

Démontrer que

$$\forall (x, y) \in]0, 1[^2, \quad \frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy} \leq \frac{5\sqrt{5}-11}{2}.$$

La fonction rationnelle

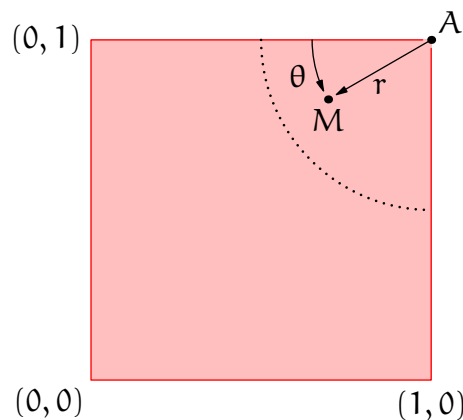
$$f = \left[(x, y) \mapsto \frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy} \right]$$

est en fait définie (et par conséquent continue) sur le carré $K = [0, 1]^2$ privé du sommet $A = (1, 1)$. Il est clair que f est identiquement nulle sur le bord $\partial K \setminus \{A\}$.

• Posons donc $f(A) = 0$ et vérifions que, ainsi prolongée, la fonction f est continue sur K .

Munissons le plan \mathbb{R}^2 de la norme euclidienne canonique et considérons $M \in K \setminus \{A\}$ tel que $\|AM\| \leq 1/2$. Il existe donc une distance $0 < r \leq 1/2$ et un angle $0 \leq \theta \leq \pi/2$ tels que

$$M = A - (r \cos \theta, r \sin \theta).$$



On a donc

$$\begin{aligned} |f(M) - f(A)| &= \frac{(1-r \cos \theta)r \cos \theta (1-r \sin \theta)r \sin \theta}{r \cos \theta + r \sin \theta - r^2 \sin \theta \cos \theta} \\ &= r \cdot \frac{\sin \theta \cos \theta (1-r \cos \theta)(1-r \sin \theta)}{(\sin \theta + \cos \theta) - r \sin \theta \cos \theta}. \end{aligned}$$

Il est clair que le numérateur est majoré par 1. Quant au dénominateur, puisque $0 < r \leq 1/2$, il est minoré par $(\sin \theta + \cos \theta) - 1/2$. Enfin,

$$\forall 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin(\theta + \pi/4) \geq 1,$$

donc

$$|f(M) - f(A)| \leq 2r,$$

ce qui prouve bien que f est continue en A .

• Nous disposons ainsi d'une fonction f , continue sur le compact K . Elle atteint donc un maximum et un minimum sur K . Or la fonction f est nulle sur le bord du carré (y compris en A) et strictement positive sur l'intérieur de K . Son maximum est donc atteint en un point de l'intérieur de K (qui est un ouvert) et comme f est de classe \mathcal{C}^1 sur cet ouvert (c'est une fonction rationnelle), ce maximum est atteint en un point critique de f .

• On trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(1-2x+x^2y)y(1-y)}{(1-xy)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(1-2y+xy^2)x(1-x)}{(1-xy)^2}.$$

• Bien entendu, on ne fait qu'un seul calcul puisque l'expression $f(x, y)$ est symétrique en x et y .

Par conséquent, le point $(x, y) \in]0, 1[^2$ est un point critique de f si, et seulement si,

$$1 - 2x + x^2y = 1 - 2y - xy^2 = 0.$$

Par différence, on en déduit que

$$(2 + xy)(y - x) = 0$$

et donc que $y = x$. Par conséquent, (x, y) est un point critique si, et seulement si, $y = x$ et

$$1 - 2x + x^3 = 0.$$

Avec un peu de clairvoyance (ou de chance ou, à défaut, du matériel électronique), on remarque une racine évidente, ce qui nous donne :

$$(x - 1)(x^2 + x - 1) = 0.$$

La seule racine de ce polynôme appartenant à l'intervalle ouvert $]0, 1[$ est

$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

donc il existe un, et un seul, point critique de f sur l'ouvert $]0, 1[$.

C'est donc en ce point que f atteint son maximum sur le compact K et on en déduit que

$$\forall (x, y) \in]0, 1[^2, \quad f(x, y) \leq f(x_0, x_0) \quad \text{avec} \quad x_0 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

• Si on a bien compris comment est défini x_0 , on peut finir le calcul sans trop de peine. En effet, $x_0^2 = 1 - x_0$ et on peut facilement simplifier :

$$f(x_0, x_0) = \frac{x_0^2(1 - x_0)^2}{1 - x_0^2} = \frac{(1 - x_0)^2}{1 + x_0}$$

avec $(1 - x_0)^2 = 1 - 2x_0 + x_0^2 = 2 - 3x_0$. On a donc

$$f(x_0, x_0) = \frac{4 - 3(\sqrt{5} - 1)}{2 + (\sqrt{5} - 1)} = \frac{-11 + 5\sqrt{5}}{2}$$

(avec l'inévitable *quantité conjuguée*).

• On sait que ce maximum est strictement positif. Mais $125 = (5\sqrt{5})^2$ est à peine plus grand que $121 = 11^2$, donc ce maximum est proche de 0. L'application numérique le confirme, ce majorant est de l'ordre de 0,09.