

Problème de Mathématiques

Référence pp2205 — Version du 29 mars 2026

On note E , l'espace vectoriel des applications continues de $[-1, 1]$ dans \mathbb{R} . Pour tout $f \in E$, on pose

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)|.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n , le sous-espace vectoriel des applications polynomiales de degré inférieur à n de $[-1, 1]$ dans \mathbb{R} . (On confondra les applications polynomiales et les polynômes.)

Partie A. Polynômes de Tchebychev

1. On établit dans cette question l'existence et l'unicité des polynômes de Tchebychev.

1. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer un polynôme T_n , à coefficients réels, de degré n , tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta). \quad (1)$$

☞ On pourra remarquer que $\cos n\theta$ est la partie réelle de $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$.

1. b. Démontrer qu'il n'existe qu'un seul polynôme T_n vérifiant la propriété (1) : on l'appelle le **n -ième polynôme de Tchebychev (de première espèce)**.

2. Vérifier que

$$\forall x \in [-1, 1], \quad T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos} x). \quad (2)$$

Cette identité est-elle vraie sur \mathbb{R} ?

3. a. Démontrer que

$$\forall x \in [-1, 1], \quad T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

☞ On pourra calculer $T_n(x) + T_{n+2}(x)$.

3. b. Expliciter les polynômes T_0, T_1, T_2 et T_3 .

3. c. Calculer le coefficient dominant de T_n .

4. Dans cette question, on détermine les racines et les extrema du polynôme T_n pour $n \geq 1$. Pour tout $0 \leq k \leq n$, on pose

$$\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \quad \text{et} \quad c_k = \cos \frac{k\pi}{n}.$$

|| Les réels $c_k, 0 \leq k \leq n$, sont appelés les **points de Tchebychev**.

4. a. Démontrer que

$$\forall x \in [-1, 1], \quad T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (x - \cos \theta_k).$$

4. b. Calculer $\|T_n\|_{\infty}$, puis démontrer que

$$\forall 0 \leq k \leq n, \quad |T_n(c_k)| = \|T_n\|_{\infty}$$

et que

$$\forall 0 \leq k < n, \quad T_n(c_{k+1}) = -T_n(c_k).$$

4. c. Dessiner le graphe de T_3 et préciser les réels c_0, c_1, c_2 et c_3 sur la figure.

Partie B. Polynôme de meilleure approximation quadratique

Nous allons maintenant définir une norme euclidienne sur E .

5. a. Démontrer que, pour tout $h \in E$, l'intégrale

$$\int_0^{\pi} h(\cos t) dt$$

existe.

5. b. Soit $h \in E$, une fonction *positive* telle que

$$\int_0^\pi h(\cos t) dt = 0.$$

Démontrer que h est la fonction nulle.

5. c. Démontrer que l'application

$$(f, g) \mapsto \langle f | g \rangle = \int_0^\pi f(\cos t)g(\cos t) dt$$

est un produit scalaire sur E .

|| On notera $\|\cdot\|_2$, la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

6. Calculer $\langle T_m | T_n \rangle$ en discutant sur les valeurs de m et n . En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille

$$(T_0, T_1, \dots, T_n)$$

est une base orthogonale de E_n .

|| Dans la suite de cette partie, f est un élément fixé de E ; n est un entier naturel donné. On pose

$$d_2(f, E_n) = \inf_{Q \in E_n} \|f - Q\|_2$$

ainsi que

$$t_n(f) = \sum_{k=0}^n \frac{\langle T_k | f \rangle}{\|T_k\|_2^2} \cdot T_k.$$

7. Justifier l'existence du réel $d_2(f, E_n)$.

8. Justifier que $t_n(f) \in E_n$ et calculer $\|t_n(f)\|_2^2$.

9. Démontrer que $f - t_n(f)$ est orthogonal à E_n , c'est-à-dire

$$\forall g \in E_n, \quad \langle f - t_n(f) | g \rangle = 0.$$

10. En déduire que la série

$$\sum \frac{\langle f | T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2}$$

est convergente.

11. Démontrer que

$$d_2(f, E_n) = \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f | T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2}}.$$

|| On peut démontrer que

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\langle f | T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2}.$$

Solution * Utilisation des polynômes de Tchebychev en analyse

Partie A. Polynômes de Tchebychev

1. a. D'après la Formule du binôme,

$$\begin{aligned} e^{in\theta} &= (e^{i\theta})^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^n \\ &= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \cos^{n-p} \theta \cdot i^p \cdot \sin^p \theta. \end{aligned}$$

Pour tout entier p impair, le complexe i^p est un imaginaire pur. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \cos n\theta &= \Re(e^{in\theta}) \\ &= \sum_{\substack{0 \leq p \leq n \\ p \text{ pair}}} \binom{n}{p} \cos^{n-p} \theta \cdot i^p \sin^p \theta \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n/2} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k} \theta \cdot (-1)^k \cdot (\sin^2 \theta)^k && (p = 2k) \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n/2} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k} \theta \cdot (\cos^2 \theta - 1)^k \end{aligned}$$

car $-\sin^2 \theta = \cos^2 \theta - 1$.

Le polynôme

$$T_n = \sum_{0 \leq k \leq n/2} \binom{n}{2k} (X^2 - 1)^k X^{n-2k} \in \mathbb{R}[X]$$

vérifie donc la relation (1); son degré est inférieur à n (puisque chaque terme de la somme est un polynôme de degré n). Comme le coefficient de X^n est égal à

$$\sum_{0 \leq k \leq n/2} \binom{n}{2k} > 0,$$

le degré de T_n est bien égal à n .

1. b. S'il existait deux polynômes S_n et T_n tels que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad S_n(\cos \theta) = T_n(\cos \theta) = \cos n\theta,$$

alors on aurait

$$\forall x \in [-1, 1], \quad S_n(x) - T_n(x) = 0$$

(puisque \cos réalise une surjection de \mathbb{R} sur $[-1, 1]$). Le polynôme $S_n - T_n$ aurait donc une infinité de racines et ce serait le polynôme nul, donc $S_n = T_n$.

Il n'existe donc qu'un seul polynôme T_n vérifiant la propriété (1).

2. Pour tout $x \in [-1, 1]$, on peut poser $\theta = \text{Arccos } x \in \mathbb{R}$ et on sait alors que

$$\cos \theta = x.$$

On déduit de (1) que

$$T_n(x) = T_n(\cos \theta) = \cos n\theta = \cos(n \text{ Arccos } x).$$

* Cette identité n'a pas de sens pour $x \notin [-1, 1]$, puisque la fonction Arccos n'est définie que sur $[-1, 1]$!

3. a. Soit $x \in [-1, 1]$. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos \theta$. On sait que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$2 \cos(n+1)\theta \cdot \cos \theta = \cos(n+1+\theta) + \cos(n+1-\theta)$$

(formules d'addition) c'est-à-dire

$$2x \cdot T_{n+1}(x) = T_{n+2}(x) + T_n(x)$$

d'après (2).

• On peut en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

puisque l'intervalle $[-1, 1]$ est une partie *infinie* de \mathbb{R} .

3. b. Soit en utilisant la formule trouvée au [1.a.], soit en exploitant la relation de récurrence établie à la question précédente, on trouve $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et

$$T_2 = \binom{2}{0} \cdot X^2 + \binom{2}{2} \cdot (X^2 - 1) = 2X^2 - 1$$

$$T_3 = \binom{3}{0} \cdot X^3 + \binom{3}{2} \cdot (X^2 - 1)X = 4X^3 - 3X.$$

3. c. Si le coefficient dominant de T_0 est égal à 1, il est clair que le coefficient dominant de T_n est égal à 2^{n-1} pour $1 \leq n \leq 3$.

HR : on suppose qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que le coefficient dominant de T_{n+1} soit égal à 2^n . D'après la relation de récurrence du [3.a.],

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

Or $\deg T_n = n$ et $\deg(2XT_{n+1}) = n + 2$ (d'après [1.a.]), donc le coefficient dominant de T_{n+2} est aussi le coefficient dominant de $2XT_{n+1}$, c'est-à-dire $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Comme HR est vérifiée, on l'a dit, pour $n = 0$, on en déduit qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$: le coefficient dominant de T_n est égal à 2^{n-1} pour tout entier $n \geq 1$ (et égal à 1 pour $n = 0$).

4. a. Soit $0 \leq k < n$. (On est prié de remarquer l'inégalité *stricte*.) Pour $x = \cos \theta_k$, on a

$$\operatorname{Arccos} x = \theta_k$$

puisque $0 < \theta_k < \pi$ (ce n'est pas vrai pour $k = n \dots$).

D'après (2),

$$T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos} x) = \cos(n\theta_k)$$

$$= \cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Pour $0 \leq k < n$, on a n angles θ_k distincts dans l'intervalle $[0, \pi]$, sur lequel la fonction \cos est strictement décroissante (et donc injective). Par conséquent, les abscisses $\cos \theta_k$, $0 \leq k < n$, sont deux à deux distinctes et on a trouvé n racines distinctes pour le polynôme T_n .

Or $\deg T_n = n$ par [1.a.], donc le polynôme T_n est scindé à racines simples et comme son coefficient dominant est égal à 2^{n-1} d'après [3.c.] (puisque $n \geq 1$), on en déduit que

$$\forall n \geq 1, \quad T_n = 2^{n-1} \prod_{0 \leq k < n} (X - \cos \theta_k)^1$$

et en particulier

$$\forall x \in [-1, 1], \quad T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (x - \cos \theta_k).$$

4. b. Pour tout $x \in [-1, 1]$, on a

$$|T_n(x)| \stackrel{(2)}{=} |\cos(n \operatorname{Arccos} x)| \leq 1$$

donc $\|T_n\|_\infty \leq 1$.

Mais Pour $x = 1$, on a $\operatorname{Arccos} x = 0$ et donc

$$T_n(1) = \cos(n \cdot 0) = 1$$

donc $\|T_n\|_\infty = 1$.

• Pour $0 \leq k \leq n$, toujours d'après (2),

$$T_n(c_k) = \cos\left(n \cdot \frac{k\pi}{n}\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k$$

puisque $0 \leq k\pi/n \leq \pi$.

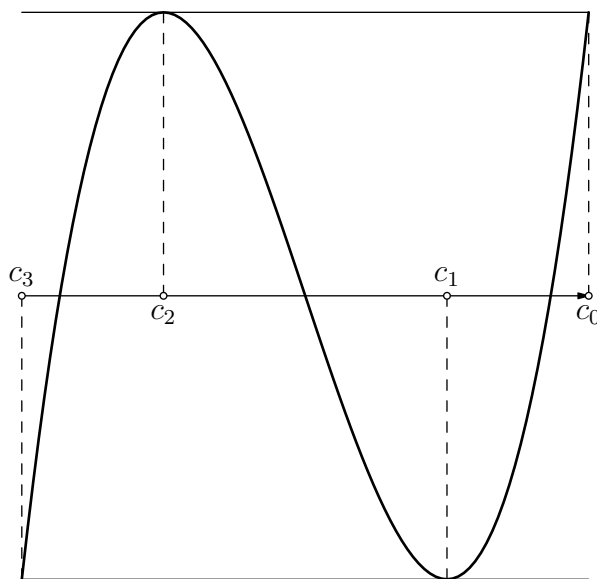
On en déduit d'une part que

$$\forall 0 \leq k \leq n, \quad |T_n(c_k)| = 1 = \|T_n\|_\infty$$

et d'autre part que

$$\forall 0 \leq k < n, \quad T_n(c_{k+1}) = (-1)^{k+1} = -(-1)^k = -T_n(c_k).$$

4.c. Pour $n = 3$, on a $c_0 = 1$, $c_1 = 1/2$, $c_2 = -1/2$ et $c_3 = -1$. D'après la question précédente, la restriction de la fonction T_3 au segment $[-1, 1]$ atteint un extremum aux abscisses c_k , $0 \leq k \leq 3$. Comme les abscisses c_1 et c_2 appartiennent à l'intervalle ouvert $] -1, 1[$, le graphe de T_3 admet une tangente horizontale en ces points.



Partie B. Polynôme de meilleure approximation quadratique

5.a. Comme $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ est continue et que h est continue sur $[-1, 1]$, la fonction $[t \mapsto h(\cos t)]$ est continue sur le segment $[0, \pi]$, donc l'intégrale

$$\int_0^\pi h(\cos t) dt$$

existe.

5.b. D'après ce qui précède, la fonction $[t \mapsto h(\cos t)]$ est continue et positive sur un segment $[a, b]$ avec $a \neq b$. Comme son intégrale sur ce segment est nulle, on en déduit que

$$\forall t \in [0, \pi], \quad h(\cos t) = 0$$

et donc que

$$\forall x \in [-1, 1], \quad h(x) = 0$$

(puisque l'image de $[0, \pi]$ par \cos est le segment $[-1, 1]$).

5.c. D'après [5.a.], l'intégrale $\langle f | g \rangle$ est bien définie pour tout $f \in E$ et tout $g \in E$. On a donc bien défini une application de $E \times E$ dans \mathbb{R} .

Il est clair que cette application est symétrique.

Par linéarité de l'intégrale, cette application est bilinéaire sur $E \times E$.

Par positivité de l'intégrale (les bornes sont dans l'ordre croissant), cette application est positive :

$$\forall f \in E, \quad \langle f | f \rangle = \int_0^\pi f^2(\cos t) dt \geq 0.$$

D'après [5.b.], cette application est même définie positive.

Il s'agit donc bien d'un produit scalaire sur E .

6. Soient $0 \leq m \leq n$. D'après la définition du produit scalaire et (1),

$$\langle T_m | T_n \rangle = \int_0^\pi \cos mt \cos nt dt.$$

Premier cas : si $m = n = 0$, alors $\langle T_0 | T_0 \rangle = \pi$.

Second cas : si $m = n \geq 1$, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos^2 nt = \frac{1 + \cos 2nt}{2}$$

et donc $\langle T_n | T_n \rangle = \pi/2$.

Dernier cas : si $0 \leq m < n$, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos mt \cos nt = \frac{\cos(m+n)t + \cos(m-n)t}{2}$$

et comme $m+n \neq 0$ et $m-n \neq 0$, alors $\langle T_m | T_n \rangle = 0$.

• D'après ce dernier cas, la famille $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$ est orthogonale. D'après [1.a.], elle est constituée de $(n+1)$ vecteurs *non nuls* de E_n (c'est donc une famille libre) et comme $\dim E_n = n+1$, il s'agit d'une base de E_n .

La famille $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$ est donc bien une base orthogonale de E_n .

7. Comme E_n contient en particulier $Q = 0$, l'ensemble

$$\{\|f - Q\|_2, f \in E_n\}$$

est une partie non vide de \mathbb{R} (elle contient $\|f\|_2$), minorée par 0. Cette partie admet donc une borne inférieure réelle (Axiome de la borne supérieure).

8. On sait que E_n est un espace vectoriel et $t_n(f)$ est une combinaison linéaire des polynômes T_0, \dots, T_n qui appartiennent tous à E_n d'après [1.a.] Par conséquent, $t_n(f)$ est bien un vecteur de E_n .

• Comme les vecteurs $T_0, \dots, T_k, \dots, T_n$ sont deux à deux orthogonaux par [6.], on déduit du théorème de Pythagore que

$$\|t_n(f)\|_2^2 = \sum_{k=0}^n \frac{\langle T_k | f \rangle^2}{\|T_k\|_2^4} \cdot \|T_k\|_2^2 = \sum_{k=0}^n \frac{\langle T_k | f \rangle^2}{\|T_k\|_2^2}$$

9. D'après [6.], la famille $(T_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une base de E_n . Par conséquent, $f - t_n(f)$ est orthogonal à E_n si, et seulement si,

$$\forall 0 \leq i \leq n, \quad \langle f - t_n(f) | T_i \rangle = 0$$

c'est-à-dire

$$\forall 0 \leq i \leq n, \quad \langle f | T_i \rangle = \langle t_n(f) | T_i \rangle.$$

Mais on a aussi démontré que $\langle T_k | T_i \rangle = 0$ pour tout $i \neq k$, donc

$$\begin{aligned} \langle t_n(f) | T_i \rangle &= \sum_{k=0}^n \frac{\langle T_k | f \rangle}{\|T_k\|_2^2} \cdot \langle T_k | T_i \rangle \\ &= \frac{\langle T_i | f \rangle}{\|T_i\|_2^2} \cdot \langle T_i | T_i \rangle = \langle T_i | f \rangle. \end{aligned}$$

Donc $f - t_n(f)$ est orthogonal à E_n .

REMARQUE.— On vient de démontrer que $t_n(f)$ était le projeté orthogonal de f sur E_n .

10. D'après [8.], $t_n(f)$ appartient à E_n . On peut alors déduire de [9.] que $t_n(f)$ et $f - t_n(f)$ sont orthogonaux. Or

$$f = [f - t_n(f)] + [t_n(f)]$$

et d'après le Théorème de Pythagore,

$$\|f\|_2^2 = \|f - t_n(f)\|_2^2 + \|t_n(f)\|_2^2 \geq \|t_n(f)\|_2^2.$$

La série

$$\sum \frac{\langle f | T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2}$$

est une série de terme général positif et, d'après [8.] et l'inégalité précédente, ses sommes partielles sont majorées par $\|f\|_2^2$. Par conséquent, cette série est convergente.

11. Soit $Q \in E_n$. Alors

$$f - Q = [f - t_n(f)] + [t_n(f) - Q]$$

où les vecteurs $f - t_n(f)$ et $t_n(f) - Q$ sont orthogonaux (le premier est orthogonal au sous-espace E_n , le second est une combinaison linéaire de vecteurs de E_n). D'après le Théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned}\|f - Q\|_2^2 &= \|f - t_n(f)\|_2^2 + \|t_n(f) - Q\|_2^2 \\ &\geq \|f - t_n(f)\|_2^2.\end{aligned}$$

On a trouvé un minorant de $\|f - Q\|_2$ indépendant de Q . Mieux! Ce minorant est égal à $\|f - Q\|_2$ pour $Q = t_n(f)$: il s'agit donc en fait du minimum. Ainsi

$$d_2(f, E_n) = \|f - t_n(f)\|_2.$$

On a vu à la question précédente que

$$\|f - t_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|t_n(f)\|_2^2$$

et au [8.] que

$$\|t_n(f)\|_2^2 = \sum_{k=0}^n \frac{\langle f | T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2}.$$

Par conséquent,

$$d_2(f, E_n) = \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f | T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2}}.$$