

On considère une suite  $(X_k)_{k \geq 1}$  de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ , indépendantes et de même loi, portée par  $\mathbb{Z}^d$ . On pose alors

$$\forall \omega \in \Omega, \quad S_0(\omega) = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad S_n(\omega) = \sum_{k=1}^n X_k(\omega).$$

Pour tout  $\omega \in \Omega$  tel qu'il existe un entier  $n \geq 1$  tel que  $S_n(\omega) = 0_d$ , on pose

$$R(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N}^* : S_n(\omega) = 0_d\}$$

et pour les autres  $\omega \in \Omega$ , on pose  $R(\omega) = +\infty$ .

On admet ici que  $R$  est une variable aléatoire et que  $\mathbf{P}(R = +\infty) = 0$ .

La suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une **marche aléatoire** et la variable aléatoire  $R$  donne l'**instant du premier retour à l'origine**.

**1.** Soient  $1 \leq k \leq n$ , deux entiers naturels. Démontrer que

$$\mathbf{P}([S_n = 0_d] \cap [R = k]) = \mathbf{P}(R = k) \mathbf{P}(S_{n-k} = 0_d).$$

**2.** En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(S_n = 0_d) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(R = k) \mathbf{P}(S_{n-k} = 0_d).$$

**1.** On exprime l'évènement  $[S_n = 0_d] \cap [R = k]$  au moyen des variables aléatoires  $X_1, \dots, X_k$  : tout d'abord, par définition de  $R$ ,

$$\begin{aligned} [R = k] &= [S_1 \neq 0_d] \cap [S_2 \neq 0_d] \cap \dots \cap [S_{k-1} \neq 0_d] \cap [S_k = 0_d] \\ &= [X_1 \neq 0_d] \cap [X_1 + X_2 \neq 0_d] \cap \dots \cap [X_1 + \dots + X_{k-1} \neq 0_d] \cap [X_1 + \dots + X_k = 0_d] \quad (*) \end{aligned}$$

et d'autre part

$$[S_n = 0_d] \cap [S_k = 0_d] = [S_n - S_k = 0_d] \cap [S_k = 0_d].$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} [S_n = 0_d] \cap [R = k] &= [S_n = 0_d] \cap [S_1 \neq 0_d] \cap \dots \cap [S_{k-1} \neq 0_d] \cap [S_k = 0_d] \\ &= [S_n - S_k = 0_d] \cap [S_1 \neq 0_d] \cap \dots \cap [S_{k-1} \neq 0_d] \cap [S_k = 0_d] \\ &= [X_{k+1} + \dots + X_n = 0_d] \cap [R = k]. \end{aligned} \quad (\ddagger)$$

Comme les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes, les vecteurs aléatoires  $(X_1, \dots, X_k)$  et  $(X_{k+1}, \dots, X_n)$  sont indépendants. On déduit alors de (\*) que les évènements  $[X_{k+1} + \dots + X_n = 0_d]$  et  $[R = k]$  sont indépendants, puis de (\ddagger) que

$$\mathbf{P}(S_n = 0_d, R = k) = \mathbf{P}(X_{k+1} + \dots + X_n = 0_d) \mathbf{P}(R = k). \quad (\ddagger)$$

• Comme les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes et de même loi, les vecteurs aléatoires  $(X_1, \dots, X_{n-k})$  et  $(X_{k+1}, \dots, X_n)$  ont même loi. Par conséquent, les deux variables aléatoires

$$S_{n-k} = X_1 + \dots + X_{n-k} \quad \text{et} \quad X_{k+1} + \dots + X_n$$

ont même loi. D'après (\ddagger),

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \mathbf{P}(S_n = 0_d, R = k) = \mathbf{P}(S_{n-k} = 0_d) \mathbf{P}(R = k).$$

• Il n'y a aucune raison pour que les évènements  $[S_{n-k} = 0_d]$  et  $[R = k]$  soient indépendants! (Ils dépendent tous deux des variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots$ ) Il faut donc exploiter le fait que la marche aléatoire  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit un **processus à accroissements indépendants**.

**2.** Si  $S_n(\omega) = 0$  pour un entier  $n \geq 1$ , alors  $1 \leq R(\omega) \leq n$ .

• Si  $n \geq 1$  est un instant de retour à l'origine, alors l'instant du premier retour à l'origine est inférieur à  $n$ .

Comme  $R$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ , la famille

$$([R = k])_{k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}}$$

est un système complet d'évènements et par conséquent

$$[S_n = 0_d] = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}} [S_n = 0_d] \cap [R = k].$$

D'après la remarque préliminaire,  $[S_n = 0_d] \cap [R = k] = \emptyset$  pour tout  $k > n$ . Par conséquent,

$$[S_n = 0_d] = \bigsqcup_{k=1}^n [S_n = 0_d] \cap [R = k].$$

Par additivité de  $\mathbf{P}$ ,

$$\mathbf{P}(S_n = 0_d) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(S_n = 0_d, R = k)$$

et, d'après la question précédente,

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbf{P}(S_n = 0_d) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(S_{n-k} = 0_d) \mathbf{P}(R = k).$$