Mardi 19 mai

Référence	Origine	Thèmes
130-468	Mines MP	Groupes
130-493	"	Comatrice
130-494	"	Calcul matriciel
130-537	"	Topologie
130-548	"	Analyse réelle
130-578	"	Série de fonctions
130-1031	Centrale PSI	Produit scalaire, intégrales à paramètre
130-1149	CCINP MP	Suites récurrentes
130-1194	Mines Telecom MP	Noyaux itérés

NB : Dans l'exercice **[130-1031]**, l'étude de la continuité de T ne figure pas dans l'énoncé original.

rms130-468

[**1.**] *Soit φ, un isomorphisme du groupe G sur le groupe H. Démontrer que x est un générateur de G si, et seulement si, $\varphi(x)$ est un générateur de H.*
[**2.**] *Démontrer qu'un sous-groupe d'un groupe monogène est lui-même monogène.*

[**1.**] Si x est un générateur de G, alors

$$G = \{x^k,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Comme φ est un morphisme, alors

$$\varphi_*(G) = \{\varphi(x^k),\ k \in \mathbb{Z}\} = \{[\varphi(x)]^k,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

et comme φ est surjectif, alors

$$H = \varphi_*(G) = \{[\varphi(x)]^k,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Donc H est engendré par $\varphi(x)$.

❧ Réciproquement, si H est engendré par $\varphi(x)$, alors

$$H = \{[\varphi(x)]^k,\ k \in \mathbb{Z}\} \underset{\text{morph.}}{=} \{\varphi(x^k),\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Soit $g \in G$. Alors $h = \varphi(g) \in H$ et la description précédente de H nous assure qu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\varphi(g) = \varphi(x^k).$$

Comme $\varphi : G \to H$ est injectif, alors

$$g = x^k$$

ce qui prouve que

$$G \subset \{x^k,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

et donc que x engendre G (*l'inclusion réciproque est évidente* puisque G est un groupe multiplicatif qui contient x).

[**2.**] On considère un groupe monogène :

$$G = \langle a \rangle = \{a^k,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

et un sous-groupe $H \subset G$.

L'application $\varphi : \mathbb{Z} \to G$ définie par

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad \varphi(k) = a^k$$

est un morphisme de groupes. L'image réciproque du sous-groupe H par φ :

$$I = \{k \in \mathbb{Z} : \varphi(k) \in H\} = \{k \in \mathbb{Z} : a^k \in H\}$$

est donc un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. On sait donc qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$I = n_0\mathbb{Z}.$$

Comme $\varphi : \mathbb{Z} \to G$ est surjectif, alors

$$\forall\, h \in H,\ \exists\, k \in I, \quad \varphi(k) = a^k = h.$$

▶ Si $n_0 = 0$, alors $I = \{0\}$ et $H = \{1_G\}$: dans ce cas (inintéressant au possible...), il est clair que H est monogène, engendré par 1_G.

▶ Si $n_0 \geqslant 1$, alors

$$H = \{a^{pn_0},\ p \in \mathbb{Z}\} = \{(a^{n_0})^p,\ p \in \mathbb{Z}\} = \langle a^{n_0} \rangle$$

et H est monogène.

✍ *J'ai pris le parti d'une démonstration abstraite (on n'a pas souvent l'occasion d'utiliser le théorème sur l'image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme) en supposant connue la structure générale des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$.*

On aurait pu démontrer le théorème de manière plus terre à terre en imitant l'étude des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ — et donc sans supposer connue leur structure générale. L'étude des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ mérite d'être connue.

rms130-493

‖ *Quelles sont les matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont égales à leur comatrice ?*

Je note $\mathrm{Com}(A)$, la comatrice de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

► On sait que, quelle que soit la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{Com}(A)^\top.A = (\det A).I_n.$$

Par conséquent, si $\mathrm{Com}(A) = A$, alors

$$A^\top.A = \mathrm{Com}(A)^\top.A = (\det A).I_n. \tag{1}$$

✍ *Pour bien comprendre la suite, il vaut mieux remarquer que $A^\top.A$ est une matrice symétrique réelle, qu'elle est positive au sens où*

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top.A^\top.AX \geqslant 0$$

puisque $X^\top.A^\top.AX = \|AX\|^2$.

De plus, $\mathrm{Ker}\, A^\top.A = \mathrm{Ker}\, A$ *:*

— *si $AX = 0$, alors $A^\top.AX = A^\top.0 = 0$;*

— *réciproquement, si $A^\top.AX = 0$, alors*

$$\|AX\|^2 = X^\top.A^\top.AX = 0$$

et donc $AX = 0$ (puisqu'une norme sépare les points).

▷ Si la matrice A n'est pas inversible, alors (1) devient :

$$A^\top.A = 0_n.$$

Par conséquent, pour toute matrice colonne $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\|AX\|^2 = (AX)^\top.(AX) = X^\top.A^\top.AX = 0$$

donc

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad AX = 0$$

et A est donc la matrice nulle.

❧ Réciproquement : si $A = 0_n$, alors $\mathrm{Com}(A) = 0_n = A$.

▷ Si la matrice A est inversible, alors

$$A^\top.A = (\det A).I_n. \tag{2}$$

Pour tout vecteur colonne X *non nul*, la colonne AX est aussi différente de la colonne nulle (puisque A est inversible), donc

$$0 < \|AX\|^2 = X^\top.(A^\top.A)X = (\det A).\|X\|^2$$

donc

$$\det A > 0. \tag{3}$$

En posant

$$\alpha = \sqrt{\det A} > 0,$$

on obtient alors

$$\left(\frac{1}{\alpha}A\right)^\top\left(\frac{1}{\alpha}A\right) = I_n$$

et donc que

$$\frac{1}{\sqrt{\det A}}A \in O_n(\mathbb{R}). \tag{4}$$

En particulier, il faut donc que

$$\frac{\det A}{(\det A)^{n/2}} = \pm 1. \tag{5}$$

✍ *Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.*

Pour $n = 2$, la propriété (5) n'apporte aucune contrainte particulière, mais pour $n \geqslant 3$, il faut que $\det A = 1$ et on déduit alors de (2) que $A \in SO_n(\mathbb{R})$.

❧ Réciproquement :

— si $n = 2$, alors toute matrice de la forme

$$A = \alpha.R$$

où $\alpha > 0$ et $R \in SO_2(\mathbb{R})$ vérifie bien

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot R^\top \quad \text{et} \quad \det A = \alpha^2 \det R = \alpha^2$$

(puisque $\det R = 1$) et par conséquent

$$\mathrm{Com}(A) = [\det A.A^{-1}]^\top = \alpha^2.\left(\frac{1}{\alpha} R^\top\right)^\top = \alpha.R = A.$$

— Si $n \geqslant 3$, alors toute matrice $A \in SO_n(\mathbb{R})$ vérifie

$$\mathrm{Com}(A) = [\det A.A^{-1}]^\top = 1.(A^\top)^\top = A.$$

Conclusion générale.

Les matrices $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ égales à leur comatrice sont

— la matrice nulle ;

— les matrices de rotation

— et aussi, mais seulement pour $n = 2$, les matrices de la forme

$$\alpha \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

où $\alpha > 0$ et $-\pi < \theta \leqslant \pi$.

rms130-494

|| *Soient* A *et* B*, deux matrices de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $(AB)^n = 0_n$*. Démontrer que* $(BA)^n = 0_n$*.*

Si $(AB)^n = 0$, alors

$$(BA)^{n+1} = B(AB)^n A = 0$$

donc BA est nilpotente.

Or l'indice de nilpotence d'une matrice $N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est inférieur à n, donc $(BA)^n = 0$.

✍ *La majoration de l'indice de nilpotence doit être connue !*

On peut en donner diverses justifications plus ou moins savantes.

❧ *En considérant une matrice nilpotente* $N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *comme une matrice complexe, on sait qu'une telle matrice est trigonalisable et que son unique valeur propre est nulle.*

La matrice N *est donc semblable à une matrice triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.*

Par conséquent, la matrice N^k *est semblable à une matrice triangulaire dont les coefficients* $t_{i,j}$ *sont nuls pour* $j < i + k$ *(dessiner la matrice !) et en particulier* N^n *est la matrice nulle.*

❧ ***Variante*** *: Le polynôme minimal est de la forme* X^d *et il divise le polynôme caractéristique (Théorème de Cayley-Hamilton). Or le degré du polynôme caractéristique est égal à* n*, donc* $d \leqslant n$ *et par conséquent* $N^n = 0$*.*

❧ ***Autre variante*** *: cf exercice* ***[rms130-1194]****.*

rms130-537

> *Soit C, une partie convexe d'un espace vectoriel normé.*
> [**1.**] *Démontrer que l'adhérence de C est un fermé.*
> [**2.**] *Démontrer que l'intérieur de C est convexe.*

[**1.**] Soient a et b, deux points adhérents à C : il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C telles que

$$a = \lim_{n\to+\infty} x_n \quad \text{et} \quad b = \lim_{n\to+\infty} y_n.$$

Pour tout $t \in [0,1]$,

$$(1-t)a + tb = \lim_{n\to+\infty} (1-t)x_n + ty_n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le point $(1-t)x_n + ty_n$ appartient à C (puisque C est convexe) et par conséquent le point $(1-t)a+tb$ appartient à l'adhérence de C pour tout $t \in [0,1]$ (en tant que limite d'une suite de points de C).

On a ainsi démontré que l'adhérence $\overline{C}$ de C était convexe.

[**2.**] Contrairement à la question précédente, il faut impérativement traiter cet exerice en s'appuyant sur une **figure**.

❧ Soient a et b, deux points de l'intérieur de C : il existe donc un réel $r > 0$ tel que

$$B(a,r) \subset C \quad \text{et} \quad B(b,r) \subset C.$$

✍ *A priori, on a un rayon $r_1 > 0$ pour a et un rayon $r_2 > 0$ pour b. Nous avons choisi $r = \min\{r_1, r_2\} > 0$ en remarquant que*

$$B(a,r) \subset B(a,r_1) \quad \textit{et} \quad B(b,r) \subset B(b,r_2).$$

Pour $t \in [0,1]$, on pose

$$z_t = (1-t)a + tb \in C$$

et on considère un point $\omega \in E$ tel que

$$\|\omega - z_t\| \leqslant r.$$

Nous allons montrer que $\omega \in C$ et donc que $B(z_t, r) \subset C$, ce qui prouvera que C est aussi un voisinage de z_t et donc que z_t appartient bien à l'intérieur de C.

On pose $u = \omega - z_t$ de telle sorte que $\omega = z_t + u$. On a

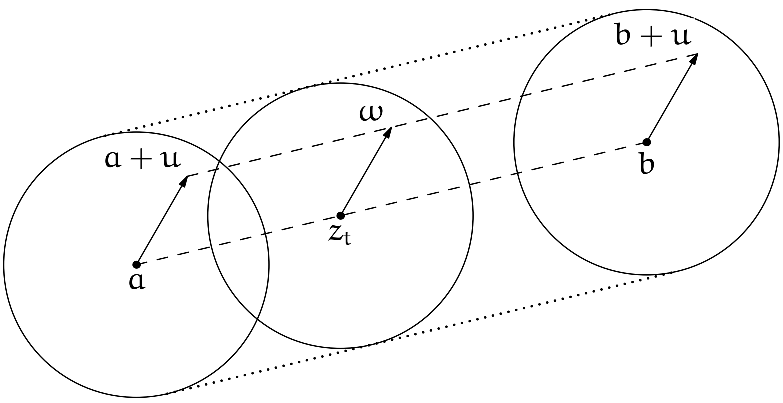
$$\big\|(a+u) - a\big\| = \|u\| \leqslant r \quad \text{et} \quad \big\|(b+u) - b\big\| = \|u\| \leqslant r$$

donc $(a+u) \in B(a,r) \subset C$ et $(b+u) \in B(b,r) \subset C$. Mais

$$\begin{aligned} \omega = (z_t + u) &= [(1-t)a + tb] + [(1-t)u + tu] \\ &= (1-t)(a+u) + t(b+u) \in C \end{aligned}$$

(en tant que combinaison convexe de deux points de C).

On a ainsi démontré que $B(z_t, r) \subset C$, ce qui signifie que C est un voisinage de z_t. Autrement dit, on a démontré que z_t appartenait à l'intérieur de C pour tout $t \in [0,1]$, ce qui prouve que l'intérieur de C est convexe.



rms130-548

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, une fonction continue telle que $f(0) = 0$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} f\Big(\frac{k}{n^2}\Big).$$

[**1.**] *Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*
[**2.**] *On suppose que f est dérivable en 0. Que dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?*

[**1.**] On sait que $f(0) = 0$ et que f est continue en 0. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, t \in [0, \alpha], \quad \big|f(t)\big| = \big|f(t) - 0\big| \leqslant \varepsilon.$$

Considérons un entier n assez grand pour que $0 < 1/n \leqslant \alpha$. Pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$, on a

$$0 < k^2/n \leqslant 1/n \leqslant \alpha$$

et par conséquent

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \Big|f\Big(\frac{k}{n^2}\Big)\Big| \leqslant \varepsilon.$$

Par inégalité triangulaire,

$$|u_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\varepsilon = \frac{n(n+1)}{2n^2} \cdot \varepsilon.$$

Comme $n(n+1)/(2n^2)$ tend vers $1/2$, cette quantité est inférieure à 1 pour tout entier n assez grand.
En résumé, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad |u_n| = |u_n - 0| \leqslant \varepsilon.$$

✍ *Je précise : on doit choisir $n_0 \in \mathbb{N}$ assez grand pour que*

$$\frac{1}{n} \leqslant \alpha \qquad \text{et que} \qquad \frac{n+1}{2n} \leqslant 1.$$

[**2.**] Si la fonction f est dérivable en 0, alors

$$f(t) \underset{t\to 0}{=} f(0) + tf'(0) + o(t) = tf'(0) + t\cdot\theta(t)$$

où θ est une fonction de limite nulle en $t = 0$.
Fixons $\varepsilon > 0$. Comme plus haut, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, 0 < t \leqslant \alpha, \quad \big|\theta(t)\big| \leqslant \varepsilon.$$

On choisit encore n assez grand pour que $0 < 1/n \leqslant \alpha$, de telle sorte que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \Big|\theta\Big(\frac{k}{n^2}\Big)\Big| \leqslant \varepsilon$$

puisque

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad 0 < \frac{k}{n^2} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \alpha.$$

On a donc

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \Big|f\Big(\frac{k}{n^2}\Big) - \frac{k}{n^2}f'(0)\Big| \leqslant \frac{k}{n^2}\cdot\varepsilon.$$

D'après l'Inégalité triangulaire,

$$\Big|u_n - f'(0)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^4}\Big| \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^4}.$$

Or on sait que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^3}{3}$$

donc, pour tout entier n assez grand,

$$\left| nu_n - \frac{f'(0)}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right| \leqslant \varepsilon$$

(une suite qui tend vers $1/3$ est inférieure à 1 à partir d'un certain rang).

On vient ainsi de démontrer que

$$nu_n = \frac{f'(0)}{6} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} + o(1) = \frac{f'(0)}{3} + o(1)$$

et donc que

$$u_n = \frac{f'(0)}{3n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Deux manières de résumer, selon la fonction f :

— Si $f'(0) \neq 0$, alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f'(0)}{3n}$$

— mais si $f'(0) = 0$, alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1/n).$$

rms130-578

[**1.**] *Donner le domaine de définition de la somme*

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$$

et étudier la continuité de la fonction S.
[**2.**] *Déterminer les limites de* S *au voisinage de* 0 *et au voisinage de* $+\infty$. *Donner, si possible, un équivalent de* $S(x)$.

✍ *Le même exercice a été donné au CCINP* ***[rms130-1160]*** *sans l'étude au voisinage de* 0.

[**1.**] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = e^{-\sqrt{n}x}.$$

❧ Pour tout $x > 0$, on a

$$\forall\, \alpha > 0, \quad u_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{n^\alpha}\Big)$$

puisque $n^\alpha u_n(x) = \exp(-\sqrt{n}x + \alpha \ln n)$. Par comparaison avec les séries de Riemann, la série $\sum u_n(x)$ est donc absolument convergente.
Pour tout $x \leqslant 0$, la série $\sum u_n(x)$ est grossièrement divergente.
La somme

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\sqrt{n}x}$$

est donc définie si, et seulement si, $x > 0$.

✍ *Il est important de bien comprendre le sens des croissances comparées ici : on peut facilement comparer* $\sum u_n(x)$ *à une série de Riemann (avec un exposant* α *arbitrairement grand) mais il est impossible de conclure en comparant cette série à une série géométrique : comme*

$$\forall\, 0 < q < 1, \quad \frac{u_n(x)}{q^n} = \exp(\underbrace{-n \ln q - \sqrt{n}x}_{\to+\infty})$$

on a seulement $q^n = o(u_n(x))$*...*

❧ Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction u_n est décroissante et positive :

$$\forall\, 0 < x < y, \qquad 0 < u_n(y) < u_n(x). \tag{$\star$}$$

Par conséquent,

$$\forall\, a > 0,\ \forall\, x \in [a, +\infty[,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant u_n(a).$$

Comme le majorant est indépendant de x et que la série $\sum u_n(a)$ est convergente (puisque $a > 0$), on vient de prouver que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$.
Comme les fonctions u_n sont continues sur $]0, +\infty[$ on en déduit que la somme S est continue sur $]0, +\infty[$.

✍ *Ici, il n'est pas nécessaire de recourir au théorème de convergence normale pour justifier que la somme* S *est continue.*
❧ *En effet, pour tout* $n \geqslant 1$, *la fonction* u_n *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *et*

$$\forall\, 0 < a \leqslant x, \qquad \big|u_n'(x)\big| = \sqrt{n}.e^{-\sqrt{n}x} \leqslant \sqrt{n}.e^{-\sqrt{n}.a}.$$

On peut alors déduire de l'inégalité des accroissements finis que

$$\forall\, 0 < a \leqslant x, y, \quad \big|u_n(x) - u_n(y)\big| \leqslant \sqrt{n}.e^{-\sqrt{n}.a}\,|x - y|.$$

On vérifie sans peine (comparaison avec une série de Riemann) que la série

$$\sum \sqrt{n}.e^{-\sqrt{n}.a}$$

est convergente. En sommant les encadrements précédents, on montre que

$$\forall\, x, y \in [a, +\infty[, \quad \big|S(x) - S(y)\big| \leqslant \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}.e^{-\sqrt{n}.a}\right] \cdot |x - y|$$

ce qui signifie que S est lipschitzienne sur tout intervalle $[a, +\infty[$.

❧ *On peut remarquer que la constante de Lipschitz trouvée*

$$K_a = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}.e^{-\sqrt{n}.a}$$

est une fonction croissante *de* a *et que* $K_0 = +\infty$ *(osons cet abus de notation !), ce qui nous indique que S n'est sans doute pas lipschitzienne sur l'intervalle ouvert* $]0, +\infty[$ *(soit à cause d'une asymptote verticale, soit à cause d'une tangente verticale en* $x = 0$*, il est trop tôt pour décider).*

[**2.**] En sommant les encadrements $(\star)$, on obtient

$$\forall\, 0 < x < y, \qquad 0 < S(y) < S(x).$$

La somme S est donc strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

✍ *Il serait aussi possible d'appliquer le théorème de dérivation terme à terme pour démontrer que S est dérivable et constater que sa dérivée est négative sur* $]0, +\infty[$*. Mais ce serait bien plus long à justifier !*

La somme S tend donc vers une limite *finie* au voisinage de $+\infty$ et vers une limite, *finie ou infinie*, au voisinage droit de 0.

❧ La série de fonctions converge normalement sur l'intervalle $[1, +\infty[$, qui est un voisinage de $+\infty$. On peut donc passer à la limite terme à terme, ce qui montre que $S(x)$ tend vers 0 au voisinage de $+\infty$. (On calculera un équivalent plus bas.)

En revanche, il est impossible de passer à la limite terme à terme au voisinage de 0 puisque la série des limites $\sum u_n(0^+)$ est divergente.

✍ *Jusqu'ici, on a exploité la monotonie des fonctions*

$$[x \mapsto u_n(x)]\,.$$

Nous allons maintenant exploiter la monotonie des suites

$$[n \mapsto u_n(x)]$$

pour comparer la somme $S(x)$ *à des intégrales.*

❧ Fixons $x > 0$ et considérons la fonction

$$f = \left[t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}\right]$$

qui est évidemment continue et décroissante sur $[0, +\infty[$. Cette fonction f est aussi intégrable sur $[0, +\infty[$ (puisque $f(t) = o(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$).

❧ L'application

$$\varphi = \left[t \mapsto x\sqrt{t}\right]$$

est évidemment une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $I =]0, +\infty[$ sur I. On remarque alors (en factorisant par $\varphi'(t)$) que

$$\forall\, t \in I, \quad f(t) = \frac{2}{x^2}.x\sqrt{t}.e^{-x\sqrt{t}} \cdot \frac{x}{2\sqrt{t}} = g\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)$$

où

$$\forall\, u \in I, \quad g(u) = \frac{2}{x^2}.u.e^{-u}.$$

D'après le Théorème de changement de variable, la fonction g est intégrable sur I (ce qu'on savait déjà !) et

$$\begin{aligned}\forall\, a \geqslant 0, \quad \int_a^{+\infty} f(t)\,dt &= \int_{\sqrt{a}\,x}^{+\infty} g(u)\,du \\ &= \frac{2}{x^2} \cdot (1 + \sqrt{a}\,x) \cdot \exp(-\sqrt{a}\,x). \qquad \text{(IPP)}\end{aligned}$$

❧ On fait une figure pour constater que

$$-1 + \int_0^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant S(x) \leqslant \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$$

c'est-à-dire (avec $a = 0$)

$$\forall\, x > 0, \quad \frac{2}{x^2} - 1 \leqslant S(x) \leqslant \frac{2}{x^2}.$$

Cet encadrement nous dit que

$$S(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{x^2}$$

et en particulier que $S(x)$ tend vers $+\infty$ au voisinage droit de 0.

❧ Comme on sait que la somme S est positive sur $[0, +\infty[$, cet encadrement nous dit aussi que

$$S(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$$

et confirme en particulier que $S(x)$ tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

✍ *Une étude plus fine doit être menée au voisinage de $+\infty$. Ce qui suit est assez représentatif de la situation générale : dans une somme d'exponentielles, c'est le plus gros terme qui donne l'équivalent.*

❧ Pour tout $x > 0$, on a

$$S(x) = e^{-x} + \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$$

et comme précédemment (avec $a = 1$ cette fois)

$$0 \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} \leqslant \int_1^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{2(x+1)}{x^2} \cdot e^{-x}.$$

Cet encadrement nous donne

$$\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{x} \cdot e^{-x} = o(e^{-x})$$

et finalement

$$S(x) = e^{-x} + o(e^{-x}) \sim e^{-x}$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

rms130-1031

[**1.**] *Démontrer que l'application définie par*

$$\langle u \mid v \rangle = \int_a^b u(x)v(x)\,dx$$

est un produit scalaire sur l'espace E *des fonctions continues de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$.
[**2.**] *Soit* $K : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$, *une fonction continue. Pour* $f \in E$, *on définit la fonction* $T(f)$ *en posant*

$$\forall\, x \in [a,b], \quad T(f)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)\,dy.$$

[**2. a.**] *Démontrer que* T *est un endomorphisme de* E.
[**2. b.**] *On munit* E *de la norme* $\|\cdot\|_\infty$ *de la convergence uniforme. Démontrer que l'endomorphisme* T *est continu.*

[**1.**] Archi-classique.
[**2. a.**] Le segment $[a,b]$ est un compact de $\mathbb{R}$, donc le carré $[a,b]\times[a,b]$ est un compact de $\mathbb{R}^2$. Comme K est continue sur ce compact, elle est bornée : il existe un réel M tel que

$$\forall\,(x,y) \in [a,b]^2, \qquad \left|K(x,y)\right| \leqslant M.$$

La fonction f est continue sur le segment $[a,b]$ et donc bornée.

❧ Ainsi :

— pour tout $y \in [a,b]$, la fonction

$$[x \mapsto K(x,y)f(y)]$$

est continue sur le segment $\Omega = [a,b]$ comme composée de fonctions continues :

$$x \mapsto (x,y) \mapsto K(x,y) \mapsto K(x,y)\underbrace{f(y)}_{\mathrm{Cte}}$$

— pour tout $x \in [a,b]$, la fonction

$$[y \mapsto K(x,y)f(y)]$$

est continue sur le segment $I = [a,b]$ et donc intégrable sur I ;

— enfin la domination est assurée par

$$\forall\, x \in \Omega,\ \forall\, y \in I, \quad \left|K(x,y)f(y)\right| \leqslant M\,\|f\|_\infty$$

puisque le majorant est constant et donc intégrable sur le segment I.

Ainsi T est bien une application de E dans E et la linéarité de T est évidente.

[**2. b.**] En intégrant l'inégalité de domination, on trouve

$$\forall\, x \in \Omega, \quad \left|T(f)(x)\right| \leqslant (b-a)M\,\|f\|_\infty$$

et donc

$$\forall\, f \in E, \quad \|T(f)\|_\infty \leqslant M(b-a)\,\|f\|_\infty$$

ce qui prouve que l'application linéaire T est bien continue et que $|\!|\!|T|\!|\!| \leqslant M(b-a)$.

rms130-1149

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 > 0$ et la relation de récurrence suivante.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$$

[**1.**] *Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.*
[**2.**] *Énoncer et démontrer le Théorème de sommation des relations de comparaison pour les sommes partielles dans le cas des séries divergentes de terme général positif.*
[**3.**] *Déterminer la limite de l'expression*

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}.$$

En déduire un équivalent de u_n.

[**1.**] La fonction $f = [x \mapsto xe^{-x}]$ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = (1-x)e^{-x}$$

donc f est strictement croissante sur $[0, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. Par conséquent,

$$\forall\, x > 0, \quad 0 < f(x) \leqslant f(1) = e^{-1}.$$

Comme l'intervalle $]0, +\infty[$ est stable par f et contient u_0, il contient tous les termes de la suite : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive.

❧ Pour tout $x > 0$, on sait que $0 < e^{-x} < 1$ et donc

$$0 < f(x) < x. \tag{6}$$

On déduit de la stricte positivité des u_n que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_{n+1} = f(u_n) < u_n.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive, donc elle converge.

❧ Comme la fonction f est continue sur $[0, +\infty[$, la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un point fixe de f. D'après (1), l'unique point fixe de f est $x = 0$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

[**2.**] Énoncé du théorème : Si la série $\sum v_n$ est une série divergente de terme général (strictement) positif et si $u_n \sim v_n$ lorsque n tend vers $+\infty$, alors la série $\sum u_n$ est divergente et

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

✍ *Résultats analogues avec o et O à la place de $\sim$.*
Cf cours pour la démonstration.

[**3.**] Puisque u_n tend vers 0,

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{e^{u_n}}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{e^{u_n}-1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

La série $\sum 1$ est une série divergente dont le terme général est strictement positif.

Par comparaison, on en déduit que la série télescopique

$$\sum\Big(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\Big)$$

est divergente et que

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} = \sum_{k=0}^{n-1}\Big(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\Big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

Comme ${}^1\!/_{u_0}$ est une constante, on en déduit que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

rms130-1194

Soient E*, un espace vectoriel de dimension finie* n *et* f*, un endomorphisme de* E*.*

[**1.**] *Démontrer que*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \operatorname{Im} f^{k+1} \subset \operatorname{Im} f^k.$$

[**2.**] *On suppose qu'il existe un entier* $p \in \mathbb{N}$ *tel que* $\operatorname{Im} f^p = \operatorname{Im} f^{p+1}$*. Démontrer que*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \operatorname{Im} f^p = \operatorname{Im} f^{p+k}.$$

[**3.**] *En déduire que* $\operatorname{Im} f^n = \operatorname{Im} f^{n+1}$.

[**3.**] ✍ *Si* f *est nilpotente, alors il existe* $d \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\operatorname{Im} f^d = \{0_E\} \qquad \textit{et} \qquad \forall\, k \geqslant d, \quad \operatorname{Im} f^k = \{0_E\}.$$

D'après l'égalité qui vient d'être démontrée, on a aussi $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^n$ *pour tout* $k \geqslant n$ *et par conséquent* $\operatorname{Im} f^n = \{0_E\}$*. On a ainsi démontré que l'indice de nilpotence est toujours majoré par la dimension de l'espace vectoriel.*