
JEUDI 21 MAI

Certains énoncés ont été transmis par des candidats aux concours en 2025 - merci à eux.

Autant que possible, j'ai veillé à établir des énoncés mathématiquement corrects, faites-moi signe si vous rencontrez des points litigieux.

Modules utilisés	
136-py-01	<code>numpy.polynomial</code>
136-py-02	
136-py-03	<code>numpy, numpy.linalg</code>
136-py-04	<code>numpy</code>
136-py-05	<code>matplotlib.pyplot</code>
Centrale25-I02	<code>numpy, numpy.random</code>
Centrale25-I04	<code>numpy, numpy.linalg, matplotlib.pyplot</code>

Pour toute partie finie non vide A de \mathbb{N} , on considère le polynôme

$$P_A = \sum_{k \in A} X^k.$$

La **somme** de deux parties finies non vides A et B de \mathbb{N} est l'ensemble $A + B$ défini par

$$A + B = \{x + y, (x, y) \in A \times B\}$$

Deux parties finies non vides A et B de \mathbb{N} sont dite **en somme directe** lorsque, pour tout $z \in A + B$, il existe un unique couple $(x, y) \in A \times B$ tel que $z = x + y$. La somme $A + B$ est alors notée $A \oplus B$.

[1.] Écrire une fonction `en_somme_directe(A, B)` dont les arguments sont deux listes non vides d'entiers naturels, qui renvoie `True` si ces listes représentent deux parties en somme directe et `False` sinon.

[2.] Écrire une fonction `poly_gene(A)` dont l'argument est une liste d'entiers naturels (deux à deux distincts), qui renvoie le polynôme P_A .

[3.] Démontrer que A et B sont en somme directe si, et seulement si, $P_A P_B = P_{A+B}$.

[4.] Soient A et B , deux parties de \mathbb{N} en somme directe et $n \in \mathbb{N}^*$. La somme $A \oplus B$ est dite **n -périodique** si, et seulement si,

$$\mathbb{Z} = (A \oplus B) \oplus n\mathbb{Z}.$$

[4.a.] Démontrer que la somme $A \oplus B$ est n -périodique si, et seulement si, pour tout entier $j \in \llbracket 0, n \llbracket$, il existe un, et un seul, $u \in A \oplus B$ tel que $u \equiv j \pmod{n}$.

[4.b.] Pour tout $u \in A \oplus B$, on note alors

$$u = j_u + nk_u$$

où $0 \leq j_u < n$.

Expliciter la division euclidienne de X^k par $X^n - 1$. En déduire qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P_A P_B = (X^n - 1)Q + \sigma_n \quad \text{où} \quad \sigma_n = \sum_{0 \leq k < n} X^k.$$

[1.] Il n'y a qu'une seule possibilité : calculer la somme $x + y$ pour chaque couple $(x, y) \in A \times B$ en s'arrêtant dès qu'on trouve une somme déjà calculée. Si on parvient au terme de la double boucle `for`, c'est que les deux arguments sont en somme directe.

```
def en_somme_directe(A, B):
    sommes = []
    for x in A:
        for y in B:
            s = x+y
            if s in sommes:
                return False
            else:
                sommes.append(s)
    return True
```

[2.] Deux possibilités : transformer la liste $A = (d_k)_{0 \leq k < n}$ en liste

$$(\mathbb{1}_{\{i \in A\}})_{0 \leq i \leq \max(A)},$$

ce qui risque d'être assez fastidieux, ou utiliser les opérations sur les polynômes permises par le module `numpy.polynomial`.

```
def poly_gene(A):
    X = Polynomial([0,1])
    PA = Polynomial([0])
    for d in A:
        PA += X**d
    return PA
```

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note \mathfrak{S}_n , l'ensemble des permutations de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est représentée par la liste

$$[\sigma(0), \dots, \sigma(n-1)].$$

[1.] Écrire une fonction `composee` dont les arguments sont deux permutations σ et τ de \mathfrak{S}_n , qui renvoie la composée $\sigma \circ \tau$.

[2.] Écrire une fonction `cycles_disjoints` dont l'argument est une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, qui renvoie une liste de listes représentant sa décomposition en cycles de supports disjoints.

[3.] Écrire une fonction `nb_vrais_cycles` dont l'argument est une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, qui renvoie le nombre de cycles non triviaux (= de longueur > 1) dans la décomposition de σ en cycles de supports deux à deux disjoints.

[4.] Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $\text{Supp}(\sigma)$, son support défini par

$$\text{Supp}(\sigma) = \{0 \leq i < n : \sigma(i) \neq i\},$$

ainsi que $L(\sigma)$, le cardinal du support; $C(\sigma)$, le nombre de cycles non triviaux dans la décomposition en cycles de supports disjoints; $N(\sigma)$, le nombre d'orbites de σ et $T(\sigma)$, le nombre minimal de transpositions dont la composée soit égale à σ .

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_6$, représentée par la liste $(5, 1, 2, 4, 3, 0)$. Calculer $L(\sigma)$, $C(\sigma)$, $N(\sigma)$ et $T(\sigma)$.

[5.a.] Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Exprimer $N(\sigma)$ en fonction de $C(\sigma)$, $L(\sigma)$ et n .

[5.b.] On admet la propriété suivante.

$$\forall \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n, \quad N(\tau \circ \sigma) = N(\sigma) \pm 1. \quad (\star)$$

Démontrer que

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad T(\sigma) \geq L(\sigma) - C(\sigma).$$

[5.c.] Démontrer que

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad T(\sigma) = L(\sigma) - C(\sigma).$$

☞ On commencera par étudier le cas où σ est un cycle.

[5.d.] Démontrer la propriété (\star) .

[6.] Pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose

$$\mathfrak{S}_{n+1,i} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1} : \sigma(n) = i\}.$$

Expliciter une bijection entre $\mathfrak{S}_{n+1,i}$ et \mathfrak{S}_n .

[1.] Si les permutations σ et τ sont représentées par les listes

$$(\sigma(0), \dots, \sigma(n-1)) \quad \text{et} \quad (\tau(0), \dots, \tau(n-1)),$$

alors la composée $\sigma \circ \tau$ est représentée par la liste

$$(\sigma \circ \tau(0), \dots, \sigma \circ \tau(n-1)) = (\sigma(\tau(i)), 0 \leq i < n).$$

```
def composee(S, T):
    n = len(S) # S et T de même longueur
    ST = []
    for i in range(n):
        j = T[i]
        ST.append(S[j])
    return ST
```

☛ La même chose en plus concis : il est ici inutile de paramétrer la boucle par des indices, il suffit de parcourir les valeurs de la liste T.

```
def composee(S, T):
    return [S[t] for t in T]
```

- [2.] Le support de chaque cycle de la décomposition de σ est une orbite de σ .
Chaque cycle de longueur $r \in \mathbb{N}^*$ de la décomposition de σ est donc de la forme

$$(i, \sigma(i), \sigma^2(i), \dots, \sigma^{r-1}(i)).$$

Il faut donc décrire les différentes orbites de σ et en particulier tenir à jour la liste des points par où on est déjà passé.

```
def cycles_disjoints(s):
    n = len(s)
    reste = [True]*n
    decomposition = []
    for i in range(n):
        if reste[i]: # si on n'est pas encore passé par i
            j, orbite = i, []
            while reste[j]: # tant qu'on a pas bouclé la boucle...
                orbite.append(j)
                reste[j] = False # on vient de passer par j
                j = s[j]
            # on vient de déterminer une nouvelle orbite
            decomposition.append(orbite)
    return decomposition
```

- [3.] La décomposition de σ en cycles de supports disjoints étant connue, il suffit de compter les cycles dont la longueur est *strictement* supérieure à 1.

```
def nb_vrais_cycles(s):
    decomp = cycles_disjoints(s)
    nb = 0
    for cycle in decomp:
        # on compte les cycles dont la longueur est strictement supérieure à 1
        nb += len(cycle)>1
    return nb
```

Une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ atteint un **record** en $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ lorsque

$$\forall j < i, \quad \sigma(j) < \sigma(i).$$

Par convention, toute permutation atteint un record en $i = 1$.

↳ Comme les $\sigma(i)$ sont deux à deux distincts, la permutation σ atteint un record en $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ si, et seulement si,

$$\sigma(i) = \max_{1 \leq j \leq i} \sigma(j).$$

On parlait autrefois de points saillants au lieu de records, l'article d'Alfréd RÉNYI (1921-1970) : *Théorie des éléments saillants d'une suite d'observations*. Annales de la faculté des sciences de l'université de Clermont. Mathématiques, 1962, vol. 8, no 2, p. 7-13, mérite la lecture.

On note M_σ , le nombre de records de la permutation σ et $M(i, n)$, le nombre de permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ atteignant exactement i records.

Ainsi, par convention, $M(0, 0) = 1$ et $M(0, j) = 0$ pour $1 \leq j \leq n$ et, par définition,

$$\forall 0 \leq j < i \leq n, \quad M(i, j) = 0$$

puisque le nombre de "records" ne peut excéder le nombre de "tentatives". On considère alors la matrice

$$A = (a_{i,j})_{0 \leq i, j \leq n} \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

définie par

$$\forall 0 \leq i, j \leq n, \quad a_{i,j} = (-1)^{j-i} M(i, j).$$

↳ Les entiers $a(i, n)$ sont les **nombre de Stirling de première espèce**.

[1.] Dans cette question, on admet la relation de récurrence suivante.

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad M(i, j) = M(i-1, j-1) + (j-1)M(i, j-1). \quad (*)$$

[1.a.] Écrire une fonction d'argument $n \in \mathbb{N}^*$ qui renvoie la matrice $A \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

[1.b.] Démontrer que la matrice A est inversible.

[1.c.] Écrire une fonction qui renvoie la valeur de

$$B(p, n) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} k! [A^{-1}]_{k,n}$$

pour $1 \leq p \leq n$. Conjecturer l'expression générale de $B(p, n)$.

[2.] Calculer $M(1, n)$ et $M(n, n)$. Démontrer la relation (*) admise plus haut.

[3.] Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_k = \sum_{i=0}^k a_{i,k} X^i.$$

[3.a.] Exprimer P_k en fonction de P_{k-1} . Calculer et factoriser P_k .

[3.b.] Exprimer X^k en fonction de P_0, \dots, P_k et des coefficients de la matrice A^{-1} .

↳ D'autres questions encore, "décorrélées des autres", qui ne figurent pas dans l'énoncé de la RMS.

[1.a.] Avant de coder le calcul de la matrice, il faut comprendre la relation de récurrence (*): cette relation donne la j -ième colonne en fonction de la $(j-1)$ -ième colonne.

L'énoncé indique comment initialiser le calcul par récurrence : $M(0, 0) = 1$ et les autres coefficients de la première ligne et de la première colonne sont tous nuls.

↳ Il est pertinent de reformuler la relation (*) avant de la coder :

$$\forall 0 \leq j < n, \forall 0 \leq i < n, \quad M(i+1, j+1) = M(i, j) + jM(i+1, j).$$

Le code est alors presque déjà écrit!

```
def matrice_M(n):
    M = np.zeros((n+1, n+1), dtype=int)
    M[0,0] = 1
    for j in range(n):
        for i in range(n):
            M[i+1,j+1] = M[i,j] + j*M[i+1,j]
    return M
```

☛ Les fans de numpy peuvent alléger le code précédent, au risque de devenir obscurs. (Je ne recommande pas.)

```
def matrice_M(n):
    M = np.zeros((n+1, n+1), dtype=int)
    M[0,0] = 1
    for j in range(n):
        M[1:,j+1] = M[:-1,j]+j*M[1:,j]
    return M
```

☛ On pourrait également réfléchir un peu avant de se lancer. L'énoncé nous indique que la matrice M est triangulaire supérieure et que $M(0,0) = 1$. Mais, pour tout $1 \leq i \leq n$, le coefficient diagonal $M(i,i)$ est égal à 1 : dans \mathfrak{S}_n , il n'existe qu'une seule permutation présentant n records, c'est bien entendu l'identité. On peut alors réduire les calculs au strict minimum.

```
def matrice_M(n):
    M = np.eye(n+1, dtype=int)
    for i in range(n):
        for j in range(i, n):
            M[i+1,j+1] = M[i,j] + j*M[i+1,j]
    return M
```

☛ On peut alors changer un signe sur deux en profitant des commodités de numpy.

```
def matrice_A(n):
    M = matrice_M(n)
    S = np.ones((n+1, n+1), dtype=int)
    for i in range(n):
        for j in range(i, n):
            S[i,j+1] = -S[i,j]
    return S*M # ce n'est pas un produit matriciel !
```

[1.b.] La matrice A est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous égaux à 1, donc elle est inversible.

☛ Et son inverse est une matrice dont les coefficients sont des entiers : les *nombre de Stirling de deuxième espèce*.

[1.c.] Comme A^{-1} est une matrice triangulaire supérieure (comme son inverse A) et que $n \geq 1$ (par hypothèse), le coefficient $[A^{-1}]_{0,n}$ est nul et le calcul de la somme commence à $k = 1$. Il reste alors à remarquer que

$$\binom{p}{1}! = p \quad \text{et que} \quad \forall 1 \leq k < p, \quad \binom{p}{k+1}(k+1)! = \frac{p!}{(p-k-1)!} = \frac{p!}{(p-k)!} \cdot (p-k).$$

```
def B(p, n):
    A_inv = alg.inv(matrice_A(n))
    s, fact = 0, p
    for k in range(1, p+1):
        s += fact*A_inv[k,n]
        fact *= (p-k)
    return s
```

• L'affichage de différentes valeurs de $B(p, n)$ permet de reconnaître quelques entiers bien connus (des puissances de 2 notamment). Mais si on n'a jamais entendu parler des nombres de Stirling, il me paraît un peu compliqué de conjecturer que

$$\forall 1 \leq p \leq n, \quad B(p, n) = p^n.$$

[2.] Chaque permutation présente (par convention) un record en $i = 1$. Une permutation n'a donc qu'un seul record si, et seulement si, ce record est atteint en $i = 1$. Cela est possible si, et seulement si, $\sigma(1)$ est la plus grande valeur possible, c'est-à-dire $\sigma(1) = n$.

Il existe $(n-1)!$ permutations de \mathfrak{S}_n telles que $\sigma(1) = n$, donc $M(1, n) = (n-1)!$ pour tout $n \geq 1$.

• On a démontré plus haut que $M(n, n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (y compris pour $n = 0$).

• La démonstration combinatoire de la relation (*) est un bijou, exposé dans l'article de Rényi cité plus haut, que je n'ai trouvé nulle part ailleurs.

On commence par expliciter une bijection entre les permutations de \mathfrak{S}_n qui présentent k records et les permutations de \mathfrak{S}_n qui se décomposent en produit de k cycles (éventuellement triviaux).

On en déduit alors assez facilement la relation (*).

• Considérons une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ présentant k records. On peut lui associer naturellement une permutation $\hat{\sigma} \in \mathfrak{S}_n$ qui est composée de k cycles de supports disjoints.

$$\begin{aligned} \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 5 & 7 & 6 & 0 & 1 & 9 & 4 & 3 \end{pmatrix} &\mapsto \hat{\sigma} = (8, 2, 5, 7, 6, 0, 1) \circ (9, 4, 3) \\ \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 4 & 0 & 3 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix} &\mapsto \hat{\sigma} = (2, 1) \circ (5) \circ (6, 4, 0, 3) \circ (9, 7, 8) \\ \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 6 & 2 & 8 & 4 & 7 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} &\mapsto \hat{\sigma} = (5, 3) \circ (6, 2) \circ (8, 4, 7, 0, 1) \circ (9) \end{aligned}$$

Si deux records sont atteints consécutivement ou si un record est atteint en dernière position (= si le plus grand entier est un point fixe) pour σ , on obtient un cycle trivial (= un point fixe) pour $\hat{\sigma}$.

Réciproquement, si une permutation $\psi \in \mathfrak{S}_n$ est décomposée en k cycles de supports disjoints, on peut définir une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\psi = \hat{\sigma}$. En effet, il existe une seule manière d'écrire un cycle en commençant par le plus grand élément de l'orbite; il existe une seule manière d'ordonner les cycles en suivant l'ordre croissant des plus grands éléments de l'orbite.

$$\begin{aligned} \psi &= (0, 1, 8, 4, 7) \circ (2, 6) \circ (3, 5) \circ (9) \\ &= (8, 4, 7, 0, 1) \circ (6, 2) \circ (5, 3) \circ (9) && \text{(écriture normalisée des cycles)} \\ &= (5, 3) \circ (6, 2) \circ (8, 4, 7, 0, 1) \circ (9) && \text{(tri des cycles par maximum croissant)} \\ \psi &= (0, 3, 6, 4) \circ (1, 2) \circ (5) \circ (7, 8, 9) \\ &= (6, 4, 0, 3) \circ (2, 1) \circ (5) \circ (9, 7, 8) \\ &= (2, 1) \circ (5) \circ (6, 4, 0, 3) \circ (9, 7, 8) \end{aligned}$$

Pour tout $1 \leq k \leq n$, l'application $\sigma \mapsto \hat{\sigma}$ induit donc une bijection de l'ensemble $R_{n,k}$ des permutations de \mathfrak{S}_n qui ont exactement k records sur l'ensemble $C_{n,k}$ des permutations de \mathfrak{S}_n qui se décomposent en k cycles de supports disjoints (éventuellement triviaux).

• Par définition, la relation (*) se traduit par

$$\forall 1 \leq k, n \leq N, \quad \#(R_{n,k}) = \#(R_{n-1,k-1}) + (n-1)\#(R_{n-1,k})$$

et aussi, d'après la bijection précédente, par

$$\forall 1 \leq k, n \leq N, \quad \#(C_{n,k}) = \#(C_{n-1,k-1}) + (n-1)\#(C_{n-1,k}). \quad (\dagger)$$

Pour une permutation $\sigma \in C_{n,k}$, deux cas se présentent :

— ou bien $\sigma(n) = n$ et la décomposition de σ en k cycles de supports disjoints est de la forme

$$\sigma = (a_{(1,1)}, a_{(1,2)}, \dots) \circ (a_{(2,1)}, a_{(2,2)}, \dots) \circ \dots \circ (a_{(k-1,1)}, a_{(k-1,2)}, \dots) \circ (n)$$

— ou bien $\sigma(n) \neq n$.

Il est clair que l'ensemble des permutations $\sigma \in C_{n,k}$ telles que $\sigma(n) = n$ est en bijection avec les permutations de $C_{n-1,k-1}$, en prenant la permutation

$$\tau = (a_{(1,1)}, a_{(1,2)}, \dots) \circ (a_{(2,1)}, a_{(2,2)}, \dots) \circ \dots \circ (a_{(k-1,1)}, a_{(k-1,2)}, \dots)$$

pour antécédent de σ .

D'autre part, à chaque permutation $\tau \in C_{n-1,k}$ correspondent $(n-1)$ permutations $\sigma \in C_{n,k}$ telles que $\sigma(n) \neq n$ et ces permutations sont deux à deux distinctes (puisque leurs décompositions en cycles de supports disjoints sont distinctes).

$$\begin{aligned} & (n, a_{(1,1)}, a_{(1,2)}, \dots) \circ (a_{(2,1)}, a_{(2,2)}, \dots) \circ (a_{(k,1)}, a_{(k,2)}, \dots) \\ & (a_{(1,1)}, n, a_{(1,2)}, \dots) \circ (a_{(2,1)}, a_{(2,2)}, \dots) \circ (a_{(k,1)}, a_{(k,2)}, \dots) \\ & (a_{(1,1)}, a_{(1,2)}, n, \dots) \circ (a_{(2,1)}, a_{(2,2)}, \dots) \circ (a_{(k,1)}, a_{(k,2)}, \dots) \\ & \dots \\ & (a_{(1,1)}, a_{(1,2)}, \dots) \circ (a_{(2,1)}, a_{(2,2)}, \dots) \circ (n, a_{(k,1)}, a_{(k,2)}, \dots) \\ & (a_{(1,1)}, a_{(1,2)}, \dots) \circ (a_{(2,1)}, a_{(2,2)}, \dots) \circ (a_{(k,1)}, n, a_{(k,2)}, \dots) \\ & \dots \\ & (a_{(1,1)}, a_{(1,2)}, \dots) \circ (a_{(2,1)}, a_{(2,2)}, \dots) \circ (a_{(k,1)}, a_{(k,2)}, \dots, n) \end{aligned}$$

La relation (†) est ainsi démontrée par une analyse combinatoire et la relation (★) avec elle.

• Un exemple élémentaire complet ?

$\sigma \in \mathfrak{S}_3$	Insertion de 3	Forme de Renyi dans \mathfrak{S}_4
$(0) \circ (1) \circ (2)$	$\mapsto (0) \circ (1) \circ (2) \circ (3) = (0) \circ (1) \circ (2) \circ (3)$	
	$\mapsto (3, 0) \circ (1) \circ (2) = (1) \circ (2) \circ (3, 0)$	
	$\mapsto (0) \circ (3, 1) \circ (2) = (0) \circ (2) \circ (3, 1)$	
	$\mapsto (0) \circ (1) \circ (3, 2) = (0) \circ (1) \circ (3, 2)$	
$(0) \circ (2, 1)$	$\mapsto (0) \circ (2, 1) \circ (3) = (0) \circ (2, 1) \circ (3)$	
	$\mapsto (3, 0) \circ (2, 1) = (2, 1) \circ (3, 0)$	
	$\mapsto (0) \circ (3, 2, 1) = (0) \circ (3, 2, 1)$	
	$\mapsto (0) \circ (2, 3, 1) = (0) \circ (3, 1, 2)$	
$(1, 0) \circ (2)$	$\mapsto (1, 0) \circ (2) \circ (3) = (1, 0) \circ (2) \circ (3)$	
	$\mapsto (3, 1, 0) \circ (2) = (2) \circ (3, 1, 0)$	
	$\mapsto (1, 3, 0) \circ (2) = (2) \circ (3, 0, 1)$	
	$\mapsto (1, 0) \circ (3, 2) = (1, 0) \circ (3, 2)$	
$(1) \circ (2, 0)$	$\mapsto (1) \circ (2, 0) \circ (3) = (1) \circ (2, 0) \circ (3)$	
	$\mapsto (3, 1) \circ (2, 0) = (2, 0) \circ (3, 1)$	
	$\mapsto (1) \circ (3, 2, 0) = (1) \circ (3, 2, 0)$	
	$\mapsto (1) \circ (2, 3, 0) = (1) \circ (3, 0, 2)$	
$(2, 0, 1)$	$\mapsto (2, 0, 1) \circ (3) = (2, 0, 1) \circ (3)$	
	$\mapsto (3, 2, 0, 1) = (3, 2, 0, 1)$	
	$\mapsto (2, 3, 0, 1) = (3, 0, 1, 2)$	
	$\mapsto (2, 0, 3, 1) = (3, 1, 2, 0)$	
$(2, 1, 0)$	$\mapsto (2, 1, 0) \circ (3) = (2, 1, 0) \circ (3)$	
	$\mapsto (3, 2, 1, 0) = (3, 2, 1, 0)$	
	$\mapsto (2, 3, 1, 0) = (3, 1, 0, 2)$	
	$\mapsto (2, 1, 3, 0) = (3, 0, 2, 1)$	

[3.a.] Commençons par remarquer que $P_0 = 1$ et $P_1 = X$. Dorénavant, nous supposons que $k \geq 2$, si bien que $a_{0,k} = a_{0,k-1} = 0$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 P_k &= \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} M(i, k) X^i \\
 &= \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} [M(i-1, k-1) + (k-1)M(i, k-1)] X^i && \text{(relation (*))} \\
 &= \sum_{i=1}^k (-1)^{(k-1)-(i-1)} M(i-1, k-1) X^{(i-1)+1} + (k-1) \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k-i} M(i, k-1) X^i \\
 & && \text{(car } M(k, k-1) = 0 \text{)} \\
 &= X P_{k-1} - (k-1) \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{(k-1)-i} M(i, k-1) X^i && \text{(changement d'indice et } M(0, k-1) = 0 \text{)} \\
 &= [X - (k-1)] P_{k-1}.
 \end{aligned}$$

On a ainsi démontré que

$$\forall k \geq 1, \quad P_k = [X - (k-1)] P_{k-1}.$$

(Pour $k = 1$ aussi, d'après la remarque initiale.)

Par conséquent,

$$P_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \geq 1, \quad P_k = [X - (k-1)] [X - (k-2)] \cdots [X - 1] X.$$

[3.b.] Comme la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure, on peut écrire la définition des polynômes P_j sous la forme

$$\forall 0 \leq j \leq n, \quad P_j = \sum_{i=0}^j a_{i,j} X^i = \sum_{i=0}^n X^i a_{i,j}$$

puisque $a_{i,j} = 0$ pour $i > j$. Autrement dit,

$$(P_0 \ P_1 \ P_2 \ \cdots \ P_n) = (1 \ X \ X^2 \ \cdots \ X^n) \times A$$

et comme A est inversible :

$$(1 \ X \ X^2 \ \cdots \ X^n) = (P_0 \ P_1 \ P_2 \ \cdots \ P_n) \times A^{-1}.$$

La matrice A^{-1} est triangulaire supérieure, donc $[A^{-1}]_{i,m} = 0$ pour $i > m$ et on obtient ainsi

$$\forall 0 \leq m \leq n, \quad X^m = \sum_{i=0}^n P_i [A^{-1}]_{i,m} = \sum_{i=0}^m [A^{-1}]_{i,m} P_i.$$

• En particulier, en substituant l'entier p à X , on obtient

$$p^m = \sum_{i=0}^m P_i(p) [A^{-1}]_{i,m} = \sum_{i=0}^m \binom{p}{i} i! [A^{-1}]_{i,m}$$

car

$$P_i(p) = [p - (i-1)] [p - (i-2)] \cdots [p-1] p = \frac{p!}{(p-i)!} = \binom{p}{i} \cdot i!.$$

On a ainsi démontré la conjecture qui a été faite en [1.c.].

On note \mathcal{E} , l'ensemble des entiers $m \in \mathbb{N}^*$ tels qu'il existe un entier $p_m \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$1 + 2 + \cdots + (m-2) + (m-1) = (m+1) + (m+2) + \cdots + (m+p_m). \quad (*)$$

[1.] On admet provisoirement que

$$\forall m \in \mathcal{E}, \quad p_m \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor.$$

[1.a.] Écrire une fonction d'argument $N \in \mathbb{N}^*$ qui renvoie la liste des entiers appartenant à l'ensemble $[1, N] \cap \mathcal{E}$.

[1.b.] Quel est le résultat de cette fonction pour $N = 10^4$?

[1.c.] Écrire une fonction d'argument $n \in \mathbb{N}^*$ qui renvoie la somme

$$m_n = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} 8^k 3^{n-2k-1}.$$

NB : cette fonction ne doit pas utiliser de fonctions prédéfinies permettant de calculer des coefficients binomiaux ou des factorielles.

[1.d.] Quelle conjecture peut-on formuler ?

[2.a.] Soit $m \in \mathcal{E}$. Donner un polynôme Q , dont les coefficients dépendent de m , tel que $Q(p_m) = 0$. En déduire l'expression de p_m .

[2.b.] En déduire qu'un entier $m \in \mathbb{N}^*$ appartient à \mathcal{E} si, et seulement si, $8m^2 + 1$ est un carré parfait. Démontrer la majoration admise en préambule de la première question.

[3.] On pose

$$\mathbb{Z}[\sqrt{8}] = \{a + b\sqrt{8}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\} \quad \text{et} \quad \mathcal{U} = \{a + b\sqrt{8} \in \mathbb{Z}[\sqrt{8}] : a^2 - 8b^2 = 1\}.$$

[3.a.] Démontrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{8}]$ est un anneau et que l'écriture $a + b\sqrt{8}$ est unique.

[3.b.] Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe un entier t_n tel que

$$(3 + \sqrt{8})^n = t_n + m_n \sqrt{8}$$

puis que $(3 + \sqrt{8})^n \in \mathcal{U}$.

[3.c.] Démontrer qu'un entier $m \in \mathbb{N}^*$ appartient à \mathcal{E} si, et seulement si, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n + m\sqrt{8} \in \mathcal{U}$.

[4.] Soit $\mathcal{U}^+ = \mathcal{U} \cap \mathbb{R}_+$. Démontrer que \mathcal{U}^+ est un groupe et que le plus petit élément de $\mathcal{U}^+ \cap]1, +\infty[$ est égal à $3 + \sqrt{8}$.

[1.a.] On sait que $1 + \cdots + (m-1) = (m-1)m/2$. On calcule les sommes $(m+1) + \cdots + q$ en partant de $q = m+1$ jusqu'à ce qu'on obtienne une valeur supérieure ou égale à $(m-1)m/2$. L'entier m appartient à \mathcal{E} si, et seulement si, il y a égalité.

```
def liste(N):
    E = []
    for m in range(1, N+1):
        objectif = ((m-1)*m)//2
        somme_droite, q = 0, m
        while somme_droite < objectif:
            q += 1
            somme_droite += q
        if somme_droite == objectif:
            E.append(m)
    return E
```

🔗 Ce code ne dépend pas de l'inégalité indiquée par l'énoncé.

[1.b.] On trouve [1, 6, 35, 204, 1189, 6930].

[1.c.] La valeur maximale de l'indice k dans la somme, que nous noterons q , est égale à $(n-1)//2$.

Il nous faut calculer $\binom{n}{2k+1}$ pour $0 \leq k \leq q$. On connaît bien la valeur initiale : $\binom{n}{1} = n$ (pour $k = 0$) et on trouve sans peine une relation de récurrence :

$$\forall 0 \leq \ell < q, \quad \binom{n}{2\ell+3} = \frac{n!}{(2\ell+3)!(n-2\ell-3)!} = \frac{(n-2\ell-1)(n-2\ell-2)}{(2\ell+2)(2\ell+3)} \cdot \binom{n}{2\ell+1}.$$

↪ *Le changement d'indice permet d'obtenir un quantificateur sous forme pythonienne : $0 \leq \ell < q$ au lieu de $1 \leq k \leq q$.*

Il faut ensuite calculer les entiers $8^k 3^{n-2k-1}$ pour $0 \leq k \leq q$: il suffit en fait de calculer les flottants $3^{n-1} (8/9)^k$.

```
def somme(n):
    q = (n-1)//2
    cf_bin, puissance, s = n, 1, n
    for i in range(q):
        j = 2*i+2
        cf_bin *= (n-j+1)*(n-j)/(j*(j+1))
        puissance *= 8/9
        s += cf_bin*puissance
    return 3**(n-1)*s
```

Variante — Pour la beauté du geste, on peut effectuer les calculs en nombres entiers plutôt qu'en nombres flottants. Le code est plus délicat à rédiger, mais on aura un résultat exact même pour $n \geq 20$.

Premier piège : on va utiliser la division euclidienne dans la relation de récurrence sur les coefficients binomiaux. Pour cela, il faut d'abord calculer le produit

$$(n-2\ell-1)(n-2\ell-2) \binom{n}{2\ell+1}$$

et seulement ensuite calculer le quotient de la division euclidienne de cet entier par $(2\ell+2)(2\ell+3)$.

Deuxième piège : l'entier 3^{n-1} est bien divisible par 9^k pour $0 \leq k \leq q$, mais on ne peut pas attendre la fin du calcul pour le faire apparaître.

```
def somme(n):
    q = (n-1)//2
    cf_bin, puissance = n, 3**(n-1)
    s = cf_bin*puissance
    for i in range(q):
        j = 2*i+2
        cf_bin = (cf_bin*(n-j+1)*(n-j))/(j*(j+1))
        puissance = 8*(puissance//9)
        s += cf_bin*puissance
    return s
```

[1.d.] On constate que $m_1 = 1$, $m_2 = 6$, $m_3 = 35$, $m_4 = 204$, $m_5 = 1189$ et $m_6 = 6930$. On peut conjecturer que la formule parachutée par l'énoncé donne l'expression générale des éléments de \mathcal{E} .

[2.a.] Si $m \in \mathcal{E}$, alors il existe un entier p_m tel que

$$\frac{(m-1)m}{2} = (m+1) + \dots + (m+p_m) = mp_m + \frac{p_m(p_m+1)}{2},$$

c'est-à-dire

$$p_m^2 + (2m+1)p_m - (m-1)m = 0.$$

Les racines du polynôme $Q_m = X^2 + (2m+1)X - (m-1)m$ sont

$$\frac{-(2m+1) \pm \sqrt{8m^2+1}}{2}.$$

Comme p_m est un entier naturel, on en déduit que

$$\forall m \in \mathcal{E}, \quad p_m = \frac{-(2m+1) + \sqrt{8m^2+1}}{2}.$$

[2.b.] D'après les calculs précédents,

- ou bien $8m^2 + 1$ est un carré parfait et c'est le carré d'un nombre impair, donc $p_m \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathcal{E}$;
- ou bien $8m^2 + 1$ n'est pas un carré parfait et dans ce cas, les racines de Q_m sont des irrationnels, donc $m \notin \mathcal{E}$.

• Comme p_m est un *entier*, il suffit de vérifier que $p_m \leq m/2$ pour conclure. On vérifie facilement que

$$p_m \leq \frac{m}{2} \iff 8m^2 + 1 \leq (3m + 1)^2 = 9m^2 + 6m + 1,$$

ce qui prouve l'inégalité indiquée plus haut.

• L'expression exacte de p_m donne un résultat plus précis :

$$p_m \underset{m \rightarrow +\infty}{=} (\sqrt{2} - 1)m + \mathcal{O}(1).$$

[3.a.] L'ensemble $\mathbb{Z}[\sqrt{8}]$ est une partie de \mathbb{R} qui contient 1 (neutre pour \times), est stable par différence et par produit, donc c'est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

L'écriture $a + b\sqrt{8}$ est unique car a et b sont des entiers et $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ est un irrationnel.

• L'unicité de l'écriture $a + b\sqrt{8}$ assure que la définition de l'ensemble \mathcal{U} a bien un sens.

Pour avancer sans hésitation dans un tel exercice, il faut connaître les notions de **conjugué** et de **norme** : le conjugué de $z = a + b\sqrt{8}$ est l'élément $\bar{z} = a - b\sqrt{8}$ et la norme $N(z)$ de z est définie par $N(z) = z\bar{z} = a^2 - 8b^2$ (rien à voir avec les normes de la Topologie). En particulier,

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{8}], \quad N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2).$$

Comme la norme de 1 est égale à 1, si $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{8}]$ est inversible, alors l'entier $N(z)$ est un diviseur de 1, donc $N(z) = \pm 1$. Réciproquement, si $N(z) = \pm 1$, alors $z(\pm\bar{z}) = 1$, donc z est inversible, d'inverse $\pm\bar{z}$.

L'ensemble \mathcal{U} est donc l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{8}]$ dont l'inverse est le conjugué.

Pour aller plus loin, on pourra se renseigner sur l'équation de Pell-Fermat.

[3.b.] Appliquer la formule du binôme à $(3 + \sqrt{8})^n$.

• C'est le même raisonnement qui donne une expression développée des polynômes de Tchebychev à partir de l'égalité bien connue :

$$\cos n\theta = \Re(e^{in\theta}) = \Re[(\cos \theta + i \sin \theta)^n].$$

• On en déduit alors que

$$(3 - \sqrt{8})^n = t_n - m_n\sqrt{8}$$

et donc que

$$t_n^2 - 8m_n^2 = (3 + \sqrt{8})^n(3 - \sqrt{8})^n = (9 - 8)^n = 1.$$

Donc $(3 \pm \sqrt{8})^n \in \mathcal{U}$.

[3.c.] On a démontré plus haut que $m \in \mathbb{N}^*$ appartient à \mathcal{E} si, et seulement si, $8m^2 + 1$ est un carré parfait. Cela revient à dire qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $8m^2 + 1 = n^2$, c'est-à-dire $n^2 - 8m^2 = 1$, ou encore $n + m\sqrt{8} \in \mathcal{U}$.

[4.] On sait que $3 + \sqrt{8} \in \mathcal{U}$.

Comme on l'a déjà indiqué, chaque élément $z = a + b\sqrt{8}$ de \mathcal{U}^+ est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{8}]$ et son inverse est son conjugué $a - b\sqrt{8}$. L'inverse d'un réel (strictement) positif étant lui aussi (strictement) positif, on en déduit que \mathcal{U}^+ est stable par passage à l'inverse.

On démontre de même la stabilité par produit.

• Si $z = a + b\sqrt{8}$ appartient à \mathcal{U}^+ , alors a et b ne peuvent être négatifs tous les deux.

Si $a < 0$ et $b \geq 0$, alors $\bar{z} = a - b\sqrt{8} < 0$ et comme on suppose $z \in \mathcal{U}$, on a $z\bar{z} = 1$, donc $z < 0$: c'est impossible.

Si $a \geq 0$ et $b < 0$, alors $\bar{z} = a - b\sqrt{8} \geq \sqrt{8} > 1$. Mais $\bar{z} = z^{-1}$, donc $0 < z < 1$.

Par conséquent, si $z \in \mathcal{U} \cap]1, +\infty[$, alors a et b sont tous les deux positifs.

En calculant systématiquement $z\bar{z}$, on constate que :

- Si $a = 0$ et $b \in \{0, 1, 2\}$, alors $a + b\sqrt{8} \notin U$;
- Si $a = 1$, alors $1 + \sqrt{8} \notin U$ et $1 + b\sqrt{8} > 3 + \sqrt{8}$ pour tout $b \geq 2$;
- Si $a = 2$, alors $2 + \sqrt{8} \notin U$ et $2 + b\sqrt{8} > 3 + \sqrt{8}$ pour tout $b \geq 2$;
- Si $a \geq 3$ et $b \geq 1$, alors $a + b\sqrt{8} \geq 3 + \sqrt{8}$.

On a ainsi démontré que $3 + \sqrt{8}$ était le plus petit élément de $U \cap]1, +\infty[$.

↳ Ce serait dommage de s'en tenir là! On peut démontrer assez facilement que le groupe multiplicatif U^+ est engendré par $z_1 = 3 + \sqrt{8}$.

Considérons en effet $z = a + b\sqrt{8} \in U^+$, distinct de 1. Quitte à remplacer z par son conjugué \bar{z} , on peut supposer que $z > 1$. D'après ce qui précède, z est donc supérieur à z_1 . Comme $z_1 > 1$, la suite de terme général $z.z_1^{-n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Comme cette suite est strictement décroissante, il existe un, et un seul, entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$z.z_1^{-(n_0-1)} > 1 \geq z.z_1^{-n_0}.$$

Autrement dit,

$$1 \leq z.z_1^{-n_0} < z_1.$$

Mais $z.z_1^{-n_0} \in U$ (structure de groupe) et $z_1 = \min(U \cap]1, +\infty[)$, donc $z = z_1^{n_0}$.

On a ainsi démontré que

$$\forall z \in U^+, \exists n \in \mathbb{Z}, \quad z = (3 + \sqrt{8})^n$$

et la réciproque est évidente. Le groupe multiplicatif U^+ est donc monogène.

[1.] Soient p , un nombre premier ; v_p , la valuation p -adique. Démontrer que

$$\forall a, b \in \mathbb{N}^*, \quad v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b).$$

[2.a.] Écrire une fonction $v(n, p)$ d'arguments $n \in \mathbb{N}^*$ et p , un nombre premier, qui renvoie $v_p(n)$.

[2.b.] Écrire une fonction `somme_base(n, p)` qui retourne la somme des chiffres de l'écriture en base p de l'entier n .

[2.c.] Écrire une fonction `nzd(n)` qui retourne le nombre de zéros à droite dans l'écriture décimale de $n!$. Tester avec $n = 500$, puis avec $n = 2025$.

[2.d.] Conjecturer un lien entre n , `somme_base(n, 5)` et `nzd(n)`.

[3.] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\pi(n)$, le nombre d'entiers premiers inférieurs à n . À l'aide de la fonction `sympy.isprime`, tracer $\pi(2n)$ et $\frac{2n}{\ln(2n)}$ pour $1 \leq n \leq 10^5$. Quelle conjecture peut-on faire ?

[4.] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et p , un nombre premier.

[4.a.] Combien y a-t-il d'entiers inférieurs à n multiples de p ?

[4.b.] Combien y a-t-il d'entiers inférieurs à n , multiples de p sans être multiples de p^2 ?

[4.c.] Démontrer que

$$v_p(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor \right)$$

puis que

$$v_p(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

[4.d.] Retrouver ainsi la valeur calculée plus haut de `nzd(2025)`.

[4.e.] On suppose que l'écriture de n en base p est donnée par :

$$n = a_0 p^0 + a_1 p^1 + \dots + a_r p^r$$

et on pose $s = a_0 + a_1 + \dots + a_r$. Démontrer que

$$v_p(n) = \frac{n - s}{p - 1}.$$

[2.a.] Il s'agit de compter combien de fois on peut diviser n par p .

```
def v(n, p):
    valuation = 0
    while (n%p!=0):
        valuation += 1
        n = n//p
    return valuation
```

On peut aussi calculer la valuation récursivement.

```
def v(n, p):
    if n%p!=0:
        return 0
    else:
        return 1+v(n//p, p)
```

[2.b.] Dans la décomposition $n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_v p^v$, les entiers a_0, a_1, \dots, a_v sont les restes successifs de division euclidienne par p .

```
def somme_base(n, p):
    somme = 0
    while (n>0):
        somme += n%p
        n = n//p
    return somme
```

On peut aussi calculer cette valeur récursivement.

```
def somme_base(n, p):
    if n==0:
        return 0
    else:
        return (n%p)+somme_base(n//p, p)
```

[2.c.] On fait aussi simple que possible : on calcule d'abord $n!$ (ce qui est possible, puisque Python ne connaît pas de limite logicielle aux nombres entiers) et on calcule ensuite $v(n!, 10)$.

Certes, 10 n'est pas un nombre premier, mais c'est précisément ce qu'il nous faut!

```
def nzd(n):
    fact = 1
    for k in range(n):
        fact *= (k+1)
    return v(fact, 10)
```

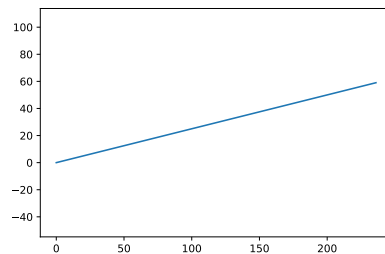
On trouve 124 pour $nzd(500)$ et 505 pour $nzd(2025)$.

☞ On peut calculer $n!$ pour des valeurs assez grandes de n (et au moins pour $n = 2025$), mais on ne peut pas les afficher dans le terminal car cela obligerait l'interpréteur à créer une chaîne de caractères trop longue!

[2.d.]

```
N = range(2,250)
Z = [nzd(n) for n in N]
D = [n-somme_base(n, 5) for n in N]
plt.axis("equal")
plt.plot(D, Z)
```

On constate une belle proportionnalité!



En inspectant les valeurs numériques, on conjecture que la différence entre n et $\text{somme_base}(n, 5)$ est égale à 4 fois la valeur de $nzd(n)$.

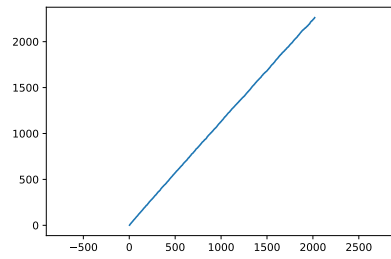
[3.] Aucun rapport avec ce qui précède, ni avec ce qui suit, c'est une pure question de codage!

Il faut en effet faire attention à calculer *une seule fois* chaque valeur de $\pi(2n)$. C'est ce que fait le code suivant, qui renvoie la liste $[\pi(2n)]_{1 \leq n \leq N}$.

```
def fonction_pi(N):
    nb_premiers, cumul = 1, [1] # cas de p=2*1
    for k in range(1, N):
        if isprime(2*k+1):
            nb_premiers += 1
            cumul.append(nb_premiers)
    return cumul
```

On peut alors tracer le nuage de points comme précédemment.

```
N = 10000
X = [2*n/(log(2*n)) for n in range(1, N+1)]
Y = fonction_pi(N)
```



Sur le graphe, on conjecture que

$$\pi(2n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2n}{\ln(2n)},$$

propriété qui porte depuis plus d'un siècle le nom de **Théorème des nombres premiers**, démontré par Hadamard et La Vallée-Poussin (cf Centrale 2025 MP 1 pour un avant-goût).

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note B_n , le nombre de partitions de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$. Par convention, on pose $B_0 = 1$.

On note R , le rayon de convergence de la série entière

$$\sum \frac{B_n}{n!} x^n$$

et on pose

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n.$$

[1.] Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k.$$

[2.] On dispose d'une fonction python qui calcule les coefficients binomiaux.

[2.a.] Écrire une fonction python qui renvoie B_n . Vérifier que $B_{10} = 115\,975$. Donner le nombre de chiffres de B_{500} .

[2.b.] Soit X , une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre 1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $m_n(X) = \mathbf{E}(X^n)$.

Estimer numériquement la valeur de $m_n(X)$ et comparer ces valeurs avec celles de B_n pour $0 \leq n \leq 7$.

[3.a.] Démontrer que $R > 0$.

[3.b.] Démontrer que la fonction génératrice f est solution de l'équation différentielle

$$y'(x) = e^x y(x).$$

[3.c.] Déterminer une expression de B_n . La conjecture sur les moments de la loi de Poisson est-elle vérifiée?

↳ D'autres questions, non traitées.

[1.] On classe les partitions en fonction du nombre d'éléments de la classe de $(n+1)$: il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles pour les éléments qui ne sont pas dans la classe de $(n+1)$ et, par définition, B_k partitions possibles pour l'ensemble de ces éléments.

[2.a.] Il faut faire en sorte de ne pas faire plusieurs fois le même travail...

```
def B(n):
    Bell = {0:1}
    for m in range(n):
        s = 0
        for k in range(m+1):
            s += binom(m, k)*Bell[k]
        Bell[m+1] = s
    return Bell[n]
```

• L'instruction `len(str(B(500)))` nous indique que l'entier B_{500} possède 844 décimales. On peut confirmer ce résultat avec le logarithme décimal, puisque la valeur de

```
math.log(B(500), 10)
```

est égale à 843,2058.

[2.b.] On simule un échantillon de N valeurs de X (avec N "grand") et on calcule la valeur moyenne de X^n pour $0 \leq n \leq 7$ puis les premiers nombres de Bell.

```
echantillon = rd.poisson(1, N)
moyennes = [np.mean(echantillon**n) for n in range(8)]
nb_Bell = [B(n) for n in range(8)]
```

On constate (évidemment) que les $m_n(X)$ sont proches des B_n ! Les valeurs suivantes ont été obtenues avec $N = 10^6$ en effectuant trois simulations consécutives.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
B_n	1	1	2	5	15	52	203	877
$\langle X^n \rangle$	1.0	1.000793	2.003673	5.020277	15.114345	52.658453	206.878473	900.188117
	1.0	1.001073	2.003127	5.008023	15.005667	51.836463	200.941587	857.836143
	1.0	1.000125	2.001725	5.009589	15.046157	52.200645	203.704205	877.732149

☞ L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet de comprendre pourquoi les "moyennes empiriques" diffèrent assez sensiblement des nombres de Bell dès que l'entier n est un peu "grand" et pourquoi on peut améliorer la précision du résultat en augmentant encore la valeur de N .

On conjecture donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n = e^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

[3.a.] Par récurrence, on montre que $B_n \leq n!$. On en déduit que le rayon de convergence est au moins égal à 1.

[3.b.] La fonction f est somme d'une série entière dont le rayon de convergence est au moins égal à 1 (et donc *strictement positif*). Par conséquent, f est de classe \mathcal{C}^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence et, d'après la relation de récurrence sur les B_n ,

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!} \cdot \frac{1}{(n-k)!} \right) x^n.$$

On reconnaît au second membre un produit de Cauchy : celui de la série entière de somme f (de rayon $R > 0$) et de la série exponentielle (de rayon infini). Par conséquent,

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f'(x) = e^x f(x).$$

[3.c.] En résolvant l'équation différentielle, on obtient

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = e^{-1} \exp(e^x).$$

☞ Cette expression montre en particulier que $R = +\infty$, mais cette précision n'est pas nécessaire pour la suite : il suffit de savoir que $R > 0$.

En appliquant le Théorème de Fubini,

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = e^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!} \right) \frac{x^k}{k!}$$

et par unicité du développement en série entière, la conjecture est démontrée :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad B_k = e^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}.$$

Pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on considère le système différentiel

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) = AY(t) \quad (S_A)$$

d'inconnue $Y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$.

L'espace $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de la norme euclidienne canonique.

On dit que la matrice A est **stable** si, pour toute solution Y de (S_A) , l'expression $\|Y(t)\|$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

[1.] On considère les matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -6 & -3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -4 & -3 & 8 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

[1.a.] Déterminer les valeurs propres de A_1 et de A_2 .

[1.b.] Pour $t_0 = 0$ et $Y_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad t_{k+1} = t_k + h \quad \text{et} \quad Y_{k+1} = Y_k + hAY_k.$$

Justifier que la suite $((t_k, Y_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est le schéma d'Euler associé à l'équation différentielle (S_A) et à la condition initiale (t_0, Y_0) . On donnera la signification du réel h .

Écrire une fonction `trace(A, Y0)` qui trace la norme euclidienne de Y_k pour $t_k \in [0, 10]$.

[1.c.] Sur le tracé précédent, remarquer que A_1 paraît stable et que A_2 ne l'est pas. Que remarque-t-on sur leurs spectres respectifs ?

[2.] Démontrer l'équivalence des propriétés suivantes. (On pourra utiliser la décomposition de Dunford.)

[2.a.] La matrice A est stable.

[2.b.] La matrice $\exp(tA)$ tend vers la matrice nulle 0_n lorsque t tend vers $+\infty$.

[2.c.] Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A , alors $\Re(\lambda) < 0$.

↳ D'autres questions non traitées.

Cf Mines 2023 MP 1 - Théorème de stabilité de Liapounov

[1.a.] On trouve que $\text{Sp}(A_1) = \{-3 \pm 2i, -2\}$ et que $\text{Sp}(A_2) = \{1_2, -1_1\}$ avec l'aide de python.

```
A = np.array([[0, 2, -3], [-6, -3, 4], [2, 2, -5]])
SpA = alg.eigvals(A)
B = np.array([[ -1, -2, 4], [-4, -3, 8], [-2, -2, 5]])
SpB = alg.eigvals(B)
```

[1.b.] Comme Y est une fonction de classe \mathcal{C}^1 , on déduit de la formule de Taylor-Young que

$$Y(t_{k+1}) = Y(t_k + h) \approx Y(t_k) + hY'(t_k) = Y(t_k) + h \cdot AY(t_k).$$

La suite $((t_k, Y_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est donc le schéma d'Euler associé à l'équation différentielle (S_A) et à la condition initiale (t_0, Y_0) , le paramètre h est le pas temporel (c'est-à-dire la valeur de dt).

✎ Il faut calculer la norme euclidienne canonique d'un vecteur colonne et le memento du concours ne rappelle pas comment l'obtenir aisément :

```
alg.norm(X, 2)
```

Il est donc sage de créer une fonction auxiliaire pour calculer cette valeur.

```
def norme_eucl(X):
    return np.sqrt(np.vdot(X, X))
```

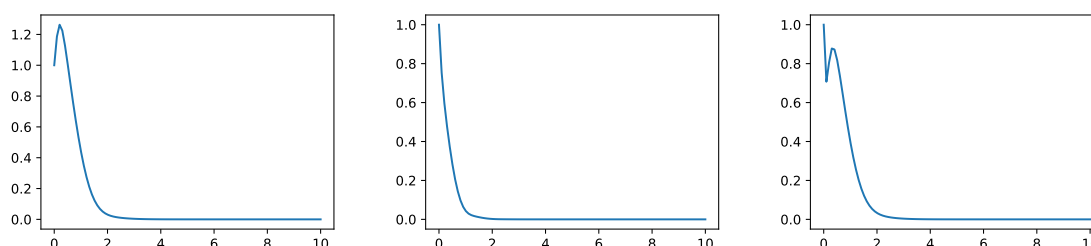
Le reste du calcul ne présente qu'une seule difficulté : il faut prendre soin d'avoir deux tableaux T et N de même taille.

```

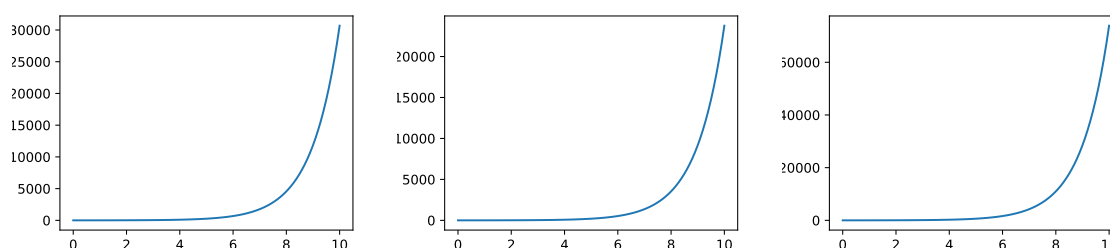
def trace(A, Y0):
    T = np.linspace(0, 10, 100)
    h = T[1]-T[0]
    Y = Y0.copy()
    N = [norme_eucl(Y)]
    for t in T[1:]:
        Y = Y + h*A.dot(Y)
        N.append(norme_eucl(Y))
    plt.figure(figsize=(4,3))
    plt.plot(T, N)

```

[1.c.] On fait varier la position initiale Y_0 dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
Il semble bien que la matrice A_1 soit stable...



et il est clair que la matrice A_2 ne l'est pas!



La partie réelle de chaque valeur propre de A_1 est strictement négative, alors que A_2 possède une valeur propre strictement positive. Serait-ce une simple coïncidence?

[2.c.] On considère ici A comme une matrice à coefficients *complexes* : son polynôme caractéristique est donc scindé.

Il existe une matrice diagonalisable D et une matrice nilpotente N qui commutent : $ND = DN$, telles que $A = D + N$. En particulier, les valeurs propres de D sont aussi les valeurs propres de A . On en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) = \exp(tD) \exp(tN).$$

☞ *C'est cette relation qui fait tout l'intérêt de la décomposition de Dunford ! Elle n'est pas explicitement au programme, mais on peut la déduire assez facilement du Théorème de décomposition des noyaux dès lors que le polynôme caractéristique de A est scindé.*

Comme D est diagonalisable, il existe une matrice inversible P et des scalaires (complexes) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tD) = P \text{Diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) P^{-1}.$$

Comme N est nilpotente, il existe un entier $p \geq 1$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tN) = I + tN + \dots + \frac{t^p N^p}{p!}.$$

☛ D'après le cours sur les équations différentielles, comme (S_A) est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants, la solution de (S_A) associée à la condition initiale $(t = 0, X)$ est la fonction

$$[t \mapsto \exp(tA)X].$$

↳ Tous les calculs qui suivent reposent sur une propriété simple :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |e^z| = \exp \Re(z).$$

• [c \implies b] Supposons que $\Re(\lambda_k) < 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$. Par croissances comparées,

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t\lambda_k} t^m = 0.$$

Considérons une norme $|\cdot|_{\mathbb{C}}$ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ subordonnée à une norme $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ quelconque sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

↳ Toutes les normes sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, espaces vectoriels de dimension finie, sont équivalentes, il est inutile d'être plus précis.

On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |\exp(tA)|_{\mathbb{C}} &\leq |\exp(tD)|_{\mathbb{C}} \cdot |\exp(tN)|_{\mathbb{C}} && \text{(sous-multiplicativité)} \\ &\leq |P|_{\mathbb{C}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |e^{t\lambda_k}| \cdot |E_{k,k}|_{\mathbb{C}} \right) \cdot |P^{-1}|_{\mathbb{C}} \cdot \left(\sum_{\ell=0}^p \frac{|t|^\ell}{\ell!} |N|_{\mathbb{C}}^\ell \right) && \text{(idem et inégalité triangulaire)} \\ &\leq |P|_{\mathbb{C}} |P^{-1}|_{\mathbb{C}} \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=0}^p \frac{|E_{k,k}|_{\mathbb{C}}}{\ell!} e^{t \Re(\lambda_k)} (|t| |N|_{\mathbb{C}})^\ell. \end{aligned}$$

Chaque terme du second membre tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$, donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\exp(tA)|_{\mathbb{C}} = 0.$$

On en déduit que $\exp(tA)$ tend vers la matrice nulle lorsque t tend vers $+\infty$.

↳ Petite subtilité à bien comprendre ici : on a démontré que $\exp(tA)$ tendait vers la matrice 0_n pour une norme donnée sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et donc, par équivalence des normes, pour toutes les normes possible sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

Mais $\exp(tA)$ et 0_n sont des matrices à coefficients réels et les normes euclidiennes canoniques respectives sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n |m_{i,j}|^2} \quad \text{et} \quad \sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n m_{i,j}^2}$$

prennent évidemment les mêmes valeurs sur les matrices à coefficients réels.

Il existe donc au moins une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ pour laquelle $\exp(tA)$ tend vers la matrice 0_n . Par équivalence des normes à nouveau (mais sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ cette fois), $\exp(tA)$ tend vers la matrice nulle pour toutes les normes sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

• [b \implies a] On note ici $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique sur \mathbb{R}^n (ou sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) et $|\cdot|$, la norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à $\|\cdot\|$.

Soit Y , une solution de (S_A) . Comme on l'a rappelé plus haut,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t) = \exp(tA)Y(0)$$

et donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|Y(t)\| \leq \|\exp(tA)\| \|Y(0)\|.$$

Par hypothèse, $\exp(tA)$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$, donc $\|Y(t)\|$ tend vers 0 par encadrement et cela vaut pour toute solution Y de (S_A) . Donc la matrice A est stable.

• [a \implies c] Nous allons à nouveau travailler avec des colonnes à coefficients complexes, en remarquant tout d'abord que

$$\forall u \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \quad \bar{u}^T \cdot u = \sum_{k=1}^n |u_k|^2$$

et que

$$\forall u \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \bar{u}^T \cdot u = \|u\|^2$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne canonique sur \mathbb{R}^n (norme de référence pour cet énoncé).

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, une valeur propre de A . Il existe donc un vecteur propre $U = X + iY \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, où X et Y sont des colonnes à coefficients *réels*. Comme $AU = \lambda U$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA)U &= e^{\lambda t}U \\ &= \exp(tA)X + i \exp(tA)Y.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{2t \Re(\lambda)} \bar{U}^\top \cdot U = \|\exp(tA)X\|^2 + \|\exp(tA)Y\|^2.$$

Or $\bar{U}^\top \cdot U$ est une constante strictement positive (puisque U n'est pas la colonne nulle) et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\exp(tA)X\|^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\exp(tA)Y\|^2 = 0$$

puisque la matrice A est supposée stable. Par conséquent,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{2t \Re(\lambda)} = 0,$$

ce qui prouve que $\Re(\lambda) < 0$ pour toute valeur propre complexe λ de A .