**1)** On peut supposer que $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. En appliquant le théorème de Rolle à $f$ sur chaque $[x_i, x_{i+1}]$, il existe $y_1, \ldots, y_{n-1}$ tels que $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n$ et $f'(y_1) = \cdots = f'(y_{n-1}) = 0$. La fonction $f'$ est alors de classe $C^\infty$ et s'annule en les $2n-1$ points distincts $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_{n-1}, y_{n-1}, x_n$. Le théorème de Rolle appliqué sur les intervalles $[x_1, y_1]$, $[y_1, x_2]$, …, $[y_{n-1}, x_n]$ prouve que $f''$ s'annule en $2n-3$ points distincts. Par itération, on montre que pour $k \in \{1, \ldots, 2n-1\}$, $f^{(k)}$ s'annule en $2n-k$ points distincts. Ainsi, $f^{(2n-1)}$ s'annule en au moins un point.

On ne peut pas faire mieux, car la fonction $f :\ x \longmapsto \prod_{i=1}^n (x - x_i)^2$ vérifie les hypothèses imposées et sa dérivée $2n$-ième ne s'annule pas ($f$ est polynômiale de degré $2n$).

**2)** Comme $f$ est croissante non contante, il existe $b > a$ tel que $f(b) > f(a)$. Pour tout $x > b$, on a alors :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

et donc

$$f(x) \geq f(a) + (x - a)\,\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

car $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$ : $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

**3)** a) $f_1$ est de classe $C^\infty$ sur $A = ]-\infty, -1[ \cup ]-1, 1[ \cup ]1, +\infty[$. On a facilement :

$$f_1(x) \xrightarrow[x \to -1^-]{} 0^-$$
$${}_1f(x) \xrightarrow[x \to -1^+]{} -\infty$$
$$f_1(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} 0^+$$
$$f_1(x) \xrightarrow[x \to -1^+]{} \infty$$
$$\frac{f_1(x)}{x+1} \xrightarrow[x \to -1^-]{} 0^+$$
$$\frac{f_1(x)}{x-1} \xrightarrow[x \to 1^-]{} 0^-$$

En posant $f_1(-1) = f_1(1) = 0$, la fonction $f_1$ admet des dérivées à gauche nulles en $-1$ et $1$.

On a ensuite :

$$\forall x \in A,\ f_1'(x) = \frac{x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1}{(x^2 - 1)^2} \exp\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right)$$

donc $f_1'(x)$ est du signe de $P(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1$. Une étude élémentaire montre $P$ a deux racines réelles simples $x_0 \simeq 0,48$ et $x_1 \simeq 2,08$, avec $P > 0$ sur $]-\infty, x_0[ \cup ]x_1, +\infty[$ et $P < 0$ sur $]x_0, x_1[$. On en déduit :

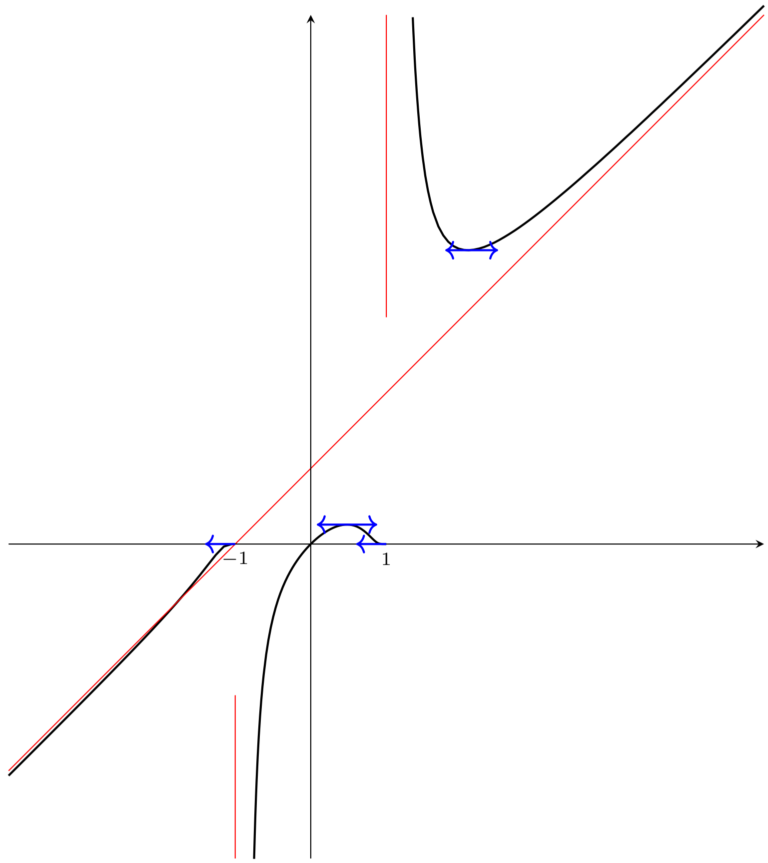
- $f_1$ est strictement croissante sur $]-\infty, -1]$ et sur $]-1, x_0]$ ;
- $f_1$ est strictement décroissante sur $[x_0, 1]$ et sur $]1, x_1]$ ;
- $f_1$ est strictement croissante sur $[x_1, +\infty[$.

On peut étudier $f_1(x)$ au voisinage de l'infini :

$$f_1(x) =_{\pm\infty} x + 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

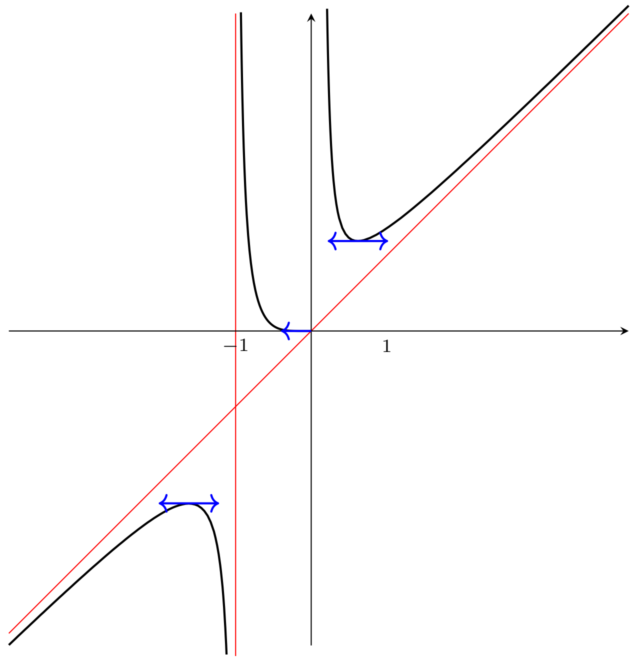
donc la droite $y = x + 1$ est asymptote, atteinte par le dessus quand $x$ tend vers $+\infty$ et par le dessous quand $x$ tend vers $-\infty$.

Nous obtenons le graphique (les asymptotes sont tracées en rouge) :




b) Le même type de calculs montre :

- $f_2$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ ;
- en posant $f_2(0) = 0$, $f_2$ a une dérivée à gauche nulle en $0$ ;
- $f_2'$ s'annule en $x_0 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ;
- $f_2$ est strictement croissante sur $]-\infty, x_0]$ et $[x_1, +\infty[$ ;
- $f_2$ est strictement décroissante sur $]-2, -1[$, $]-1, 0]$ et $]0, x_1]$ ;
- les droites $(x = -1)$ et $(x = 0)$ sont des asymptotes verticales ;
- $f_2(x) = -\infty x + \dfrac{1}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ donc la droite $(y = x)$ est asymptote oblique, atteinte par le dessus (resp. par le dessous) quand $x$ tend vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$).




**4)** Il suffit d'appliquer les formules de cours pour obtenir :

a) $x^2 \operatorname{cotan}^2 x = 1 - \dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{1}{15}x^4 + \dfrac{2}{189}x^6 + O(x^8)$.

b) $\ln \dfrac{\tan x}{x} = \dfrac{1}{3}\,x^2 + \dfrac{7}{90}\,x^4 + \dfrac{62}{2835}\,x^6 + O(x^8)$.

c) $\dfrac{\operatorname{Arcsin}\sqrt{x}}{\sqrt{x(1+x)}} = 1 - \dfrac{1}{3}\,x + \dfrac{11}{30}\,x^2 - \dfrac{17}{70}\,x^3 + O(x^4)$.

d) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x} = -\dfrac{1}{6}\,x - \dfrac{7}{360}\,x^3 + O(x^5)$.

**5)** a) $\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\mathrm{th}x} - \dfrac{1}{\tan x}\right) = \dfrac{\tan x - \mathrm{th}x}{x\mathrm{th}x\tan x} \sim_0 \dfrac{\tan x - \mathrm{th}x}{x^3}$. donc nous devons faire un DL du numérateur à l'ordre 3 :

$$\tan x - \mathrm{th}x = \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = \frac{2}{3}\,x^3 + o(x^3)$$

donc l'expression étudiée tend vers 2/3 quand $x$ tend vers 0.

b) Remarquons que la fonction étudiée est définie au voisinage droit de 0 (et plus précisément sur $I = ]0, \pi[$). Nous avons, au voisinage de $0^+$ :

$$\sin x\ \ln x = (x - \frac{x^3}{6} + O(x^5))\ \ln x$$

puis, $\sin x\ \ln x$ tendant vers 0 :

$$\begin{aligned} x^{\sin x} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right)\ln x + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right)^2 \ln^2 x + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right)^3 \ln^3 x + O\left(x^4 \ln^4 x\right) \\ &= 1 + x\ln x + \frac{1}{2}\,x^2\ln^2 x + \frac{1}{6}\,x^3\ \ln^3 x - \frac{1}{6}x^3\ln x + o\left(x^3\ln x\right) \end{aligned}$$

puisque $x^5\ \ln x$, $x^4\ \ln^2 x$ et $x^4\ln^3 x$ sont des $o(x^3\ln x)$.

On a ensuite :

$$\ln(\sin x)\, x = x\ln(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)) = x\left(\ln x + \ln(1 - \frac{x^2}{6} + O(x^4))\right) = x\ln x - \frac{x^3}{6} + O(x^4)$$

puis

$$\begin{aligned}
\sin^x x &= 1 + \left(x\,\ln x - \frac{x^3}{6} + O(x^4)\right) + \frac{1}{2}\left(x\,\ln x - \frac{x^3}{6} + O(x^4)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x\,\ln x - \frac{x^3}{6} + O(x^4)\right)^3 + O\left(x^4 \ln^4 x\right)\\
&= 1 + x\,\ln x - \frac{x^3}{6} + O(x^4) + 1/2\, x^2 \ln^2 x + O(x^4 \ln x) + 1/6 x^3 \ln^3 x + O(x^4 \ln x) + O(x^4 \ln^4 x)\\
&= 1 + x\ln x + \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x + \frac{1}{6} x^3\, \ln^3 x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

puisque $x^4$, $x^4\,\ln x$ et $x^4 \ln^4 x$ sont des $O(x^3)$. Nous en déduisons l'équivalent :

$$x^{\sin x} - \sin^x x \sim_0 -\frac{x^3}{6}\,\ln x$$

Un calcul presque identique donne :

$$x^{\operatorname{sh} x} - \operatorname{sh}^x x \sim_0 \frac{x^3}{6}\,\ln x$$

et la limite cherchée est $-1$.

c) La fonction est trivialement définie au voisinage de 0 et se simplifie en

$$x \longmapsto \sin(\ln(1+x)) - \sqrt{-\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\,x\right)\right)}$$

Les deux termes de la différence peuvent être traités indépendamment :

$$\frac{\sin(\ln(1+x))}{x} = \frac{\sin(x + O(x^2))}{x} = \frac{x + O(x^2) + O(x^3)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1.$$

Pour le second terme, on a :

$$\sqrt{-\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\,x\right)\right)} = \sqrt{-\ln\left(1 - \frac{\pi^2}{8}\,x^2 + O(x^4)\right)} = \sqrt{\frac{\pi^2}{8}\,x^2 + O(x^4)} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\,|x|\,\sqrt{1 + O(x^2)}$$

On en déduit que l'expression a des limites à droite et à gauche, valant respectivement $1 - \dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$ et $1 + \dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

d) $\sin^5 x - x^5$ est équivalent à $-\dfrac{5}{7}\,x^7$ ; il faut donc faire un DL du numérateur à l'ordre 7, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
2(1-\cos x)\,\sin x &= 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6)\right)(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\\
&= \frac{x^7}{40} + o(x^7)\\
x^3\,\sqrt[4]{1-x^2} &= x^3\,(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{3\,x^4}{32} + o(x^4))\\
&= x^3 - \frac{x^5}{4} - \frac{3\,x^7}{32} + o(x^7)
\end{aligned}$$

ce qui donne enfin une limite égale à $\dfrac{19}{160}$.

**6)** On a :

$$\begin{aligned}P(x) &= f(a-h)\,\frac{(x-a)(x-a-h)}{(a-h-a)(a-h-a-h)} + f(a)\,\frac{(x-a+h)(x-a-h)}{(a-a+h)(a-a-h)} + f(a+h)\,\frac{(x-a+h)(x-a)}{(a+h-a+h)(a+h-a)}\\ &= \frac{f(a-h)}{2h^2}(x-a)(x-a-h) - \frac{f(a)}{h^2}(x-a+h)(x-a-h) + \frac{f(a+h)}{2h^2}(x-a+h)(x-a),\end{aligned}$$

donc $T_a(2,h) = \dfrac{f(a-h)-2f(a)+f(a+h)}{h^2}$.

Si $f$ est deux fois dérivable en $a$, on peut faire un DL de $f$ en $a$ à l'ordre 2 :

$$T_a(2,h) = \frac{f(a)-hf'(a)+\dfrac{h^2}{2}f''(a)+o(h^2)-2f(a)+f(a)+hf'(a)+\dfrac{h^2}{2}f''(a)+o(h^2)}{h^2} = f''(a)+o(1) \xrightarrow[h\to 0]{} f''(a).$$

Si on suppose maintenant que $f$ est de classe $C^4$, on fait un DL à l'ordre 4 :

$$T_a(2,h) = f''(a) + \frac{f^{(4)}(a)}{12}\,h^2 + o(h^2)$$

donc $T_a(2,h) - f''(a)$ est de l'ordre de $h^2$ quand $f^{(4)}(a) \neq 0$ et négligeable devant $h^2$ sinon.

## Exercices Mines-Centrale

**7)** La preuve est presque évidente : comme $]0,1]$ est un intervalle stable, la suite est à valeurs dans $]0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} < u_n$. La suite est donc strictement décroissante et minorée par0 : elle admet donc une limite $u \in [0,1]$. Comme $f$ est continue, $f(u) = u$, donc $u = 0$ car 0 est le seul point fixe de $f$.

**8)** Soit $a \in I$. L'ensemble $A = \{b \in I \cap [a,+\infty[,\ f\text{est croissante sur } [a,b]\}$ est un intervalle. Si $A = [a,c[$ avec $c \in I$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f$ est croissante sur $I \cap [c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ et $f$ est croissante sur $[a,c]$, ce qui est absurde car $c \notin A$. Si $A = [a,c]$, alors $c$ est le maximum de $I$ (sinon, on aurait $c+\varepsilon \in A$ pour un certain $\varepsilon > 0$) et $A = [a,+\infty[\cap I$. Enfin, si $c = +\infty$, on a également $A = [a,+\infty[\cap I$.

De même, on démontre que $B = \{b \in I \cap [-\infty,a[,\ f\text{est croissante sur } [b,a]\} = ]-\infty,a] \cap I$. $f$ est donc croissante sur $]-\infty,a] \cap I$ et sur $[a,+\infty[\cap I$, donc sur $I$.

**9)** Comme $f$ et $g$ sont monotones sur $]0,+\infty[$, elles admettent des limites à droite et à gauche en tous points et :

$$\forall x > 0, f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+) \text{ et } g(x^-) \geq g(x) \geq g(x^+)$$

Comme $g(x^-) = \dfrac{f(x^-)}{x}$ et $g(x^+) = \dfrac{f(x^+)}{x}$, on obtient $\forall x > 0, f(x^-) = f(x) = f(x^+)$ et $f$ est continue.

**10)** a) Comme la fonction ln est concave sur $]0,+\infty[$, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ :

$$\ln\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \ln(x_i)$$

ce qui donne l'inégalité demandée en composant par la fonction exponentielle (qui est croissante).

En appliquant cette inégalité avec $n = 2$, $\lambda_1 = \dfrac{1}{p}$, $\lambda_2 = \dfrac{1}{q}$, $x_1 = u^p$ et $x_2 = v^q$, on obtient :

$$uv = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$

On en déduit :

$$\forall i \in \{1,\dots,n\},\ \frac{a_i}{\alpha}\,\frac{b_i}{\beta} \leq \frac{a_i^p}{p\alpha^p} + \frac{b_i^q}{q\beta^q}$$

et en sommant :

$$\frac{1}{\alpha\beta}\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \frac{1}{p\alpha^p}\sum_{i=1}^n a_i^p + \frac{1}{q\beta^q}\sum_{i=1}^n b_i^q = \frac{\alpha^p}{p\alpha^p} + \frac{\beta^q}{q\beta^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

ce qui donne

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \alpha\beta = \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}.$$

b) Il suffit de suivre l'indication, en posant $q = \dfrac{p}{p-1}$ pour avoir $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ ($q$ est *l'exposant conjugué* de $p$) :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p &= \sum_{i=1}^n a_i(a_i+b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^n b_i(a_i+b_i)^{p-1}\\
&\leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^{(p-1)q}\right)^{1/q}\\
&= \left(\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p}\right)\times\left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p\right)^{1/q}
\end{aligned}$$

car $(p-1)q = p$. En divisant par $\left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p\right)^{1/q}$, on obtient :

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p\right)^{1/q} = \left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p\right)^{1-1/q} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p}$$

**11)** a) Utilisons la caractérisation de la convexité en terme d'épigraphe : $f:\ I \longmapsto \mathbb{R}$ est convexe si et seulement l'épigraphe de $f$, i.e. la partie $E_f = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R},\ f(x) \leq y\}$, est une partie convexe de $R^2$. Nous avons alors $E_g = \bigcap_{i\in I} E_{f_i}$ et cette partie est convexe, comme intersection de parties convexes.

b) Notons $A$ l'ensemble des applications convexes $g:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ telles que $g \leq f$. $A$ contient la fonction constante égale à $f(a)$, donc $A$ est non vide : l'application $\varphi:\ x \longmapsto \sup_{g\in A} g(x)$ est donc convexe et c'est par définition la plus grande fonction convexe inférieure à $f$.

$g$ étant convexe sur $[a,b]$, elle admet en tout point $x \in ]a,b[$ une dérivée à gauche et une dérivée à droite. En effet, on a pour l'existence de la dérivée à droite :

$T_x:\ y \longmapsto \dfrac{g(y)-g(x)}{y-x}$ est croissante sur $]x,b]$ et minorée par $\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}$ : on en déduit que $T_x$ a une limite quand $y$ tend vers $x^+$ et donc que $g$ est dérivable à droite en $x$.

Ainsi, $g$ est continue à gauche et à droite, donc continue, en tout $x \in ]a,b[$.

Continuité en $a$ : on a, pour tout $x$, $f(a) \leq g(x) \leq f(x)$ (la première égalité vient du fait que $f(a) \in A$) ; comme $f$ est continue en $a$, le théorème d'encadrement prouve que $g(x)$ tend vers $f(a)$ quand $x$ tend vers $a$, donc $g(a) = f(a)$ et $g$ est continue en $a$.

Continuité en $b$ : remarquons pour commencer que $g(a) \leq g(x)$ impose à $g$ d'être croissante sur $[a,b]$ (il existe $c \in [a,b]$ tel que $g$ est décroissante sur $[a,c]$ et croissante sur $[c,b]$ : on en déduit que $g$ est constante sur $[a,c]$ (qui peut être réduit à $\{a\}$), puis que $g$ est croissante sur $[a,b]$. $g$ a donc une limite $g(b^-)$ à gauche en $b$. Supposons que cette limite est différente de $f(b)$ et fixons $\alpha \in ]g(b^-), f(b)[$. Comme $f$ est continue en $b$ et que $\alpha < g(b) \leq f(b)$, il existe $c \in ]a,b[$ tel que $f(x) > \alpha$ sur $[c,b]$. On peut alors définir l'application $\varphi$ par :

- $\varphi$ coïncide avec $g$ sur $[a,c]$ ;

- $\varphi$ est affine sur $[c, b]$ avec $\varphi(b) = \alpha$.

Pour $x \in [a, c]$, $\varphi(x) = g(x) \leq f(x)$ et pour $x \in [c, a]$, $\varphi(x) \leq \varphi(b) \leq \alpha < f(x)$, donc $\varphi \leq f$.

$\varphi$ est convexe et continue sur $[a, c]$, avec $\varphi'_g(c) = g'_g(c)$, et $\varphi$ est affine sur $[c, b]$ avec $\varphi'(c) = \frac{\alpha - g(c)}{b-c} \geq \frac{g(b^-)-g(c)}{b-c} \geq g'_d(c)$. On en déduit que $\varphi$ est convexe, puisque l'on a raccordé par continuité en $c$ deux fonctions convexes avec $ph'_g(c) = g'_g(c) \leq g'_d(c) \leq \varphi'_d(c)$.

Par maximalité de $g$, on en déduit que $\varphi(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, ce qui donne $\alpha \leq g(b^-)$ en faisant tendre $x$ vers $b^-$ : c'est absurde.

Nous avons ainsi démontré que $g(b^-) = f(b)$. Comme $g(b^-) \leq g(b) \leq f(b)$, on en déduit que $g(b) = f(b)$ et que $g$ est continue en $b$.

**12)** a) Montrons le résultat par contraposée : supposons que $f$ est continue mais non convexe. Il existe alors $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x < z < y$ et $f(z) > L(z)$, où $L \in \mathbb{R}_1[X]$ vérifie $L(x) = f(x)$ et $L(y) = f(y)$. L'idée consiste à aller chercher les deux points les plus proches de $z$ en lesquels $f$ et $L$ coïncident : la corde entre ces deux points sera alors situées strictement au dessus de la courbe représentative de $f$, ce qui contredira la propriété.

Posons donc $a = \sup\{t \in [x, z],\ f(t) = L(t)\}$ et $b = \inf\{t \in [z, y],\ f(t) = L(t)\}$. Ces bornes sont bien définies (les parties sont bornées et non vides car elles contiennent respectivement $x$ et $y$). Comme $f$ est continue, ces bornes sont atteintes, donc $f(a) = L(a)$ et $f(b) = L(b)$. La fonction $f - L$ ne s'annule pas sur $]a, b[$ et est continue : elle y est donc strictement positive, puisque $f(z) - L(z) > 0$. Nous avons ainsi :

$$\forall \alpha \in ]0, 1[,\ f((1-\alpha)a + \alpha b) > L((1-\alpha)a + \alpha b) = (1-\alpha)L(a) + \alpha L(b) = (1-\alpha)f(a) + \lambda f(b)$$

ce qui est la négation de $\mathcal{P}_1$.

b) Travaillons encore par contraposée et supposons que $f$ n'est pas convexe. Il existe alors, comme vu à la question $a$, un intervalle non trivial $[a, b]$ telle que $f(t) - L(t) > 0$ sur $[a, b]$, où $L \in \mathbb{R}_1[X]$ avec $L(a) = f(a)$ et $L(b) = f(b)$. Si $M$ désigne le maximum de $f - L$ sur $[a, b]$, $\{x \in [a, b],\ f(x) - L(x) = M\}$ est un compact non vide : on peut donc considérer son minimum $c$ et on a $a < c < b$. On a alors :

- si $p > \dfrac{L(b) - L(a)}{b - a} = p_0$ et $t \in ]0, b-c]$, $f(t) - L(t) \leq f(c) - L(c)$, donc $f(t) \leq f(c) + L(t) - L(c) = f(c) + (t-c)p_0 > f(c) + (t-c)p$ ;

- si $p \leq p_0$ et $t \in [a-c, 0[$, $f(t) - L(t) > f(c) - L(c)$, donc $f(t) > f(c) + L(t) - L(c) = f(c) + (t-c)p_0$

et $\mathcal{P}_2$ n'est pas vérifiée.

c) Reprenons le début de la preuve du b), jusqu'à la construction de $[a, b]$ avec $g = f - L > 0$ sur $[a, b]$. Comme $g$ est continue, on peut définir $c$ comme la plus petite valeur de $[a, b]$ en laquelle $g$ atteint son maximum sur $[a, b]$. On peut ensuite choisir $h > 0$ tel que $a \leq c - h < c < c + h \leq b$ et on a $g(t) \leq g(c)$ sur $[c-h, c+h]$ avec inégalité stricte sur $[c-h, c]$. On en déduit :

$$\int_{c-h}^{c+h} g(t)\,\mathrm{d}t < \int_{c-h}^{c+h} g(c)\,\mathrm{d}t = 2hg(c)$$

Il reste à revenir à $f$, en utilisant que $L$ est affine :

$$\int_{c-h}^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{c-h}^{c+h} g(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c-h}^{c+h} L(t)\,\mathrm{d}t < 2hg(c) + 2hL(c) = 2hf(c)$$

ce qui contredit $\mathcal{P}_3$, avec $u = c - h$ et $v = c + h$.

**13)** a) Comme $f$ est croissante, $f$ est intégrable (au sens de Riemann) sur tout segment : $F$ est bien définie et continue (intégrale fonction de la borne supérieure).

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. Posons $c = \dfrac{a+b}{2}$ ; comme $c \geq a$, on a $f(t) \leq f(t + c - a)$ pour tout $t$, d'où :

$$F(c) - F(a) = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^c f(t + c - a)\,\mathrm{d}t = \int_c^b f(s)\,\mathrm{d}s = F(b) - F(c)$$

en posant $s = t + c - a$ : cela donne l'inégalité demandée.

b) Nous avons :

- $A$ est un fermé de $[u, v]$ car $F$ et $L$ sont continues ;
- $A$ est stable par milieu : si $x, y \in A$, on a :
$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{F(x)+F(y)}{2} \leq \frac{L(x)+L(y)}{2} = L\left(\frac{x+y}{2}\right)$$
donc $\dfrac{x+y}{2} \in A$ ;
- $u, v \in A$ car $F(u) = L(u)$ et $F(v) = L(v)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A$ contient donc tous les points de la subdivision régulière de $[u, v]$ en $2^n$ morceaux. Comme l'ensemble de ces points, pour $n$ décrivant $\mathbb{N}$, est dense dans $[u, v]$, $A = [u, v]$ et $F$ est convexe.

c) Comme $f$ a des limites à gauche et à droite en tout point, $F$ admet des dérivées à gauche et à droite en tout point, avec :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ F'_g(x) = f(x^-) \text{ et } F'_d(x) = f(x^+).$$

**14)** Par contraposée : supposons que $f$ est continue et que l'application $g :\ x \longmapsto f(x + 1/n) - f(x)$ (définie sur $[0, 1 - 1/n]$) ne s'annule pas. $g$ étant continue, elle est soit strictement positive, soit strictement négative. On en déduit que $f(1) - f(0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g(k/n) \neq 0$.

**15)** Comme $f$ est uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq 1.$$

Pour tout $x \geq 0$, soit $k$ tel que $k\eta \leq x < (k+1)\eta$ ($k$ est la partie entière de $x/\eta$). On a alors :
$$|f(x) - f(0)| \leq \underbrace{|f(x) - f(k\eta)|}_{\leq 1} + \underbrace{|f(k\eta) - f((k-1)\eta)|}_{\leq 1} + \cdots + \underbrace{|f(\eta) - f(0)|}_{\leq 1} \leq k + 1 \leq \frac{x}{\eta} + 1$$
d'où $|f(x)| \leq |f(0)| + |f(x) - f(0)| \leq \dfrac{1}{\eta} x + |f(0)| + 1$.

Pour $x \leq 0$, on reprend la même construction avec $k \in \mathbb{N}$ tel que $-(k+1)\eta < x \leq -k\eta$, pour obtenir :
$$|f(x)| \leq |f(0)| + |f(x) - f(0)| \leq |f(0)| + k + 1 \leq \frac{1}{\eta} |x + |f(0)| + 1|.$$

En posant $a = \dfrac{1}{\eta}$ et $b = |f(0)| + 1$, nous avons donc $|f(x)| \leq a|x| + b$ pour tout $x \in R$.

**16)** a) La preuve est évidente par récurrence sur $n$ : la propriété est vérifiée pour $n = 0$, et si $n \geq 0$ est tel que $f(x_n) = x_n$, alors $f(x_{n+1}) = f(g(x_n)) = g(f(x_n)) = g(x_n) = x_{n+1}$.

b) Si $(x_n)$ est monotone, comme elle est bornée, elle converge vers $x \in [0, 1]$ : en passant à la limite dans les égalités $f(x_n) = x_n$ et $g(x_n) = x_{n+1}$ ($f$ et $g$ sont continues), on obtient $f(x) = x = g(x)$.

Sinon, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \leq x_{n+1}$ et $x_{n+1} > x_{n+2}$ (ou $x_n \geq x_{n+1}$ et $x_{n+1} < x_{n+2}$, et la preuve est symétrique). On a donc $(f - g)(x_n) = x_n - x_{n+1} \leq 0$ et $(f - g)(x_{n+1}) = x_{n+1} - x_{n+2} > 0$ ; comme $f - g$ est continue, le théorème des valeurs intermédiaire prouve qu'il existe $x \in [x_n, x_{n+1}]$ tel que $f(x) = g(x)$.

**17)** Supposons que $f$ est une solution. On a alors, pour $x \in ]-1,1[$ :

$$f(x) = x + f(x^2) = x + x^2 + f(x^4)$$

puis par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = x + x^2 + \cdots + x^{2^n} + f(x^{2^{n+1}}).$$

Comme $\dfrac{|x^{2^{k+1}}|}{|x^{2^k}|} = |x|^{2^k}$ tend vers 0, le critère de d'Alembert assure la convergence absolue de la série de terme général $x^{2^k}$. On en déduit ensuite, par continuité de $f$ en 0, qu'il existe un réel $\alpha$ (égal à $f(0)$) tel que

$$\forall x \in ]-1,1[,\ f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{2^k} + \alpha$$

Réciproquement, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, considérons la fonction $f:\ x \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} x^{2^k} + \alpha$. On a $2^k \geq 2k$ pour tout $k \geq 1$ et $x^2 < 1$, donc :

$$\forall x \in ]-1,1[,\ 0 \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} x^{2^k}}_{=g(x)} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} x^{2k} = \frac{x^2}{1-x^2}.$$

On en déduit que $g(x)$ tend vers 0 quand $x$ tend vers 0, puis que $f(x) = x + g(x) + \alpha$ tend vers $\alpha = f(0)$ quand $x$ tend vers 0 : $f$ est donc continue en 0 et elle vérifie trivialement l'équation $f(x) = x + f(x^2)$.

**18)** La formule de Taylor avec reste intégral s'écrit :

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{p-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k)} x^k}_{=0} + \int_0^x \frac{(x-t)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour $x \neq 0$, le changement de variable $t = ux$ donne :

$$\forall x \in ]0,1],\ f(x) = x^p \int_0^1 \frac{(1-u)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(ux)\,\mathrm{d}u$$

et cette relation reste valable pour $x = 0$. La fonction définie par :

$$\forall x \in [0,1],\ g(x) = \int_0^1 \frac{(1-u)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(ux)\,\mathrm{d}u$$

est alors solution du problème. En effet, on a bien $f(x) = x^p g(x)$ pour tout $x \in [0,1]$ et $g$ est de classe $C^\infty$ par application du théorème de Leibniz (on domine les dérivées successives par des constantes, qui sont bien intégrables sur $[0,1]$).

**19)** a) Soient $x, y \in [a,b]$. si $x = y$, toute valeur de $c$ convient. Sinon, on considère la fonction :

$$g:\ t \longmapsto f(y) - f(t) - (y-t)f'(t) - \frac{(y-t)^2}{2} K$$

où $K$ est choisi tel que $g(x) = 0$, i.e. $K = \dfrac{2(f(y) - f(x) - (y-x)f'(x))}{(y-x)2}$.

La fonction $g$ est continue sur $[x,y]$, dérivable sur $]x,y[$ et $g(x) = g(y) = 0$, donc il existe $c \in ]x,y[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui donne $f''(c) = K$. La relation $g(x) = 0$ donne la relation demandée.

b) Soit $x \in [a,b]$. Il existe $y \in [a,b]$ tel que $|y-x| = \dfrac{b-a}{2}$ (on choisit $y = x \pm \frac{b-a}{2}$, selon la position de $x$ par rapport au milieu de $[a,b]$). D'après le a), il existe alors $c \in [a,b]$ tel que :

$$|f'(x)| = \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - \frac{y-x}{2}f''(c)\right| \leq \frac{2\,||f||_\infty}{|y-x|} + \frac{|y-x|\,||f''||_\infty}{2} = \frac{4}{b-a}\,||f||_\infty + \frac{b-a}{4}\,||f''||_\infty$$

ce qui prouve l'inégalité demandée.

**20)** On peut écrire :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)(a_{\sigma(1),1} + tb_{\sigma(1),1})(a_{\sigma(2),2} + tb_{\sigma(2),2}) \ldots (a_{\sigma(n),n} + tb_{\sigma(n)}, n)$$

donc $f$ est polynomiale de degré au plus $n$ ; en particulier, elle est dérivable et

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \sum_{i=1}^{n} \left[ b_{\sigma(i),i} \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} \left(a_{\sigma(k),k} + tb_{1,\sigma(1)}\right) \right].$$

On en déduit en particulier :

$$\begin{aligned} f'(0) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \sum_{i=1}^{n} a_{\sigma(1),1} \ldots a_{\sigma(i-1),i-1} b_{\sigma(i),i} a_{\sigma(i+1),i+1} \ldots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \det(C_1(A), \ldots, C_{i-1}(A), C_i(B), C_{i+1}(A), \ldots, C_n(A)) \end{aligned}$$

en notant, pour une matrice $M$ et un indice $i$, $C_i(M)$ la $i$-ème colonne de $M$.

**21)** a) Avec $y = 0$, nous obtenons $2f(x) = 2f(0)f(x)$ pour tout $x$, et donc $f(0) = 1$ en choisissant $x$ tel que $f(x) \neq 0$. On a ensuite, avec $x = 0$, $f(y) + f(-y) = 2f(y)$ pour tout $y$, donc $f$ est paire.

b) En dérivant deux fois par rapport à $x$, on obtient :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(x)f(y)$$

En choisissant $x = 0$ et en utilisant la parité de $f''$ ($f$ est paire, donc $f'$ est impaire et $f''$ est paire), on obtient :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ 2f''(y) = 2f''(0)f(y).$$

Nous avons alors trois cas :

- si $f''(0) > 0$, on pose $\omega = \sqrt{f''(0)}$ et on obtient $f'' = \omega^2 f$ ; il existe $A, B$ t.q. $f :\ x \longmapsto A\,\mathrm{ch}(\omega x) + B\,\mathrm{sh}(\omega x)$. Comme $f$ est paire et $f(0) = 1$, on a $f :\ x \longmapsto \mathrm{ch}(\omega x)$.

- si $f''(0) = 0$, on a $f'' = 0$ donc $f$ est affine ; comme $f$ est paire et $f(0) = 1$, on a $f = 1$ ;

- si $f''(0) < 0$, on pose $\omega = \sqrt{-f''(0)}$ et on obtient comme dans le premier cas $f :\ x \longmapsto \cos(\omega x)$.

Réciproquement, ces fonctions sont solutions de l'équation fonctionnelle. Les fonctions solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme $x \longmapsto \cos(\omega x)$ et $x \longmapsto \mathrm{ch}(\omega x)$ pour $\omega \in \mathbb{R}$ (on retrouve la contante 1 quand $\omega = 0$).

c) Si on suppose seulement que $f$ est continue, on montre que $f$ est de classe $C^\infty$ ($C^2$ suffirait). On introduit la primitive $F$ de $f$ qui s'annule en 0 ($F$ est donc de classe $C^1$). En intégrant la relation par rapport à $x$, on a :

$$\forall a, y \in \mathbb{R},\ F(a+y) - F(y) + F(a-y) - F(-y) = \int_0^a (f(x+y) + f(x-y))\,\mathrm{d}x = 2f(y)\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2f(y)F(a).$$

Comme $f$ est non nulle, $F$ l'est également : on peut donc choisir $a$ tel que $F(a) \neq 0$. On a donc :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ f(y) = \frac{F(a+y) - F(y) + F(a-y) - F(-y)}{2F(a)}$$

Comme $F$ est $C^1$, $f$ est de classe $C^1$, puis $F$ est de classe $C^2$, puis $f$ est de classe $C^2$, et ainsi de suite : $f$ est de classe $C^\infty$ et on peut appliquer le b).

**22)** Considérons la fonction $g$ définie par :

$$\forall x \in [a,b],\ g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{sinon} \end{cases}$$

$g$ est continue sur $[a,b]$ (la continuité en $a$ vient de la définition de $f'(a)$) et dérivable sur $]a,b]$, avec :

$$\forall x \in ]a,b],\ g'(x) = \frac{f'(x)(x-a) - (f(x)-f(a))}{(x-a)^2}.$$

Nous devons donc démontrer qu'il existe $c \in ]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$.

Supposons que $g$ est injective. Comme elle est continue, elle est strictement monotone ; sans perte de généralité, supposons que $g$ est croissante. On a alors :

$$\forall x \in ]a,b],\ f'(a) \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

On en déduit :

$$\forall x \in ]a,b],\ f(x) \leq f(a) + fracf(b) - f(a)b - a\,(x-a)$$

puis

$$\forall x \in ]a,b],\ f(b) - f(x) \geq f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(x-a) = (f(b)-f(a))\frac{b-x}{b-a}$$

ce qui donne :

$$\forall x \in ]a,b[,\ \frac{f(b)-f(x)}{b-x} \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

En faisant tendre $x$ vers $b^-$, on obtient une absurdité :

$$f'(a) = g(a) < g(b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b) = f'(a).$$

Nous avons donc démontré que $g$ n'est pas injective : il existe alors $\alpha, \beta$ tels que $a \leq \alpha < \beta \leq b$ et $g(\alpha) = g(\beta)$ et le théorème de Rolle assure l'existence de $c \in ]\alpha, \beta[$ tel que $g'(c) = 0$ : cela donne exactement la relation demandée.

**23)** a) Si $x \in \{a,b\}$, on peut choisir $c$ quelconque, puisque $f(x) - L(x) = (x-a)(x-b) = 0$.

Sinon, on considère la fonction auxiliaire $\varphi :\ t \longmapsto f(t) - L(t) - \dfrac{M}{2}\,(t-a)(t-b)$, où $M$ est choisi de sorte que $\varphi(x) = 0$ ($M$ est défini de façon unique, car $(x-a)(x-b)$ est non nul). $\varphi$ est deux fois dérivable sur $[a,b]$ (avec $\varphi'' = f'' - M$) et s'annule en les trois points distincts $a$, $x$ et $b$. Le théorème de Rolle prouve qu'il existe deux réels $d_1$ et $d_2$ tels que $a < d_1 < x < d_2 < b$ et $\varphi'(d_1) = \varphi'(d_2) = 0$. Une nouvelle application du théorème de Rolle prouve l'existence de $c \in ]d_1, d_2[$ tel que $\varphi''(c) = 0$. Cela donne $M = f''(c)$, et l'égalité $\varphi(x) = 0$ permet de conclure.

b) Appliquons le a) avec $x = \alpha$ : il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(\alpha) = f(\alpha) - L(\alpha) = \dfrac{f''(c)}{2}\,(\alpha-a)(\alpha-b)$. Appliquons ensuite le théorème des accroissements finis à $f$, entre les points $\alpha$ et $\alpha_0$ : il existe $d \in [a,b]$ tel que $f(\alpha) = f(\alpha) - f(\alpha_0) = f'(d)(\alpha - \alpha_0)$. Ces deux égalités donnent la relation demandée (en remarquant que $f'(d) \neq 0$).

Nous avons $|\alpha - \alpha_0| \leq \dfrac{M(\alpha-a)(b-\alpha)}{2m} = \delta$ et $\alpha_0 \in [a_1, b_1]$, avec $a_1 = \max(a, \alpha - \delta)$ et $b_1 = \min(b, \alpha + \delta)$.

c) Pratiquement, les valeurs $M$ et $m$ sont presque constantes (on part de $a$ et $b$ proche de $\alpha_0$). On ne recalcule donc pas ces valeurs à chaque pas et on garde pour le calcul des $a_n, b_n$ le coefficient $\dfrac{M}{2m}$ initial. Pour montrer facilement la convergence de la méthode, on utilise une majoration un peu plus brutale :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} - a_{n+1} \leq 2\, \frac{M}{2m}\, \frac{(b_n - a_n)^2}{4}$$

puisque la fonction $t \longmapsto (t - a_n)(b_n - t)$ atteint son maximum en $t = \dfrac{a_n + b_n}{2}$. En posant $K = \dfrac{M}{4m}$, nous obtenons ainsi

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} - a_{n+1} \leq K\,(b_n - a_n)^2$$

Si les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ ne converge pas vers $\alpha_0$, la suite $(b_n - a_n)$, qui est positive et décroissante, converge vers une valeur $\ell$ strictement positive. En faisant tendre $n$ vers l'infini dans l'inégalité précédente, nous obtenons $\ell \leq K\,\ell^2$. Cela donne alors

$$\frac{1}{K} \leq \ell \leq b_0 - a_0 = b - a.$$

Par contraposée, nous en déduisons que si $b - a < \dfrac{1}{K}$, les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ convergent vers $\alpha_0$ (avec une convergence quadratique).

d) On pose $a = 1.4$, $b = 1.5$ et $f :\ x \longmapsto x^2 - 2$. Nous avons $M = 2$, $m = 2.8$ et $K = \dfrac{5}{28}$ (nous avons bien $b - a < \dfrac{28}{5}$). La fonction `pas` calcule la liste $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ en fonction de la liste $[a_n, b_n]$ :

```
> M := 2: m := 28/10:  f := x -> x^2-2:
```

```
> solve((f(b)-f(a)/(b-a)*x+f(a),x);
```

$$\frac{ba + 2}{a + b}$$

```
> pas := proc(L)
    local a,b,alpha,delta;
    a := L[1];
    b:=L[2];
    alpha := (a*b+2)/(a+b);
    delta :=M/(2*m)*(alpha-a)*(b-alpha) ;
    [max(a,alpha-delta),min(b,alpha+delta)]
  end;
```

```
> L:=[1.4,1.5]: L[2]-L[1];
```

$$0.1$$

```
> L := pas(L): L[2]-L[1];
```

$$0.000849330$$

```
> L := pas(L): L[2]-L[1];
```

$$2.\ 10^{-9}$$

```
> L := pas(L): L[2]-L[1];
```

$$0.$$

```
> Digits := 200:
> L := [1.4,1.5]:
> L:=pas(L): evalf(L[2]-L[1]);
```

$$0.00084932903006624766434516731781892305078987599796161032784100560557159843 72\ldots$$

```
> L:=pas(L): evalf(L[2]-L[1]);
```

$$2.5394999218260087090599535852117358406919659218698881024007120538\ldots\ 10^{-9}$$

```
> L:=pas(L): evalf(L[2]-L[1]);
```

$$2.3032355635050722562851407774753989932552705535988640791041826 18\ldots\ 10^{-20}$$

```
> L:=pas(L): evalf(L[2]-L[1]);
```

$$1.8946050217837599044012772596977833104196596530086576137009574 2407\ldots\ 10^{-42}$$

```
> L:=pas(L): evalf(L[2]-L[1]);
```

$$1.2819743530600861935316283492214934550783293610454345081006163656643556500 7209\ldots\ 10^{-86}$$

```
> L:=pas(L): evalf(L[2]-L[1]);
```

$$5.869493721085094739848194\ 10^{-175}$$

```
> L[1];
```

1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379907324784621070388503875343276415727350138462309122970249248360558507372126441214970999358314132226659275055921718001475851187566471448

```
> evalf(sqrt(2));
```

1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379907324784621070388503875343276415727350138462309122970249248360558507372126441214970999358314132226659275055927557999505011527820605715

**24)** a) Prouver la propriété par récurrence sur $k$.

- Pour $k = 1$, on applique simplement le théorème des accroissements finis ($f$ est continue sur $[t, t+1]$ et dérivable sur $]t, t+1[$).
- Soit $k \geq 1$ et supposons la propriété vérifiée au rang $k$. Pour $t > 0$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence au rang $k$ à la fonction $\Delta(f)$ : il existe $c \in ]t, t+k[$ tel que $\Delta^k(\Delta(f))(t) = (\Delta(f))^{(k)}(c)$. Comme $(\Delta(f))^{(k)}(c) = f^k(c+1) - f^k(c)$, on peut ensuite appliquer le théorème des accroissements finis : il existe $d \in ]c, c+1[$ tel que $\Delta^{k+1}(f)(t) = f^{(k+1)}(d)$, avec $t < c < d < c+1 < t+k+1$. Ceci prouve le résultat au rang $k+1$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $n^x \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f$, définie sur $]0, +\infty[$, qui à $t$ associe $t^x$. $f$ est de classe $C^\infty$ et $f^{(k)}(t) = x(x-1)\dots(x-k+1)t^{x-k}$ pour tous $t > 0$ et $k \in \mathbb{N}$. Fixons $k \in \mathbb{N}$ tel que $k > x$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists c_n \in ]n, n+k[,\ \Delta^k(f)(n) = x(x-1)\dots(x-k+1)c_n^{x-k}$$

Comme $f(\mathbb{N}^*) \subset \mathbb{Z}$, $\Delta^k(f)(n) \in \mathbb{Z}$ pour tout $n$ et $x(x-1)\dots(x-k+1)c_n^{x-k}$ tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini (car $c_n$ tend vers $+\infty$ et $x - k < 0$). On en déduit que $x(x-1)\dots(x-k+1)c_n^{x-k}$ est nul pour $n$ assez grand, i.e. que $x \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ : $x$ et un entier naturel.

**25)** Supposons qu'un tel polynôme $R$ existe et notons $d$ son degré ($R$ est trivialement non nul). On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ R'(t) + 2tR(t) = 1$$

ce qui est absurde car $2XR$ est de degré $d+1$ et $1 - R'$ est de degré au plus $d-1$.

**26)** Notons $u$ la fonction $f' - f$ : $f$ est solution de l'équation différentielle $y' - y = u$, dont la solution générale est

$$y(x) = e^x \left( K + \int_0^x u(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t \right).$$

La condition $f(0) = 0$ permet donc d'écrire :

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = e^x \int_0^x u(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

En particulier, avec $x = 1$ :

$$1 = f(1) = e\int_0^1 u(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t \leq e\int_0^1 |u(t)| \underbrace{e^{-t}}_{\leq 1}\,\mathrm{d}t \leq e\int_0^1 |u(t)|\,\mathrm{d}t$$

ce qui est l'inégalité demandée.

**27)** a) La valeur $M_n = \sup_{0 \leq x \leq 1/n} |f(x)|$, tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini (car $f$ est continue en 0 avec $f(0) = 0$), donc :

$$|u_n| \leq M_n \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = M_n\,\frac{n+1}{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

b) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que $f'(0) - \varepsilon \leq \frac{f(x)}{x} \leq f'(0) + \varepsilon$ pour tout $x \in ]0, \eta[$. Soit $n$ tel que $1/n \leq \eta$. On a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ (f'(0) - \varepsilon)\,\frac{k}{n^2} \leq f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq (f'(0) + \varepsilon)\,\frac{k}{n^2}$$

d'où $(f'(0) - \varepsilon)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^4} \leq u_n \leq (f'(0) + \varepsilon)\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^4}$, soit

$$(f'(0) - \varepsilon)\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \leq nu_n \leq (f'(0) + \varepsilon)\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}.$$

Comme $(f'(0) + \varepsilon)\dfrac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$ tend vers $f'(0) + \varepsilon$ quand $n$ tend vers l'infini, il existe $n_0$ tel que

$$\forall n \geq n_0, (f'(0) + \varepsilon)\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \leq f'(0) + 2\varepsilon.$$

De même, il existe $n_1$ tel que :

$$\forall n \geq n_1, f'(0) - 2\varepsilon \leq (f'(0) - \varepsilon)\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \leq f'(0) + 2\varepsilon.$$

Pour $n \geq max(n_0, n_1, 1/\eta)$, nous avons donc $|nu_n - f'(0)| \leq 2\varepsilon$, donc $nu_n$ converge vers $f'(0)$. ainsi, si $f'(0)$ est non nul, $u_n$ est équivalent à $\dfrac{f'(0)}{n}$. Sinon, $u_n$ est négligeable devant $1/n$.

**28)** Soient $x, y > 0$ et $\alpha \in [0,1]$, avec $x \neq y$. On a :

$$g(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha g(x) + (1-\alpha)g(y) \Longleftrightarrow (\alpha x + (1-\alpha)y)\, f\left(\frac{1}{\alpha x + (1-\alpha)y}\right) \leq \alpha x\, f\left(\frac{1}{x}\right) + (1-\alpha)y\, f\left(\frac{1}{y}\right)$$

Comme $\dfrac{1}{\alpha x + (1-\alpha)y}$ est compris entre les deux réels distincts $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$, il existe un unique $\beta \in [0,1]$ tel que

$$\frac{1}{\alpha x + (1-\alpha)y} = \beta\frac{1}{x} + (1-\beta)\frac{1}{y}$$

On a $\beta = \left(\dfrac{1}{\alpha x + (1-\alpha)y} - \dfrac{1}{y}\right)\dfrac{xy}{y-x} = \dfrac{\alpha x}{\alpha x + (1-\alpha)y}$. Nous avons ensuite :

$$\frac{\alpha x}{\alpha x + (1-\alpha)y} = \beta \text{ et } \frac{(1-\alpha)y}{\alpha x + (1-\alpha)y} = 1 - \beta$$

ce qui donne :

$$g(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha g(x) + (1-\alpha)g(y) \Longleftrightarrow f\left(\beta\frac{1}{x} + (1-\beta)\frac{1}{y}\right) \leq \beta\, f\left(\frac{1}{x}\right) + (1-\beta)\, f\left(\frac{1}{y}\right)$$

Comme $\alpha \longmapsto \beta$ et $x \longmapsto 1/x$ sont des bijections respectivement de $[0,1]$ sur $[0,1]$ et de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, nous avons :

$$\begin{aligned} g \text{ est convexe} &\Longleftrightarrow \forall x,y>0,\ \forall\alpha\in[0,1],\ g(\alpha x+(1-\alpha)y)\leq\alpha g(x)+(1-\alpha)g(y) \\ &\Longleftrightarrow \forall u,v>0,\ \forall\beta\in[0,1],\ g(\beta u+(1-\beta)v)\leq\beta g(u)+(1-\beta)g(v) \\ &\Longleftrightarrow f \text{ est convexe} \end{aligned}$$

## Exercices X-ENS

**29)** Notons $A = \{x \in [0,1],\ x \leq f(x)\}$. Comme $A$ est majoré et non vide (il contient 0), il possède une borne supérieure $a$ et il existe une suite $(a_n)$ d'éléments de $A$ qui converge vers $a$. Comme $a_n \leq a$ et $f$ croissante, on a : $a_n \leq f(a_n) \leq f(a)$ pour tout $n$, donc $a \leq f(a)$ en faisant tendre $n$ vers l'infini.

On a ensuite (par croissance de $f$) $f(a) \leq f(f(a))$, donc $f(a) \in A$ : on en déduit que $f(a) \leq a$, d'où $a = f(a)$ et $f$ possède au moins un point fixe.

**30)** Sans perte de généralité, on peut supposer que $f$ est croissante. Pour chaque $a \in \mathbb{R}$, $f$ possède une limite à gauche et une limite à droite en $a$, que nous noterons $f(a^-)$ et $f(a^+)$. En effet, les partie $\{f(x),\ x < a\}$ et $\{f(x),\ x > a\}$ sont non vides et respectivement majorée et minorée par $f(a)$ ; on peut donc définir :

$$l^- = \sup_{x<a} f(x) \text{ et } l^+ = \inf_{x>a} f(x)$$

et on montre facilement que $f(x) \xrightarrow[x\to a^-]{} l^-$ et $f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} l^+$.

On a ensuite $f(a^-) \leq f(a) \leq f(a^+)$, et $a \in D_f$ si et seulement si $s(a) = f(a^+) - f(a^-) > 0$ (en un tel point, on dit que $f$ fait le *saut* $s(a)$). Pour montrer que $D_f$ est au plus dénombrable, nous allons construire une application injective de $D_f$ dans un ensemble dénombrable simple. L'idée, c'est qu'à chaque point de discontinuité $a$ est associé l'intervalle $I_a = ]f(a^-), f(a^+)[$, et que ces intervalles sont deux à deux disjoints (si $a < b$, en choisissant $c \in ]a,b[$, on a $f(a^+) \leq f(c) \leq f(b^-)$). Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on peut donc choisir pour chaque $a \in D_f$ un élément $r_a \in \mathbb{Q} \cap ]f(a^-), f(a^+)[$ ; l'application $a \longmapsto r_a$ est injective de $D_f$ dans $\mathbb{Q}$, donc $D_f$ est au plus dénombrable.

Réciproquement, soit $D$ une partie de $\mathbb{R}$ au plus dénombrable. Si $D = \{a_1, \dots, a_k\}$ où les $a_i$ sont deux à deux distincts, on peut construire une application en escalier $f$ telle que $D_f = D$ : on choisit des sauts $s_1, \dots, s_k$ strictement positifs et on pose

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{i=1}^{k} s_i \mathbf{1}_{]-\infty, a_i]}(x)$$

où $\mathbf{1}_A$ désigne l'indicatrice de la partie $A$.

Pour généraliser au cas où $D = \{a_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable, il suffit de choisir des sauts $s_i$ dont la somme est finie. Par exemple, on peut poser :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \mathbf{1}_{]-\infty, a_i]}(x)$$

$f$ est bien définie et la série converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$. On a :

- $f$ est croissante comme somme (infinie) de fonctions croissantes ;
- si $a \notin D$, chaque fonction $x \longmapsto \frac{1}{2^i} \mathbf{1}_{]-\infty, a_i]}(x)$ est continue en $a$, donc $f$ est continue en $a$ (grâce à la convergence uniforme) ;
- si $a = a_{i_0}$, la fonction $g = \displaystyle\sum_{\substack{0 \le i \\ i \ne i_0}} \frac{1}{2^i} \mathbf{1}_{]-\infty, a_i]}$ est continue en $a$ (comme précédemment), donc $f$ est discontinue en $a$ comme somme de $g$ continue et de $\frac{1}{2^i} \mathbf{1}_{]-\infty, a_{i_0}]}$ discontinue en $a_{i_0}$ (on peut aussi remarquer que $f$ fait en $a_{i_0}$ le saut $\frac{1}{2^{i_0}}$).

Nous avons donc bien construit une fonction croissante $f$ telle que $D_f = D$.

**31)** a) L'ensemble $K_n = \{P \in \mathbf{E}_n,\ d(f, P) \le \|f\|\}$ est un fermé borné, donc un compact de $E_n$ ($E_n$ est de dimension finie). On en déduit que l'application continue $P \longmapsto d(f, P)$ est minorée et atteint sa borne inférieure $m$. Il existe donc $P_n \in K_n$ tel que $m = d(f, P_n)$. On a ensuite, pour $P \in E_n$ :

- si $P \in K_n$, $d(f, P) \ge d(f, P_n)$ ;
- sinon, $d(f, P) \ge \|f\| = d(f, 0) \ge d(f, P_n)$ car $0 \in K_n$.

La distance de $f$ à $E_n$ est donc bien atteinte.

b) Comme $f$ est continue sur le segment $[0, 1]$, elle y est bornée et elle atteint ses bornes. Il existe donc $a$ et $b$ tels que $\forall x \in [0, 1],\ f(a) \le f(x) \le f(b)$. Posons $Q_0 = \frac{f(a)+f(b)}{2}$. On a clairement $d(f, Q_0) = \frac{f(b)-f(a)}{2}$ et pour $p \in \mathbb{R}$ :

- si $p > \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$, $|f(a) - p| = f(a) - p > \dfrac{f(b)-f(a)}{2}$, donc $d(f, p) > \dfrac{f(b)-f(a)}{2}$ ;
- si $p < \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$, $|f(b) - p| = p - f(b) > \dfrac{f(b)-f(a)}{2}$, donc $d(f, p) > \dfrac{f(b)-f(a)}{2}$ ;

Ainsi, $d(f, p) \ge d(f, Q_0)$ avec égalité si et seulement si $p = Q_0$ : ceci prouve que la distance de $f$ à $E_0$ est atteinte en $Q_0$ et uniquement en $Q_0$. On a donc $P_0 = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ et $M_0 = \frac{f(b)-f(a)}{2}$.

Nous avons d'autre part $(f - P_0)(a) = M_0$ et $(f - P_0)(b) = -M_0$. Si $a < b$, on pose $\varepsilon = 1$ et on a bien les propriétés attendues. Sinon, on échange $a$ et $b$ et on pose $\varepsilon = -1$.

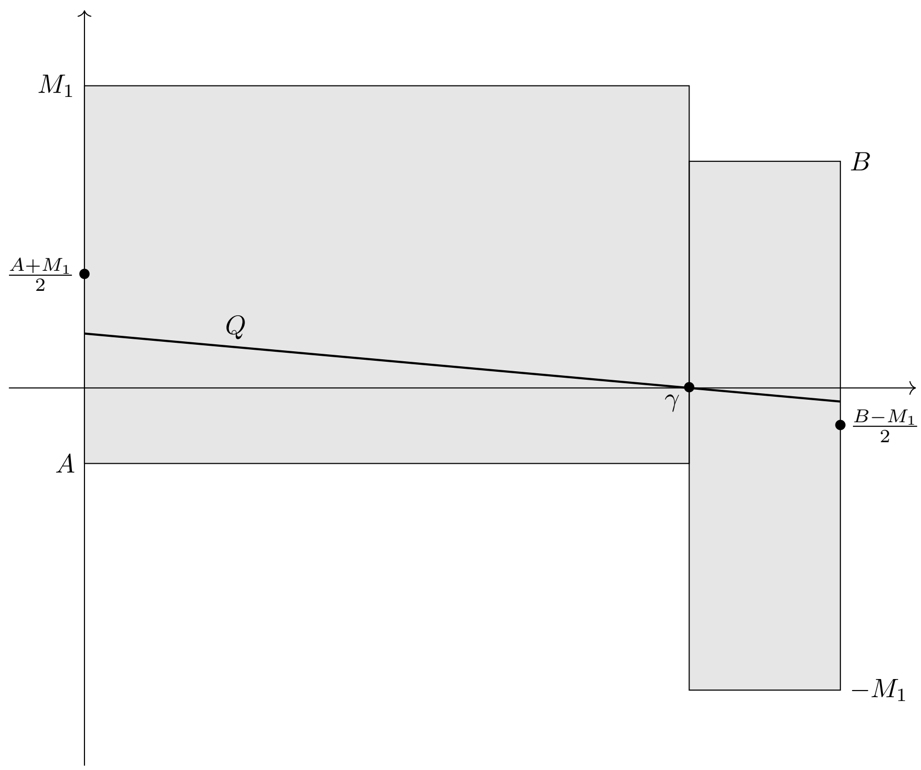
c) La distance de $f$ à $E_1$ est atteinte en $P_1$, donc la distance de $g = f - P_1$ à $E_1$ est atteinte en 0. en particulier, le $P_0$ de $g$ est le polynôme nul. D'après ce qui précède, $\sup_{[0,1]} g = M_1$ et $\inf_{[0,1]} g = -M_1$. Les parties $K^+ = \{x \in [0, 1],\ g(x) = M_1\}$ et $K^- = \{x \in [0, 1],\ g(x) = -M_1\}$ sont compactes non vides : on peut donc définir leurs minimums $\alpha$ et $\beta$. Si $\alpha < \beta$, on définit $a = \alpha$, $\varepsilon = 1$ et $b = \beta$ ; sinon, on pose $a = b$, $\varepsilon = -1$ et $b = \alpha$. Les preuves étant symétriques (il suffit de remplacer $g$ par $-g$), terminons la preuve en supposant que $\alpha < \beta$. Il reste à démontrer l'existence de $c$ : supposons par l'absurde que $c$ n'existe pas. Nous avons donc :

$$\forall x > c,\ g(x) \ne M_1.$$

La situation est donc la suivante :

- $a < b$, $g(a) = M_1$ est $g(b) = -M_1$ ;
- pour tout $x < b$, $g(x) > -M$ et pour tout $x > b$, $g(x) < M$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\gamma \in [a, b]$ tel que $g(\gamma) = 0$. On a alors $g(x) > -M$ sur $[0, \gamma]$ et $g(x) < M$ sur $[\gamma, 1]$. En posant $A = \min{[0,\gamma]} g$ et $B = \max_{[\gamma,1]} g$, nous avons $A > -M$ et $B < M$. Le graphe de $g$ est donc contenu dans la partie grisée :




On peut alors choisir une fonction affine $Q = k(X - \gamma)$ telle que $0 < Q(0) \leq \frac{A+M_1}{2}$ et $\frac{B-M_1}{2} \leq Q(1) < 0$. On a alors :

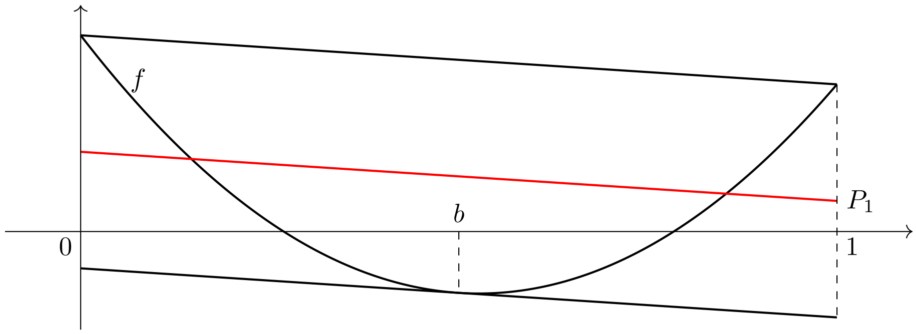
- si $x = \alpha$, $g(x) - Q(x) = 0$ ;
- si $x \in ]\alpha, 1]$, $0 > Q(x) \geq Q(1)$ et $-M_1 \leq g(x) \leq B$, d'où $-M_1 < g(x) - Q(x) \leq B - Q(1) = \frac{M_1+B}{2} < M_1$ ;
- si $x \in [0, \alpha[$, $0 < Q(x) \leq Q(0)$ et $A \leq g(x) \leq M_1$, d'où $-M_1 < \frac{A-M_1}{2} \leq A - Q(0) < g(x) - Q(x) < M_1$.

On en déduit que $d(g, Q) = \max |g(x) - Q(x)| < M_1$, ce qui est absurde car $d(g, E_1) = M_1$.

Nous avons donc démontré par l'absurde qu'il existait $c > b$ tel que $g(c) = -M_1$.

Supposons que $Q \in E_1$ vérifie $d(g, 0) = d(g, Q)$. Pour simplifier l'écriture, supposons que l'on a $\varepsilon = 1$. On a alors : $M - Q(a) = g(a) - Q(a) \leq d(g, Q) = M$, donc $Q(a) \geq 0$ ; de même, $-M - Q(b) = g(b) - Q(b) \geq -M$, donc $Q(b) \leq 0$, puis $M - Q(c) = g(c) - Q(c) \leq M$. Ainsi, $Q$ est de degré au plus 1 avec $Q(a) \geq 0$, $Q(b) \leq 0$, $Q(c) \geq 0$ et $a < b < c$ : on en déduit que $Q = 0$. 0 est donc l'unique polynôme de $E_1$ qui est à la distance minimale de $g$, ce qui prouve que $P_1$ est l'unique polynôme de $E_1$ qui est à la distance $M_1$ de $f$.

Quand $f$ est convexe et dérivable, la fonction $g = f - P_1$ est également convexe et dérivable. On a alors nécessairement $a = 0$, $c = 1$ et $g'(b) = 0$ ; ceci donne $f'(b) = f(1) - f(0)$. L'existence de $b$ est assurée par le théorème des accroissements finis ; par croissance de $f'$, l'ensemble des $b$ tels que $f'(b) = f(1) - f(0)$ est un intervalle et toutes les tangentes au graphe de $f$ en ces différents points sont égales. On construit la droite représentative de $P_1$ en prenant la « médiane » de la corde qui relie les points $(0, f(0))$ et $(1, f(1))$ et de la tangente de pente $f(1) - f(0)$. Cela donne le schéma :




d) Soit $n \geq 2$ et posons $g = f - P_n$. On peut définir $a_1 = a$ et $a_2 = b$ comme au début de la question c) et supposer que $a_1 < a_2$ (quitte à changer $f$ en $-f$). On a donc $f(a_1) = M_n$ et $f(a_2) = -M_n$. On continue à construire $(a_1, \dots, a_k)$, tant que c'est possible, avec :

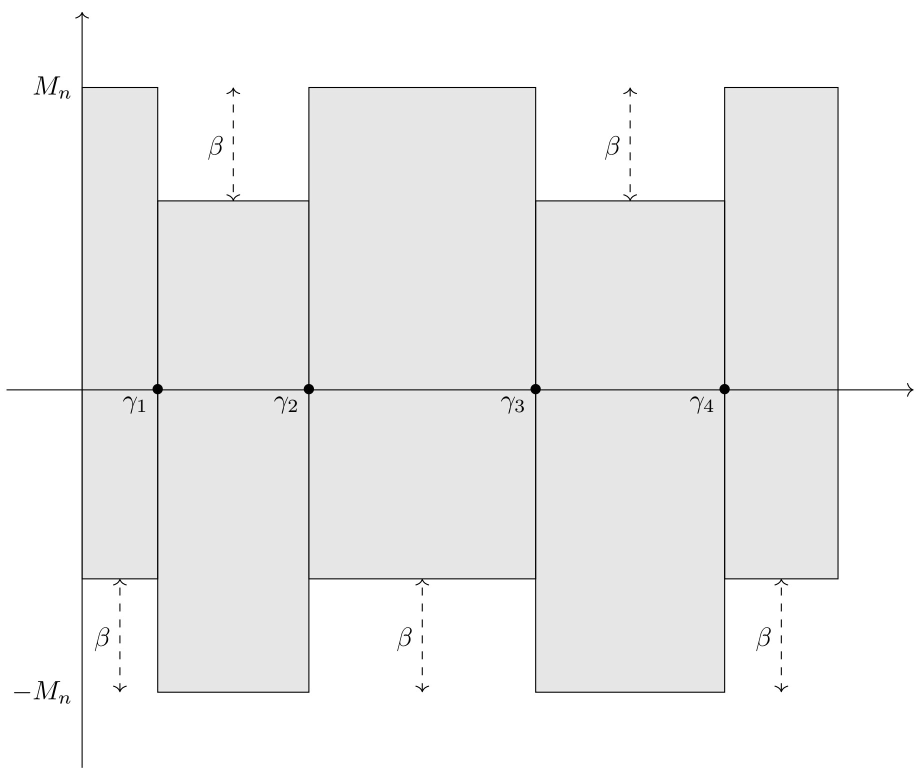
$$a_{k+1} = \min\{x \in\in [a_k, 1],\ g(x) = -g(a_k).$$

La preuve de la question c) prouve que $a_3$ est bien défini (c'est le coefficient $c$). Supposons que cette construction s'arrête quand $k \leq n+1$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, ils existent $\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}$ tels que $a_1 < \gamma_1 < a_2 < \dots < a_{k-1} < \gamma_{k-1} < a_k$ et $g(\gamma_1) = \dots = g(\gamma_{k-1}) = 0$.

Notons enfin $I_0 = [0, \gamma_1],\ I_1 = [\gamma_1, \gamma_2],\ \dots,\ I_{k-2} = [\gamma_{k-2}, \gamma_{k-1}]$ et $I_{k-1} = [\gamma_{k-1}, 1]$. Comme $g$ ne prend pas la valeur $-M_n$ sur les $I_{2i}$ ni la valeur $M_n$ sur les $I_{2i+1}$, il existe $\beta \in ]0, M_n[$ tel que pour tout $x \in [0,1]$ :

- si $x$ est dans un intervalle $I_{2i}$, $-M_n + \beta \leq g(x) \leq M$ ;
- si $x$ est dans un intervalle $I_{2i+1}$, $-M \leq g(x) \leq M - \beta$.

Ainsi, avec $k = 5$, la courbe représentative de $g$ est contenue dans une partie grisée du type suivant :




Considérons alors le polynôme $P = (-1)^{k-1} \dfrac{\beta}{2} \displaystyle\prod_{i=1}^{k-1} (X - \alpha_i)$. Nous avons alors, pour tout $x \in [0,1]$ :

- si $x$ est l'un des $\alpha_i$, $f(x) - P(x) = 0$ ;

- si $x$ est à l'intérieur d'un intervalle $I_{2i}$, $0 < P(x) \leq \dfrac{\beta}{2}$ et $-M + \beta \leq g(x) \leq M$, ce qui donne :

$$-M < -M + \frac{\beta}{2} \leq g(x) - P(x) < M$$

- si $x$ est à l'intérieur d'un intervalle $I_{2i+1}$, on obtient symétriquement

$$-M < g(x) - P(x) \leq M - \frac{\beta}{2} < M$$

Nous avons donc $\|g - P\| = \max\limits_{0 \leq x \leq 1} |g(x) - P(x)| < M$, ce qui est absurde car $P \in E_{k-1} \subset E_n$. On en déduit que la construction se fait jusqu'au rang $n+2$. Nous avons donc démontré qu'il existait une famille $(a_i)_{1 \leq i \leq n+2}$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tels que :

$$0 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+2} \leq 1,\ g(a_i) = (-1)^{i+1} \varepsilon\, M_n \text{ pour tout } i \in [\![1, n+2]\!].$$

On en déduit que si $Q$ est un polynôme de $E_n$ tel que $d(g, Q) = M_n$, alors $(-1)^i\, \varepsilon\, Q(a_i) \geq 0$ pour tout $i \in [\![1, n+2]\!]$ : ceci impose $Q = 0$. En effet, on montre par récurrence sur $n$ la propriété :

$\mathcal{P}_n$ : si $P$ est un polynôme réel de degré au plus $n$ et s'il existe $n+2$ réels $a_0 < a_1 < \cdots < a_{n+1}$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\varepsilon\, (-1)^i\, P(a_i) \geq 0$ pour tout $i$, alors $P = 0$.

- si $P$ est un polynôme constant qui prend des signes opposés en deux points, $P$ est nul ;

- soit $n \geq 0$ et supposons la propriété vraie au rang $n$ ; soit $P$ polynôme de degré au plus $n+1$ vérifiant les hypothèses de $\mathcal{P}_{n+1}$. Par le théorème des accroissements finis, il existe une famille $(y_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ vérifiant :

$$\begin{cases} a_0 < b_0 < a_1 < b_1 < \cdots < a_{n+1} < b_{n+1} < a_{n+2} \\ P'(b_i) = \dfrac{P(a_{i+1}) - P(a_i)}{a_{i+1} - a_i} \text{ pour } 0 \leq i \leq n+1 \end{cases}$$

  L'hypothèse de récurrence s'applique donc au polynôme $P'$ : on en déduit que $P' = 0$, puis $P = 0$ ($P$ est constant et on peut appliquer $\mathcal{P}_0$).

Nous avons donc démontré que $P_n$ est le seul polynôme de $E_n$ tel que $d(f, P_n) = M_n$.

**Remarque :** on peut en fait démontrer plus généralement que si $P \in E_n$ est tel qu'il existe $n+2$ réels $a_i$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ vérifiant :

$$0 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+2} \text{ et } (f - P)(a_i) = (-1)^{i+1} \varepsilon\, d(f, P)$$

alors $P$ est égal à $P_n$. En effet, on a :

$$\forall i \in [\![1, n+2]\!],\ (-1)^{i+1} \varepsilon\, (P - P_n)(a_i) = d(f, P) + (-1)^{i+1} (f - P_n)(a_i) \geq d(f, P) - d(f, P_n) \geq 0$$

Le polynôme $P_n - P$ « change de signe » $n+2$ fois et est de degré au plus $n$ : il est donc nul et $P = P_n$.

**32)** Soit $\varepsilon > 0$. $f$ est continue sur le compact $[0, 1]^2$, donc elle est uniformément continue : il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, x', y, y' \in [0, 1],\ (|x - x'| < \eta \text{ et } |y - y'| < \eta) \Longrightarrow |f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon.$$

Soient $x, x' \in [0, 1]$ tels que $|x - x'| < \eta$. On a :

$$\forall y \in [0, 1],\ f(x', y) - \varepsilon < f(x, y) < f(x', y) + \varepsilon$$

d'où, en prenant le maximum :

$$g(x') - \varepsilon \leq g(x) \leq g(x') + \varepsilon$$

Ceci prouve que $g$ est uniformément continue sur $[0, 1]$.

**33)** a) Notons $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ et, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $L_i = \displaystyle\prod_{\substack{0\le k\le n\\ k\ne i}} \frac{X-a_k}{a_i-a_k}$. Le polynôme d'interpolation de Lagrange de $f$ associé à $\sigma$ est :

$$P_f(X) = \sum_{i=0}^{n} f(a_i)\, L_i.$$

On a donc, en notant $\delta = \dfrac{y-x}{n}$ le pas de la subdivision :

$$\begin{aligned}
T_f(x,y) &= \sum_{i=0}^{n} f(a_i)\, L_i^{(n)} \\
&= \sum_{i=0}^{n} f(a_i)\, \frac{n!}{\prod_{\substack{0\le k\le n\\ k\ne i}} \delta(i-k)} \\
&= \frac{1}{\delta^n} \sum_{i=0}^{n} f(a_i)\, \frac{n!}{i(i-1)\dots 1(-1)(-2)\dots(i-n)} \\
&= \frac{1}{\delta^n} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i}\, f(a_i)
\end{aligned}$$

b) En notant le DL de $f$ sous la forme $f(x) = Q(x) + x^n\varepsilon(x)$ (où $\varepsilon$ est une fonction qui tend vers 0 quand $x$ tend vers 0), on a :

$$T_f(x,y) = \frac{1}{\delta^n} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i}\, Q(a_i) + \underbrace{\frac{1}{\delta^n} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i}\, a_i^n \varepsilon(a_i)}_{=R(x,y)} = T_Q(x,y) + R(x,y).$$

Comme $P_Q = Q$ ($Q$ est de degré au plus $n$ et coïncide avec $Q$ en les points $a_i$), on a $T_Q(x,y) = Q^{(n)} = n!\, a_n$.

D'autre part, si on fixe $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall z \in ]-\eta, \eta[,\ |\varepsilon(z)| \le \varepsilon$. On en déduit :

$$\forall x \in ]-\eta, 0[,\ \forall y \in ]0, \eta[,\ R(x,y)| \le \varepsilon \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n\, \varepsilon$$

puisque $|a_i|^n \le \delta^n$ et $|\varepsilon(a_i)| \le \varepsilon$ pour tout $i$. On a ainsi démontré que $T_f(x,y)$ tend vers $n!\, a_n$ quand $(x,y)$ tend vers $(0^-, 0^+)$.

On en déduit que si $f$ est $n$-fois dérivable en 0, $T_f(x,y)$ tend vers $f^{(n)}(0)$ quand $(x,y)$ tend vers $(0^-, 0^+)$. Ainsi, nous avons (avec $y = h$ et $x = -h$ :

$$\frac{n^n}{(2h)^n} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{i}\, f\left(-h + i\frac{2h}{n}\right) \xrightarrow[h\to 0^+]{} f^{(n)}(0).$$

On retrouve par exemple le résultat classique (n=2) :

$$\frac{f(-h) - 2f(0) + f(h)}{h^2} \xrightarrow[h\to 0]{} f''(0).$$

**Remarque :** on peut démontrer le résultat pour des subdivisions quelconques de $[x,y]$ (et pas seulement pour une subdivision de pas constant). Par exemple, quand $f$ est deux fois dérivable en 0 et que l'on utilise la subdivision $(-h, 0, k)$ avec $h > 0$ et $k > 0$, on obtient :

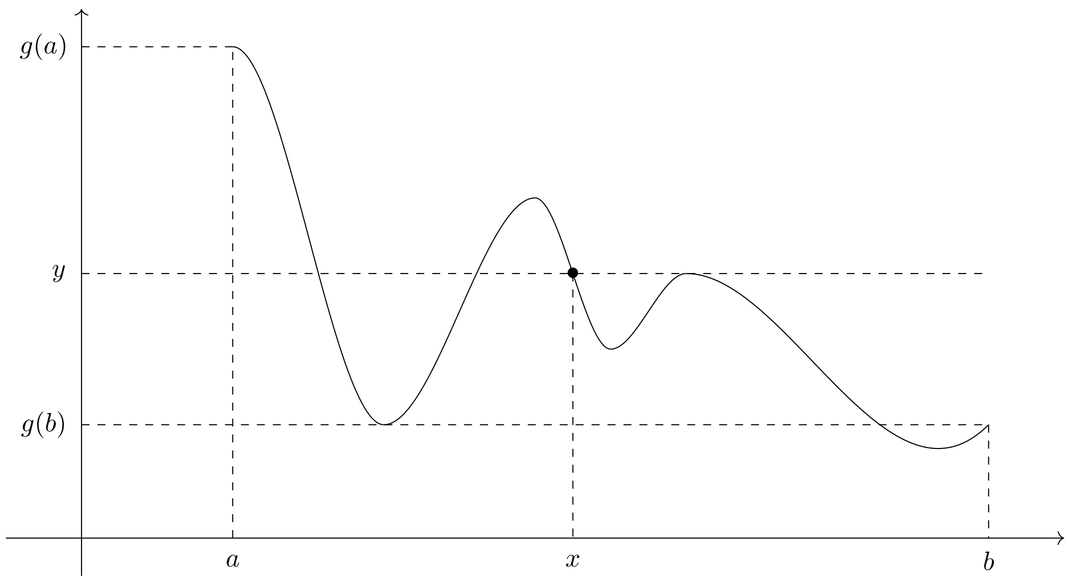
$$\frac{2}{(h+k)hk}\,(kf(-h) - (h+k)f(0) + hf(k)) \xrightarrow[(h,k)\to(0^+,0^+)]{} f''(0).$$

**34)** a) Si $g$ est dérivable en $x$, elle y est pseudo-dérivable, puisqu'un DL donne :

$$\frac{g(x+h)-g(x-h)}{2h} = \frac{(g(x)+hg'(x)+o(h))-(g(x)-hg'(x)+o(h))}{2h} = g'(x)+o(1) \xrightarrow[h\to 0]{} g'x)$$

et on a $\widetilde{g}'(x) = g'(x)$.

b) Supposons que $g$ est pseudo-dérivable en tout point de $I$ mais qu'elle n'est pas croissante. Il existe alors $a, b \in I$ tels que $a < b$ et $f(a) > f(b)$. On peut choisir $y \in ]f(b), f(a)[$ ; l'ensemble $A = \{t \in [a,b],\ f(t) > y\}$ est non vide (il contient $a$ et est majoré par $b$) : on peut donc définir $x = \sup A$. On a par exemple :




Par continuité de $f$, on a $f(t) > m$ pour $t$ proche de $a$ et $f(t) < m$ pour $t$ proche de $b$ : on en déduit que $a < x < b$. Toujours par continuité de $f$, $x$ n'est pas élément de $A$ (sinon, on aurait $f(t) > m$ pour $t$ proche de $x$, ce qui contredirait la définition de $x$).

Par définition de la borne supérieure, il existe une suite $(x_n)$ d'éléments de $A$ telle que $x_n$ converge vers $x^-$. En posant $h_n = x - x_n$, on a $h_n > 0$ (car $x_n \in A$ et $x \notin A$) et $h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Comme $x < b$, Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x + h_n \in [a,b]$ pour $n \geq n_0$. On a alors :

$$\forall n \geq n_0,\ \ f(x-h_n) > m \text{ et } f(x+h_n) < m \text{ (car } x-h_n \in A \text{ et } x+h_n \in [a,b]\setminus A)$$

donc

$$\forall n \geq n_0,\ \ \frac{f(x+h_n)-f(x-h_n)}{2h_n} < \frac{m-m}{2h_n} = 0$$

En faisant tendre $n$ vers l'infini, on obtient $\widetilde{f}'(x) \geq 0$.

Le résultat demandé a donc été démontré par contraposée.

c) Supposons que $g$ est pseudo-dérivable sur $I$ et que $\widetilde{g}'$ est positive sur $I$. Pour $a > 0$, considérons l'application $g_a :\ x \longmapsto f(x) + ax$. On montre facilement que $g_a$ est pseudo-dérivable, avec $\widetilde{g_a}'(x) = \widetilde{g}'(x) + a$ pour tout $x \in I$. Ainsi, $\widetilde{g_a}'(x)$ est strictement positive et $g_a$ est croissante d'après le b). On en déduit :

$$\forall x, y \in I,\ \ (x \leq y) \Longrightarrow (\forall a > 0,\ \ g_a(x) \leq g_a(y))$$

ce qui prouve, en faisant tendre $a$ vers $0^+$, que $g$ est croissante sur $I$.

**35)** Si $f$ est affine, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 1 + ax$ pour tout $x \in [0,1]$. On a alors :

$$\frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 - \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(1+a)^2}{6} \geq 0$$

donc l'inégalité est vérifiée.

Un calcul élémentaire prouve qu'il existe une unique fonction affine $g$ telle $g(0) = 1$ et $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$. Comme

$$\int_0^1 xg(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{2}{3}\left(\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = \frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2,$$

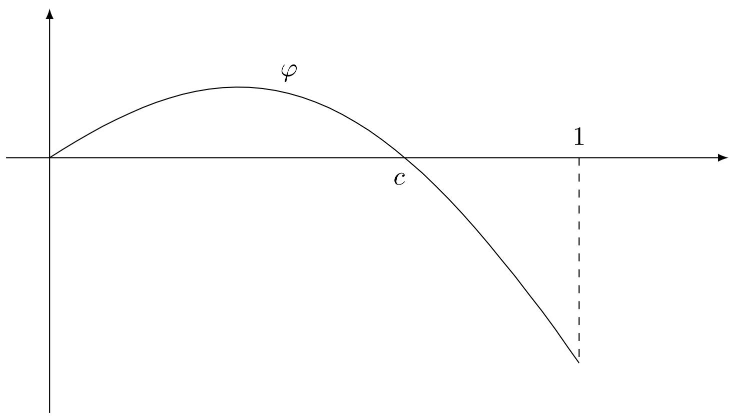
il reste à démontrer que

$$\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 xg(x)\,\mathrm{d}x,$$

i.e. que

$$I = \int_0^1 x(f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \leq 0.$$

La fonction $\varphi = f - g$ est concave, d'intégrale nulle et nulle en 0. Son graphe à l'allure suivante :




En effet, comme $f$ est d'intégrale nulle, elle ne peut pas être strictement négative ou strictement positive sur $]0,1[$ : il existe donc $c \in ]0,1[$ telle que $\varphi(c) = 0$. Par concavité de $\varphi$, on a $\varphi(x) \geq 0$ sur $[0,c]$ et $\varphi(x) \leq 0$ sur $[c,1]$, par décroissance de l'application $x \longmapsto \dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0}$ sur $]0,1]$ :

- si $0 < x \leq c$, $\varphi(x) = x\,\dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} \geq x\,\dfrac{\varphi(c) - \varphi(0)}{c - 0} = 0$ ;
- si $c \leq x \leq 1$, $\varphi(x) = x\,\dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} \leq x\,\dfrac{\varphi(c) - \varphi(0)}{c - 0} = 0$.

On en déduit que $\displaystyle\int_0^1 (x-c)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \leq 0$, puisque la fonction intégrée est négative, ce qui achève la preuve, puisque :

$$\int_0^1 (x - c)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = I - \int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x = I.$$

**36)** a) Si $f$ est monotone, on a pour $\sigma = (t_0, t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{S}_a^b$ :

$$V_\sigma(f) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(t_{k+1} - f(t_k)| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} f(t_{k+1}) - f(t_k)\right| = |f(b) - f(a)|$$

car tous les termes de la somme ont le même signe ; $f$ est donc à variations bornées et $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$.

b) On peut écrire $\sigma_1 = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ et $\sigma_2 = (t_{\varphi(0)}, t_{\varphi(1)}, \dots, t_{\varphi(m)})$ avec $\varphi : \{0, 1, \dots, m\} \longrightarrow \{0, 1, \dots, n\}$ strictement croissante, vérifiant $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(m) = n$. On a alors :

$$\forall i \in \{0, \dots, m-1\},\ |f(t_{\varphi(i+1)}) - f(t_{\varphi(i)})| = \left| \sum_{k=\varphi(i)}^{\varphi(i+1)-1} f(t_{i+1}) - f(t_i) \right| \leq \sum_{k=\varphi(i)}^{\varphi(i+1)-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

et on obtient $V_{\sigma_2}(f) \leq V_{\sigma_1}(f)$ en sommant ces inégalités.

c) Soit $f$ de classe $C^1$. Nous allons montrer que $f$ est à variation bornée et que $V_a^b(f) = \displaystyle\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t$. Nous utilisons le résultat de convergence des sommes de Riemann :

si $g$ est une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute subdivision $\sigma = (t_0, \dots, t_n) \in \mathcal{S}_a^b$ et pour toute famille $(s_0, s_1, \dots, s_{n-1})$ telle que $t_0 \leq s_0 \leq t_1 \leq s_1 \leq \dots \leq s_{n-1} \leq t_n$,

$$\mathrm{pas}(\sigma) < \eta \Longrightarrow \left| \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)\, g(s_i) \right| \leq \varepsilon$$

avec $\mathrm{pas}(\sigma) = \max\limits_{0 \leq i \leq n-1} (t_{i+1} - t_i)$.

Ce résultat n'est au programme que pour les subdivisions régulières pointées à gauche, mais il se démontre très facilement quand $g$ est continue, en utilisant l'uniforme continuité de $g$ sur le compact $[a, b]$.

Fixons donc $\varepsilon > 0$ et soit $\eta > 0$ donné par la propriété précédente appliquée à la fonction $g = |f'|$. Si $\sigma$ est une subdivision quelconque de $[a, b]$, il existe une subdivision $\tilde{\sigma} = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ plus fine que $\sigma$ telles que $\mathrm{pas}(\tilde{\sigma}) < \eta$. On a alors :

$$S_\sigma(f) \leq S_{\tilde{\sigma}}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(t_{k+1} - f(t_k)|.$$

Pour tout $k$, il existe par le théorème des accroissements finis, un élément $c_k \in ]t_k, t_{k+1}[$ tel que $|f(t_{k+1} - f(t_k)| = (t_{k+1} - t_k)|f'(c_k)|$. On en déduit donc :

$$(t_{k+1} - t_k) \min_{t_k \leq t \leq t_{k+1}} g(t) \leq |f(t_{k+1} - f(t_k)| \leq (t_{k+1} - t_k) \max_{t_k \leq t \leq t_{k+1}} g(t).$$

On peut alors fixer, toujours pour tout $k$, des réels $s_k$ et $s'_k$ tels que $\min\limits_{t_k \leq t \leq t_{k+1}} g(t) = g(s_k)$ et $\max\limits_{t_k \leq t \leq t_{k+1}} g(t) = g(s'_k)$, ab-vec $t_k \leq s_k, s'_k \leq t_{k+1}$. On a alors :

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t - \varepsilon \leq \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) g(s_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(t_{k+1} - f(t_k)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) g(s'_k) \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon.$$

Nous avons donc démontré que $S_\sigma(f) \leq \displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon$ pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_a^b$, donc $f$ est à variations bornées sur $[a, b]$ et $V_a^b(f) \leq \displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon$.

On a ensuite $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t - \varepsilon \leq S_{\tilde{\sigma}}(f) \leq V_a^b(f)$.

Ceci ayant été fait pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient $V_a^b(f) = \displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

d) Supposons que $f$ est à variations bornées sur $[a, b]$. Si $\sigma_1 = (t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{S}_a^c$ et $\sigma_2 = (t'_0, t'_1, \dots, t'_m) \in \mathcal{S}_c^b$, notons $\sigma_1 \cup \sigma_2 = (t_0, t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_m)$ : c'est une subdivision de $[a, b]$. Nous avons :

$$S_{\sigma_1}(f) + S_{\sigma_2}(f) = S_{\sigma_1 \cup \sigma_2}(f) \leq V_a^b(f)$$

donc, en fixant $\sigma_2$ :

$$\forall \sigma_1 \in S_a^c,\ S_{\sigma_1}(f) \leq V_a^b(f) - S_{\sigma_2}(f).$$

Ceci prouve que $f$ est à variation bornée sur $[a,c]$ et que $V_a^c(f) \leq V_a^b(f) - S_{\sigma_2}(f)$. Nous avons ensuite :

$$\forall \sigma_2 \in S_c^b,,\ S_{\sigma_2}(f) \leq V_a^b(f) - V_a^c(f).$$

donc $f$ est à variation bornée sur $[c,b]$ et $V_c^b(f) \leq V_a^b(f) - V_a^c(f)$, soit $V_a^c(f) + V_c^b(f) \leq V_a^b(f)$.

Réciproquement, supposons que $f$ est à variations bornées sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_a^b$, notons $\tilde{\sigma}$ la subdivision obtenue en insérant (si besoin) le point $c$ dans $\sigma$. Il existe ensuite $\sigma_1 \in \mathcal{S}_a^c$ et $\sigma_2 \in \mathcal{S}_c^b$ telles que $\tilde{\sigma} = \sigma_1 \cup \sigma_2$. Comme $\tilde{\sigma}$ est plus fine que $\sigma$, nous avons :

$$S_\sigma(f) \leq S_{\tilde{\sigma}}(f) = S_{\sigma_1}(f) + S_{\sigma_2}(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

donc $f$ est à variation bornée sur $[a,b]$ et $V_a^b(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$.

L'équivalence a donc été démontrée, ainsi que l'égalité $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$ quand $f$ est à variations bornées.

e) L'ensemble des fonctions à variations bornées sur $[a,b]$ est trivialement un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions bornées de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On déduit du a) que la différence de deux fonctions croissantes est à variations bornées.

Réciproquement, supposons que $f :\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est à variations bornées. Soit alors $g$ la fonction qui à $x \in [a,b]$ associe $g(x) = V_a^x(f)$. Pour $x, y \in [a,b]$ tels que $x \leq y$, $g(y) = g(x) + V_x^y(f) \geq g(x)$, donc $g$ est croissante.

Nous avons $f = g - h$ avec $h = g - f$. Fixons donc $x, y \in [a,b]$ avec $x \leq y$. Nous avons :

$$h(y) - h(x) = V_a^y(f) - f(y) - V_a^x(f) + f(x) = V_x^y - f(y) + f(x) \geq 0$$

car $f(y) - f(x) \leq |f(y) - f(x)| = V_{(x,y)}(f) \leq V_x^y(f)$. On en déduit que $h$ est croissante sur $[a,b]$ : $f$ est bien la différence de deux fonctions croissantes.

**37)** L'unicité de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est claire (deux polynômes qui coïncident sur $[-1,1]$ sont égaux). L'existence peut se montrer de deux façons :

- en écrivant $\cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n\right) = \displaystyle\sum_{0\leq 2k\leq n} \binom{n}{k} \cos^{n-2k}(\theta)(-1)^k(1-\cos^2(\theta))^k$ ;

- par récurrence sur $n$ : la suite définie par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ pour tout $n \in\ N$ est solution, en remarquant que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos((n+2)\theta) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta).$$

On voit en particulier que $P_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}\, T_n$ est normalisé de degré $n$ (pour $n \geq 1$) et que :

$$\max_{-1\leq x\leq 1} |P_n(x)| = \max_{\theta\in\mathbb{R}} \frac{|\cos(n\theta)|}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

ce qui montre que l'inégalité demandée est optimale.

Soit maintenant $P$ normalisé de degré $n$ (avec $n \geq 1$) et supposons que $|2^{n-1}P(x)| < 1$ pour tout $x \in [-1,1]$.

Le polynôme $Q = T_n - 2^{n-1}P$ est de degré au plus $n-1$ et, en posant, pour $k \in \{0,\dots,n\}$, $x_k = \cos(k\pi/n)$ (on a $1 = x_0 > x_1 > \cdots > x_n = -1$) :

$$\forall k \in \{0,\dots,n\},\ Q(x_k) = (-1)^k - 2^{n-1}P(x_k) \text{ est du signe de } (-1)^k.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, $Q$ admet donc $n$ racines distinctes : c'est absurde.

Nous avons ainsi démontré que, pour la norme $||P||_\infty = \max_{-1\le x\le 1} |P(x)|$, $d(X^n, \mathbb{R}_{n-1}[X]) = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ pour tout $n \geq 1$.

**38)** Le cas particulier $n = 2$ fait apparaître clairement le résultat qui est à la base de la solution. Si $f_1 + f_2 = 0$, la fonction $f_1$ est à la fois $T_1$ et $T_2$ périodique ; montrer que $f$ est constante revient à montrer que $f$ est $T$-périodique pour toute valeur de $T$. Il est donc naturel de s'intéresser à l'ensemble :

$$\mathcal{P} = \{T \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x + T) = f_1(x)\}.$$

$\mathcal{P}$ est trivialement un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Comme souvent dans les exercices difficiles de l'X, il faut connaître un résultat hors programme pour débloquer la preuve :

> **lemme** : *un sous-groupe $G$ de $\mathbb{R}$ est soit discret, de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \geq 0$, soit dense.*

Une fois le lemme démontré, nous pouvons dire que si $\mathcal{P} = a\mathbb{Z}$ avec $a \geq 0$, il existe $p_1, q_1 \in \mathbb{N}^*$ tels que $T_1 = ap_1$ et $T_2 = ap_2$, puis ($a$ est non nul car $T_1 > 0$) $T_2/T_1 = p_2/p_1 \in \mathbb{Q}$ : absurde. On en déduit que $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Enfin, $f_1$ étant continue, $\mathcal{P}$ est fermé : on a donc $\mathcal{P} = \mathbb{R}$ et $f_1$ est constante.

**Preuve du lemme :** soit $G$ un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Si $G = \{0\}$, on a $G = a\mathbb{Z}$ avec $a = 0$. Sinon, deux cas sont à distinguer :

- si $a = \inf G \cap \mathbb{R}^{+*} > 0$, cet inf est un minimum. En effet, par définition de la borne inférieure, il existe $x \in G$ tel que $a \leq x < 2a$. Si $x = a$, l'inf est bien atteint ; sinon, il existe $y \in G$ tel que $a \leq y < x < 2a$. On a alors $x - y \in G$ et $0 < x - y < a$ : c'est absurde. On termine ensuite comme dans la démonstration du résultat :

  *les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont les parties de la forme $a\mathbb{Z}$*

  On a $a \in G$ donc $a\mathbb{Z} \subset G$ ; réciproquement, si $x \in G$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x - na \in [0, a[$. Comme $x - na \in G$, $x - na = 0$ par minimalité de $a$, ce qui achève de montrer que $G = a\mathbb{Z}$.

- si $\inf G \cap \mathbb{R}^{+*} = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in G$ tel que $0 < a < \varepsilon$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intervalle $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ étant de largeur $2\varepsilon$, il contient un point $y$ de la forme $na$ avec $n \in \mathbb{Z}$. On en déduit :

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in G,\ |x - y| < \varepsilon$$

  ce qui traduit que $G$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Nous allons maintenant démontrer le résultat par récurrence sur $n$. Le résultat est évident pour $n = 1$ (et nous venons de le démontrer pour $n = 2$).

Soit $n \geq 2$ et supposons le résultat démontré au rang $n - 1$. On se place dans la situation à l'ordre $n$. Nous allons éliminer la fonction $f_n$ en utilisant sa périodicité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x + T_n) - f_i(x) = 0.$$

Comme les fonction $g_i :\ f_i(x + T_n) - f_i(x)$ sont de période $T_i$, l'hypothèse de récurrence s'applique : $g_i = K_i$ (constante) pour tout $1 \leq i \leq n - 1$. Il reste pour conclure à démontrer que $f_i$ (pour $1 \leq i \leq n - 1$) est à la fois $T_i$ et $T_n$ périodique, i.e. que $g_i$ est nulle. Nous avons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_i(x + T_n) = f_i(x) + K_i$$

et donc

$$\forall p \in \mathbb{N},\ f_i(pT_n) = f_i(0) + pK_i$$

Comme $f_i$ est périodique et continue, elle est bornée sur $\mathbb{R}$, donc $K_i = 0$ (sinon, $f_i(pT_n)$ tendrait vers l'infini). Nous avons donc $f_i$ constante pour tout $1 \leq i \leq n - 1$, puis $f_n$ est constante puisque $f_n = -(f_1 + \cdots + f_{n-1})$.

**39)** En utilisant l'inégalité des accroissements finis, on a, avec $M = \|f"\|_\infty$ :

$$\underbrace{\left| f(1/2) - f(1) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) f'(1) \right|}_{=|f(1/2)|} \leq \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 \frac{M}{2} \text{ et } \underbrace{\left| f(1/2) - f(0) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) f'(0) \right|}_{=|f(1/2)-1|} \leq \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 \frac{M}{2}$$

ce qui donne $1 \leq |1 - f(1/2)| + |f(1/2)| \leq \dfrac{M}{4}$, soit $\|f"\|_\infty \geq 4$.