Mercredi 20 mai

Référence	Origine	Thèmes
136-1174	Centrale MP	Groupes
136-1202	"	Séries numériques, sommation d'Abel
136-1207	"	Inégalité de Schwarz (archi-classique)
136-1210	"	Intégrales généralisées
136-1215	"	Séries de fonctions
136-1240	"	Probabilités

Soit G, un groupe fini d'ordre n. On appelle ***caractère*** *de G tout morphisme de groupes χ de G vers $\mathbb{C}^*$. On note $\widehat{G}$, l'ensemble des caractères de G.*

[**1.**] *Démontrer que $\widehat{G}$ est un groupe et que tout caractère $\chi \in \widehat{G}$ est une application à valeurs dans $\mathbb{U}_n$.*

[**2.**] *Dans cette question, on suppose que le groupe G est cyclique. Démontrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et que $\widehat{G}$ est isomorphe à G.*

[**3.**] *Dans cette question, on suppose que le groupe G est abélien. Démontrer que : si H est un sous-groupe de G et si $\xi \in \widehat{H}$, alors il existe un caractère $\chi \in \widehat{G}$ tel que ξ soit la restriction de χ à H.*

[**1.**] On notera $\star$, la loi de composition interne sur G. On sait que la loi de composition interne "par défaut" sur $\mathbb{C}^*$ est la multiplication.

✍ *On connaît deux lois de composition interne sur $\mathbb{C}$: l'addition (neutre = 0) et la multiplication (neutre = 1). Puisqu'on évoque une structure de groupe sur $\mathbb{C}^*$, le seul neutre possible est 1 et il s'agit donc de la multiplication.*

Si on a du temps à perdre, on peut chercher à définir une autre loi de composition interne sur $\mathbb{C}^*$ — ça doit exister.

❧ Une structure de groupe sur $\widehat{G}$, soit, mais pour quelle loi ? L'énoncé ne le précise pas.

✍ *Soit Ω, un ensemble quelconque et E, un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$. On peut alors définir une opération "naturelle" sur l'ensemble $\mathscr{A}(\Omega, E)$ des applications de Ω dans E en "surchargeant" la loi $*$:*

$$\forall\, f, g \in \mathscr{A}(\Omega, E), \qquad (f * g) = [x \mapsto f(x) * g(x)]\,.$$

De la sorte, l'opération $*$ sur $\mathscr{A}(\Omega, E)$ "hérite" des propriétés de l'opération $*$ sur l'ensemble d'arrivée E.

Puisqu'on considère ici des applications à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ et que $\mathbb{C}^*$ est un groupe pour la multiplication des complexes, la loi naturelle sur $\widehat{G}$ est la multiplication "terme à terme" :

$$\forall\, \varphi, \psi \in \widehat{G},\ \forall\, x \in G, \qquad (\varphi\psi)(x) = \varphi(x)\psi(x) \in \mathbb{C}^*.$$

Il est clair que $\varphi\psi$ est une application de G dans $\mathbb{C}^*$. De plus,

$$\begin{aligned}
\forall\, x, y \in G, \qquad (\varphi\psi)(x \star y) &= \varphi(x \star y)\psi(x \star y) && \text{(loi sur } \widehat{G})\\
&= \varphi(x)\varphi(y)\psi(x)\psi(y) && \text{(morphismes de groupes)}\\
&= \varphi(x)\psi(x)\varphi(y)\psi(y) && \text{(multiplication dans } \mathbb{C})\\
&= (\varphi\psi)(x)(\varphi\psi)(y) && \text{(loi sur } \widehat{G})
\end{aligned}$$

ce qui montre que le produit $\varphi\psi$ est bien un morphisme de groupes de G dans $\mathbb{C}^*$. On a donc bien défini une *loi de composition interne* sur $\widehat{G}$.

❧ La multiplication dans $\mathbb{C}$ est associative et admet 1 pour élément neutre. On en déduit que la multiplication "terme à terme" dans $\widehat{G}$ est *associative* et admet l'application constante $[x \mapsto 1_{\mathbb{C}}]$ pour *élément neutre*.

❧ Enfin, quel que soit $\varphi \in \widehat{G}$ et $x \in G$, le nombre $\varphi(g)$ est un complexe non nul, donc inversible et l'application $\psi : G \to \mathbb{C}^*$ définie par

$$\forall\, x \in G, \qquad \psi(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$$

est un morphisme de groupes :

$$\begin{aligned}
\forall\, x, y \in G, \qquad \psi(x \star y) &= \frac{1}{\varphi(x \star y)} = \frac{1}{\varphi(x)\varphi(y)} && \text{(morphisme de groupes)}\\
&= \frac{1}{\varphi(x)}\frac{1}{\varphi(y)} = \psi(x)\psi(y)
\end{aligned}$$

et de plus

$$\forall\, x \in G, \qquad (\varphi\psi)(x) = \varphi(x)\psi(x) = 1_{\mathbb{C}}$$

donc ψ est symétrique de φ pour la loi interne sur $\widehat{G}$.

[**2.**] C'est une question de cours : tout groupe cyclique d'ordre n est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (et à $\mathbb{U}_n$).

✍ *L'énoncé n'est pas clair, il est difficile de savoir s'il suffit de citer le Théorème ou si une démonstration complète est attendue.*

Si un groupe cyclique $(G, \star)$ d'ordre n est engendré par un élément g, alors les éléments e_G, g, ..., g^{n-1} sont deux à deux distincts, $g^n = e_G$ et

$$G = \{g^k, \ k \in \mathbb{Z}\} = \{g^k, \ 0 \leqslant k < n\}.$$

On en déduit que l'application $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to G$ définie par $f(C) = g^k$ où k est un représentant (quelconque) de $C \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \oplus)$ sur $(G, \star)$.

(L'essentiel de la démonstration consiste à justifier que l'application f est bien définie.)

❧ Soit $g \in G$, un générateur du groupe $(G, \star)$:

$$G = \{g^k, \ k \in \mathbb{Z}\} = \{g^k, \ 0 \leqslant k < n\}.$$

Comme g engendre un groupe d'ordre n, on a

$$g^n = e_G \qquad \text{et} \qquad \forall\, 0 \leqslant k \neq \ell < n, \quad g^k \neq g^\ell. \tag{†}$$

Si $\varphi \in \widehat{G}$, alors $\zeta = \varphi(g) \in \mathbb{U}_n$ et comme φ est un morphisme,

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \qquad \varphi(g^k) = [\varphi(g)]^k = \zeta^k.$$

Il existe donc au plus un morphisme $\varphi \in \widehat{G}$ tel que $\varphi(g) = \zeta$.

Réciproquement, si $\zeta \in \mathbb{U}_n$, alors $\zeta^n = 1$ et par conséquent : si $k = qn + r$, alors

$$\zeta^k = (\zeta^n)^q . \zeta^r = \zeta^r$$

donc on peut définir une application $\varphi : G \to \mathbb{U}_n$ en posant

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \qquad \varphi(g^k) = \zeta^k.$$

Il est clair que cette application est un morphisme de groupes de $(G, \star)$ dans $(\mathbb{U}_n, \cdot)$:

$$\varphi(x \star y) = \varphi(g^k \star g^\ell) = \varphi(g^{k+\ell}) = \zeta^{k+\ell} = \zeta^k \zeta^\ell = \varphi(g^k)\varphi(g^\ell) = \varphi(x)\varphi(y).$$

✍ *Avec des quantificateurs, ce serait encore meilleur.*

Nous venons de démontrer que :
— $\varphi(g) \in \mathbb{U}_n$ pour tout morphisme $\varphi \in \widehat{G}$
— et que, pour tout $\zeta \in \mathbb{U}_n$, il existe un, et un seul, morphisme $\varphi \in \widehat{G}$ tel que $\varphi(g) = \zeta$.

Nous avons ainsi établi une *bijection* entre $\mathbb{U}_n$ et $\widehat{G}$, d'où $\#(\widehat{G}) = n$.

❧ Notons $\zeta_1 = \exp(2i\pi/n) \in \mathbb{U}_n$: ce nombre est une racine primitive n-ième de l'unité, c'est-à-dire un générateur du groupe cyclique $\mathbb{U}_n$.

Notons φ_1, l'élément de $\widehat{G}$ caractérisé par $\varphi_1(g) = \zeta_1$.

Pour tout $\zeta \in \mathbb{U}_n$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\zeta = \zeta_1^k$ (puisque $(\mathbb{U}_n, \cdot)$ est un groupe cyclique) et si φ est l'élément de $\widehat{G}$ caractérisé par $\varphi(g) = \zeta$, alors

$$\varphi(g) = (\zeta_1)^k = \big(\varphi_1(g)\big)^k = (\varphi_1)^k(g).$$

Comme φ et φ_1^k sont deux caractères qui prennent la même valeur en g et que g est un générateur du groupe $(G, \star)$, on en déduit que $\varphi = \varphi_1^k$.

Nous venons donc de démontrer que $\widehat{G}$ est un groupe monogène, engendré par φ_1. C'est un groupe d'ordre n, donc $\widehat{G}$ est un groupe cyclique d'ordre n. Il est donc isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \oplus)$ et par conséquent à $(G, \star)$.

❧ On a ainsi démontré que : pour tout groupe cyclique $(G, \star)$, le groupe $\widehat{G}$ des caractères est lui aussi cyclique, de même ordre que G (et donc isomorphe à G).

[**3.**] WTF !

rms136-1202

[Question de cours]
Énoncer les théorèmes de sommation des relations de comparaison pour les séries numériques.

[**1.**] *Démontrer que*

$$\sum_{k=1}^{n} \ln k \underset{n\to+\infty}{=} n\ln n - n + \mathcal{O}(\ln n).$$

[**2.**] *Soient $(a_k)_{k\geqslant 2}$, une suite réelle et $b : [2,+\infty[\to \mathbb{R}$, une application de classe $\mathscr{C}^1$. On pose*

$$\forall\, t \geqslant 2, \qquad A(t) = \sum_{k=2}^{\lfloor t\rfloor} a_k.$$

Démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 2, \qquad \sum_{k=2}^{n} a_k b(k) = A(n)b(n) - \int_2^n b'(t)A(t)\,dt.$$

[**3.**] *On note $\mathfrak{P}$, l'ensemble des nombres premiers et on pose*

$$\forall\, t \geqslant 2, \qquad R(t) = \sum_{\substack{p\in\mathfrak{P}\\ p\leqslant t}} \frac{\ln p}{p} - \ln t.$$

Démontrer que

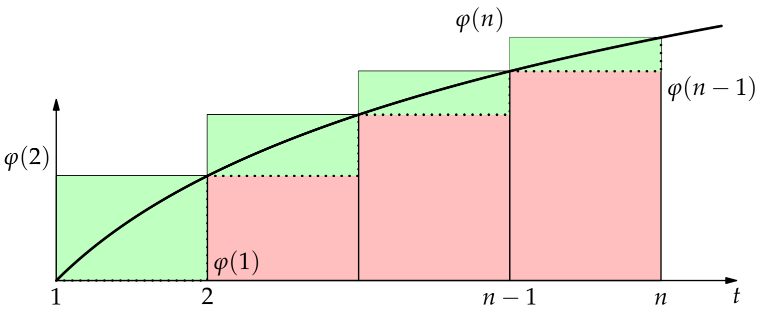
$$\sum_{\substack{p\in\mathfrak{P}\\ p\leqslant n}} \frac{1}{p} = 1 + \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) + \frac{R(n)}{\ln n} + \int_2^n \frac{R(t)}{t\ln^2 t}\,dt \qquad (\star)$$

pour tout entier $n \geqslant 2$.

[**4.**] *Démontrer qu'il existe une constante C telle que*

$$\sum_{\substack{p\in\mathfrak{P}\\ p\leqslant n}} \frac{1}{p} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(\ln n) + C + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\ln n}\Big).$$

[**1.**] La fonction $\ln$ est continue et croissante sur $[1,+\infty[$.



En comparant somme et intégrale, on obtient

$$\forall\, n \geqslant 2, \qquad \sum_{k=1}^{n-1} \ln k \leqslant \int_1^n \ln t\,dt \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln k$$

c'est-à-dire (puisque $\ln 1 = 0$)

$$\forall\, n \geqslant 2, \qquad n\ln n - n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln k \leqslant n\ln n - n + \ln n$$

et par conséquent

$$\sum_{k=1}^{n} \ln k \underset{n\to+\infty}{=} n\ln n - n + \mathcal{O}(\ln n).$$

[**2.**] Comme la fonction "partie entière", la fonction A est une fonction en escalier : pour tout entier $k \geqslant 2$, l'expression $A(t)$ est constante sur l'intervalle $[k, k+1[$:

$$\forall\, t \in [2,3[,\quad A(t) = A(2) = a_2 \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \geqslant 3,\ \forall\, t \in [k, k+1[,\quad A(t) = A(k) = \sum_{i=2}^{k} a_i. \qquad (\dagger)$$

En particulier,

$$a_2 = A(2) \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \geqslant 2, \qquad a_k = A(k) - A(k-1). \qquad (\ddagger)$$

Comme b est de classe $\mathscr{C}^1$ et A est en escalier, le produit $b'A$ est continu par morceaux sur $[2, +\infty[$, donc intégrable sur $[2, n]$ pour tout $n \geqslant 2$.

D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\forall\, n \geqslant 2, \qquad \int_2^n b'(t)A(t)\,dt &= \sum_{k=2}^{n-1} \int_k^{k+1} b'(t)A(t)\,dt = \sum_{k=2}^{n-1} \int_k^{k+1} b'(t)A(k)\,dt \\ &= \sum_{k=2}^{n-1} A(k)\big[b(k+1) - b(k)\big].\end{aligned}$$

Nous partons pour une transformation d'Abel :

$$\begin{aligned}\forall\, n \geqslant 2, \qquad \int_2^n b'(t)A(t)\,dt &= \sum_{k=2}^{n-1} A(k)b(k+1) - \sum_{k=2}^{n-1} A(k)b(k) \\ &= \sum_{k=3}^{n} A(k-1)b(k) - \sum_{k=2}^{n-1} A(k)b(k) \qquad \text{(changement d'indice)} \\ &= A(n-1)b(n) + \sum_{k=3}^{n-1} \big[A(k-1) - A(k)\big] b(k) - A(2)b(2) \\ &= \big[A(n) - a_n\big] b(n) - \sum_{k=3}^{n-1} a_k b(k) - a_2 b(2) \qquad (\text{par } \dagger \text{ et } \ddagger) \\ &= A(n)b(n) - \sum_{k=2}^{n} a_n b(n).\end{aligned}$$

[**3.**] On se doute bien qu'il faut appliquer la formule précédente : il suffit de deviner a_k et $b(t)$. Après quelques instants de réflexion, on pose

$$\forall\, k \geqslant 2, \quad a_k = \frac{\ell n\, k}{k} \cdot \mathbb{1}_{[k \in \mathfrak{P}]} \qquad \text{et} \qquad \forall t \geqslant 2, \quad b(t) = \frac{1}{\ell n\, t}.$$

On déduit alors de la question précédente que

$$\begin{aligned}\forall\, n \geqslant 2, \qquad \sum_{\substack{p \in \mathfrak{P} \\ p \leqslant n}} \frac{1}{p} &= \sum_{\substack{p \in \mathfrak{P} \\ p \leqslant n}} \frac{\ell n\, p}{p} \cdot \frac{1}{\ell n\, p} = \sum_{2 \leqslant k \leqslant n} a_k b(k) \\ &= A(n)b(n) - \sum_{k=2}^{n} a_k b(k) = \frac{1}{\ell n\, n} \sum_{\substack{p \in \mathfrak{P} \\ p \leqslant n}} \frac{\ell n\, p}{p} + \int_2^n \sum_{\substack{p \in \mathfrak{P} \\ p \leqslant t}} \frac{\ell n\, p}{p} \cdot \frac{dt}{t(\ell n\, t)^2}.\end{aligned}$$

On remarque alors que

$$\forall\, t \geqslant 2, \qquad A(t) = R(t) + \ell n\, t$$

et on en déduit que

$$\begin{aligned}\forall\, n \geqslant 2, \qquad \sum_{\substack{p \in \mathfrak{P} \\ p \leqslant n}} \frac{1}{p} &= \frac{R(n) + \ell n\, n}{\ell n\, n} + \int_2^n \big[R(t) + \ell n\, t\big] \frac{dt}{t(\ell n\, t)^2} \\ &= 1 + \frac{R(n)}{\ell n\, n} + \int_2^n \frac{R(t)}{t(\ell n\, t)^2}\,dt + \int_2^n \frac{dt}{t\,\ell n\, t}\end{aligned}$$

et la formule attendue en découle par un simple calcul de primitive.

[4.] Fixons $n \geqslant 2$ et notons ν_p, la valuation p-adique de $n!$ pour tout $p \in \mathfrak{P}$. Par définition,

$$n! = \prod_{\substack{p\in\mathfrak{P}\\ p\leqslant n}} p^{\nu_p} \qquad \text{et donc} \qquad \ln(n!) = \sum_{\substack{p\in\mathfrak{P}\\ p\leqslant n}} \nu_p \ln p.$$

Les entiers ν_p sont donnés par la **Formule de Legendre** :

$$\forall\, p \in \mathfrak{P}, \qquad \nu_p = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

✍ *Il ne faut pas réfléchir trop longtemps pour se convaincre que le terme général de cette somme est nul à partir d'un certain rang.*

On en déduit que

$$\forall\, p \in \mathfrak{P}, \qquad \frac{n}{p} - 1 \leqslant \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \leqslant \nu_p \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{p^k} \leqslant \frac{n}{p} + \frac{2n}{p^2}$$

et donc que

$$n\Bigg(\sum_{\substack{p\in\mathfrak{P}\\ p\leqslant n}} \frac{\ln p}{p}\Bigg) - n \leqslant \ln(n!) \leqslant n\Bigg(\sum_{\substack{p\in\mathfrak{P}\\ p\leqslant n}} \frac{\ln p}{p}\Bigg) + 2n\Bigg(\sum_{\substack{p\in\mathfrak{P}\\ p\leqslant n}} \frac{\ln p}{p^2}\Bigg).$$

Par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum \frac{\ln p}{p^2}$ est (absolument) convergente, donc ses sommes partielles sont bornées et

$$\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n\Bigg(\sum_{\substack{p\in\mathfrak{P}\\ p\leqslant n}} \frac{\ln p}{p}\Bigg) + \mathcal{O}(n).$$

La première question nous a donné un développement asymptotique de $\ln(n!)$ à $\mathcal{O}(\ln n)$ près. On en déduit que

$$R(n) = \Bigg(\sum_{\substack{p\in\mathfrak{P}\\ p\leqslant n}} \frac{\ln p}{p}\Bigg) - \ln n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1).$$

❧ Soient $t \geqslant 2$ et $n = \lfloor t \rfloor \geqslant 2$. Par définition,

$$R(t) = R(n) + \ln n - \ln t = R(n) - \ln \frac{t}{n}.$$

Or $2 \leqslant n \leqslant t < n+1$, donc $1 \leqslant t/n \leqslant 2$. Comme la suite de terme général $R(k)$ est bornée, on en déduit que l'expression $R(t)$ est bornée pour $t \geqslant 2$.

❧ Nous venons de démontrer que $R(t)$ est bornée au voisinage de $+\infty$. Il est alors clair par définition que Merci JBX !

$$\frac{R(n)}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\ln n}\Big).$$

Le changement de variable $u = \ln t$ montre que l'intégrale généralisée

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln^2 t}$$

est convergente et

$$\forall\, n \geqslant 2, \qquad \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t\ln^2 t} = \frac{1}{\ln n}.$$

La fonction

$$\left[t \mapsto \frac{1}{t\ln^2 t}\right]$$

est donc positive et intégrable sur $[2, +\infty[$ et $R(t) = \mathcal{O}(1)$ lorsque t tend vers $+\infty$, donc la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{R(t)}{t\ln^2 t}\right]$$

est intégrable sur $[2, +\infty[$ et

$$\int_2^n \frac{R(t)}{t\,\ell n^2\,t}\,dt = \int_2^{+\infty} \frac{R(t)}{t\,\ell n^2\,t}\,dt - \int_n^{+\infty} \frac{R(t)}{t\,\ell n^2\,t}\,dt$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} \int_2^{+\infty} \frac{R(t)}{t\,\ell n^2\,t}\,dt + \mathcal{O}\Big(\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t\,\ell n^2\,t}\Big) = \int_2^{+\infty} \frac{R(t)}{t\,\ell n^2\,t}\,dt + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\ell n\,n}\Big)$$

d'après le Théorème d'intégration des relations de comparaison.

On déduit enfin de $(\star)$ que

$$\sum_{\substack{p\in\mathfrak{P}\\ p\leqslant n}} \frac{1}{p} \underset{n\to+\infty}{=} \ell n(\ell n\,n) + \underbrace{\Big[1 - \ell n(\ell n\,2) + \int_2^{+\infty} \frac{R(t)}{t\,\ell n^2\,t}\,dt\Big]}_{=C} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\ell n\,n}\Big).$$

[Question de cours]
Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire, ainsi que sa démonstration.
[**1.**] *Soit* $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
[**1. a.**] *On suppose que la fonction* ff' *tend vers une limite (finie ou infinie) non nulle au voisinage de* $+\infty$. *Démontrer que* f^2 *tend vers* $+\infty$ *au voisinage de* $+\infty$.
[**1. b.**] *On suppose que* f^2 *et* $(f'')^2$ *sont intégrables sur* $\mathbb{R}$. *Démontrer que* $(f')^2$ *est aussi intégrable sur* $\mathbb{R}$.
[**1. c.**] *Démontrer que*

$$\left(\int_{\mathbb{R}} [f'(t)]^2 \, dt\right)^2 \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} [f(t)]^2 \, dt\right)\left(\int_{\mathbb{R}} [f''(t)]^2 \, dt\right).$$

[**1. d.**] *Démontrer que* f *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$ *et tend vers* 0 *au voisinage de* $\pm\infty$.

[**1. a.**] La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. D'après le Théorème fondamental,

$$\forall\, x \geqslant 0, \qquad f^2(x) - f^2(0) = 2\int_0^x f(t)f'(t)\, dt.$$

Si le produit $f(t)f'(t)$ tend vers une limite non nulle ℓ au voisinage de $+\infty$, alors :

— Si la limite ℓ est finie *non nulle*, alors $f(x)f'(x) \sim \ell$ lorsque x tend vers $+\infty$ et on peut appliquer directement un théorème d'intégration des relations de comparaison pour en déduire que
$$f^2(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\ell x$$
et comme $f^2(x) \geqslant 0$, on en déduit que $\ell > 0$.

— Si la limite est infinie, alors elle est nécessairement égale à $+\infty$ (pour la même question de signe) et il suffit de minorer l'intégrale par une quantité qui tend vers $+\infty$:
$$\begin{aligned}\exists\, A > 0,\ \forall\, x \geqslant A, \quad 2\int_0^x f(t)f'(t)\, dt &\geqslant 2\int_0^A f(t)f'(t)\, dt + 2\int_A^x M\, dt \\ &= f^2(A) - f^2(0) + 2M(x - A)\end{aligned}$$
pour conclure par comparaison.

Dans les deux cas, $f^2(x)$ tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.

✍ *Un examinateur digne de ce nom demandera systématiquement l'énoncé précis du Théorème d'intégration des relations de comparaison.*

[**1. b.**] Intégrons par parties : pour tout $A > 0$,

$$\int_0^A f'(t)f'(t)\, dt = \big[f(t)f'(t)\big]_0^A - \int_0^A f(t)f''(t)\, dt. \qquad (\star)$$

❧ Comme f et f'' sont intégrables au voisinage de $+\infty$, on déduit de l'inégalité de Schwarz que le produit ff'' est intégrable au voisinage de $+\infty$. Par conséquent, l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} f(t)f''(t)\, dt$$

est convergente.

Par ailleurs, l'expression

$$\int_0^A f'(t)f'(t)\, dt = \int_0^A \big[f'(t)\big]^2\, dt$$

est une fonction croissante de A, donc elle tend vers une limite (finie ou non) lorsque A tend vers $+\infty$.

On déduit alors de $(\star)$ que ff' tend vers une limite (finie ou non) au voisinage de $+\infty$. Or on suppose ici que f^2 est intégrable au voisinage de $+\infty$. D'après la question précédente, la limite de ff' est nécessairement nulle.

❧ On peut évidemment faire le même raisonnement au voisinage de $-\infty$: le produit ff' tend vers 0 au voisinage de $-\infty$.

❧ On déduit alors de $(\star)$ que l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \big[f'(t)\big]^2 \, dt$$

est convergente et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \big[f'(t)\big]^2 \, dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f''(t) \, dt. \tag{$\dagger$}$$

Comme la fonction intégrande est *positive*, cela prouve en fait que $[f']^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

[**1.c.**] En appliquant l'inégalité de Schwarz à $(\dagger)$, on obtient l'inégalité voulue.

[**1.d.**] Soient $x < y$, deux réels. D'après le Théorème fondamental et l'inégalité de Schwarz,

$$\big|f(y) - f(x)\big| = \left|\int_x^y f'(t) \, dt\right| \leqslant \left(\int_x^y 1^2 \, dt\right)^{1/2} \left(\int_x^y [f'(t)]^2 \, dt\right)^{1/2}.$$

Comme $(f')^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, il existe donc une constante $K > 0$ telle que

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad \big|f(y) - f(x)\big| \leqslant K\sqrt{|y - x|},$$

ce qui prouve que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

✍ *Une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite* ***hölderienne d'exposant*** *α lorsqu'il existe une constante $K > 0$ telle que*

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad \big|f(y) - f(x)\big| \leqslant K|y - x|^{\alpha}.$$

La fonction f étudiée ici est donc hölderienne d'exposant $\alpha = 1/2$.

Les fonctions lipschitziennes sont hölderiennes d'exposant 1.

Les fonctions hölderiennes d'exposant $\alpha > 1$ sont constantes (elles sont dérivables et leur dérivée est identiquement nulle).

Toutes les fonctions hölderiennes sont uniformément continues.

❧ *Plus généralement, une application*

$$\omega : [0, +\infty] \to [0, +\infty]$$

continue et nulle en 0 et telle que

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad \big|\varphi(x) - \varphi(y)\big| \leqslant \omega\big(|x - y|\big)$$

est un ***module de continuité*** *pour φ et une application est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, elle admet un module de continuité.*

❧ Nous savons que f est uniformément continue et que f^2 est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Supposons que f ne tende pas vers 0 au voisinage de $+\infty$. Il existe donc un réel ε_0 et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$ tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \big|f(x_n)\big| \geqslant 2\varepsilon_0.$$

Par continuité uniforme, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad |x - y| \leqslant \alpha \implies \big|f(x) - f(y)\big| \leqslant \varepsilon_0.$$

Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, on peut supposer (quitte à considérer une suite extraite) qu'elle est strictement croissante et que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} \geqslant x_n + 3\alpha.$$

Dans ces conditions, les segments $[x_n - \alpha, x_n + \alpha]$ sont deux à deux disjoints et, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in [x_n - \alpha, x_n + \alpha], \qquad \big|f(t)\big| \geqslant \big|f(x_n)\big| - \big|f(t) - f(x_n)\big| \geqslant \varepsilon_0.$$

D'après la relation de Chasles, puisque les segments sont deux à deux disjoints,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^{x_n+\alpha} f(t)^2\,dt \geqslant \sum_{k=0}^{n} \int_{x_k-\alpha}^{x_k+\alpha} f(t)^2\,dt \geqslant (n+1)\cdot\varepsilon_0^2\cdot(2\alpha).$$

Comme ce minorant tend vers $+\infty$, on en déduit que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} f(t)^2\,dt$$

est divergente et donc que f^2 n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$.

✍ *La même démonstration établit qu'une fonction uniformément continue et intégrable au voisinage de $+\infty$ tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.*

[**1.**] *Énoncer le Théorème de changement de variable et le Théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées.*
[**2. a.**] *Soit* $P \in \mathbb{R}[X]$*, un polynôme dont le degré est supérieur à 2. Démontrer la convergence de l'intégrale généralisée*

$$\int_0^{+\infty} \cos P(t)\,dt.$$

[**2. b.**] *L'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,dt$$

est-elle absolument convergente ?

✍ *L'énoncé comportait deux autres questions, non abordées.*

[**2. a.**] On considère un réel $a > 0$ tel que

$$\forall\, t \geqslant a, \qquad P'(t) \neq 0$$

et on intègre par parties l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} \cos P(t)\,dt = \int_a^{+\infty} \frac{P'(t)\cos P(t)}{P'(t)}\,dt$$

pour l'écrire sous la forme

$$\left[\frac{\sin P(t)}{P'(t)}\right]_a^{+\infty} + \int_a^{+\infty} \frac{P''(t)}{[P'(t)]^2}\cdot \sin P(t)\,dt.$$

Comme le degré n de P est supérieur à 2, le crochet converge bien et

$$\frac{P''(t)}{[P'(t)]^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{t^n}\Big),$$

ce qui prouve la convergence absolue de la dernière intégrale.

✍ *C'est très astucieux...*
Comme $\deg P \geqslant 2$*, il existe deux réels* A *et* B *tels que* P *réalise une bijection de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *de* $[A, +\infty[$ *sur* $[B, +\infty[$ *et, d'après le Théorème de la bijection, la bijection réciproque est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $[B, +\infty[$*. On pourrait donc tenter le changement de variable* $u = P(t)$*, mais pour vérifier qu'on arrive à une intégrale convergente, le chemin est long et semé d'embûches.*

[**2. b.**] Pour tout $a > 0$, le changement de variable $u = t^2$ donne

$$\int_0^a |\cos(t^2)|\,dt = \int_0^{a^2} \frac{|\cos u|}{\sqrt{u}}\,du.$$

On peut alors conclure en minorant l'intégrale par une série divergente comme dans le cours :

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \int_{n\pi-\pi/2}^{n\pi+\pi/2} \frac{|\cos u|}{\sqrt{u}}\,du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos v}{\sqrt{v+n\pi}}\,dv \qquad \text{(changement de variable } u = n\pi + v\text{)}$$
$$\geqslant \frac{1}{\sqrt{n\pi - \pi/2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos u\,du.$$

rms136-1215

On note E*, l'espace des fonctions de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*.*
Pour $f \in E$*, on pose* $f_0 = f$ *et*

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x t f_n(t)\,dt.$$

[Question de cours]
Énoncer le théorème d'intégration terme à terme.
[**1.**] *Étudier la convergence de la série de fonctions* $\sum f_n$
[**1. a.**] *dans le cas où la fonction* f *est constante*
[**1. b.**] *puis dans le cas général.*
[**2.**] *On note* $T(f)$*, la somme de la série de fonctions* $\sum f_n$*. Démontrer que* T *est un automorphisme de* E*.*

[**1. a.**] Supposons que $f(x) = C$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On vérifie par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = C\frac{x^2}{2^n n!}.$$

La série de fonctions $\sum f_n$ est donc une série entière dont le rayon de convergence est infini et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = C\exp\frac{x^2}{2}.$$

[**1. b.**] La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc localement bornée : pour tout $A > 0$, il existe un réel $M_A > 0$ tel que

$$\forall\, x \in [-A, A], \qquad |f(x)| \leqslant M_A.$$

On peut alors vérifier par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [-A, A], \qquad |f_n(x)| \leqslant M_A \frac{x^{2n}}{2^n n!}. \tag{$\star$}$$

✍ *Il s'agit essentiellement de reprendre la démonstration précédente et d'utiliser l'inégalité triangulaire intégrale.*

Une série entière dont le rayon de convergence est infini converge normalement sur tout segment $[-A, A]$. Par comparaison, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment $[-A, A]$ et la somme de la série est donc continue sur $\mathbb{R}$.
[**2.**] Comme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, la fonction f_0 est de classe $\mathscr{C}^1$ et par conséquent chaque fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ (Théorème fondamental et récurrence sur n) avec

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f_n'(x) = x f_{n-1}(x).$$

On déduit alors de $(\star)$ que, pour tout $A > 0$,

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in [-A, A], \qquad |f_n'(x)| \leqslant A M_A \frac{A^{2(n-1)}}{2^{n-1}(n-1)!}$$

et donc que la série dérivée $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment $[-A, A]$.
De ce fait, la somme $T(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \big[T(f)\big]'(x) = f'(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} x f_{n-1}(x) = f'(x) + xT(f)(x).$$

La fonction $T(f)$ est donc une solution du problème de Cauchy

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y'(t) - ty(t) = f'(t) \qquad \text{et} \qquad y(0) = f(0). \tag{$\dagger$}$$

(Par construction, $f_n(0) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.) Donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad T(f)(x) = f(0)e^{x^2/2} + e^{x^2/2}\int_0^x f'(t)e^{-t^2/2}\,dt.$$

Comme f' est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on déduit du Théorème fondamental que $T(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $T(f) \in E$.

❧ Il est clair que T est linéaire (par linéarité de l'intégration), donc T est un endomorphisme de E.

❧ Soit $g \in E$. L'application $t \mapsto g'(t) - tg(t)$ appartient à E, donc il existe une, et une seule, application $f \in E$ telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = g'(t) - tg(t) \qquad \text{et} \qquad f(0) = g(0).$$

Le problème de Cauchy (†) admettant une, et une seule, solution, on en déduit que cette application f est l'unique élément de E tel que $T(f) = g$. Donc $T : E \to E$ est une bijection et finalement T est bien un automorphisme de E.

rms136-1240

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sur lequel sont définies deux variables aléatoires discrètes X et Y, à valeurs réelles. On note E (resp. F), une partie finie ou dénombrable de $\mathbb{R}$ telle que $X(\omega) \in E$ (resp. $Y(\omega) \in F$) pour tout $\omega \in \Omega$.

[**1.**] *On suppose que X est d'espérance finie et on considère $A \in \mathcal{A}$, un évènement non négligeable. Démontrer que l'**espérance conditionnelle de** X **sachant** A, définie par*

$$\mathbf{E}(X \mid A) = \sum_{x \in E} x\,\mathbf{P}(X = x \mid A), \tag{1}$$

a bien un sens.

[**2.**] *Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, un système complet d'évènements et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite réelle. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose*

$$S(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mathbb{1}_{A_n}(\omega).$$

Démontrer que S est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et que cette variable aléatoire est d'espérance finie si, et seulement si, la série $\sum a_n\,\mathbf{P}(A_n)$ est absolument convergente.

[**3.**] *On suppose que X est d'espérance finie et que l'ensemble F (défini en préambule) est le **support** de la variable aléatoire Y :*

$$\forall\, y \in F, \quad \mathbf{P}(Y = y) > 0.$$

*On définit alors l'**espérance conditionnelle de** X **sachant** Y en posant*

$$\forall\, \omega \in \Omega, \qquad \mathbf{E}(X \mid Y)(\omega) = \sum_{y\in F} \mathbf{E}(X \mid Y = y)\mathbb{1}_{[Y=y]}(\omega). \tag{2}$$

[**3. a.**] *Démontrer que $\mathbf{E}(X \mid Y)$ est une variable aléatoire discrète d'espérance finie et que*

$$\mathbf{E}\big[\mathbf{E}(X \mid Y)\big] = \mathbf{E}(X). \tag{3}$$

[**3. b.**] *On suppose ici que X et Y sont toutes les deux des variables aléatoires discrètes de carré intégrable et que, de plus,*

$$\mathbf{E}(X \mid Y) = Y \qquad \text{et} \qquad \mathbf{E}(Y \mid X) = X.$$

Démontrer que $\mathbf{P}(X = Y) = 1$.

[**1.**] Comme la variable aléatoire X est d'espérance finie, la famille $(x\,\mathbf{P}(X = x))_{x\in E}$ est sommable. Comme $[X = x] \cap A \subset [X = x]$ pour tout $x \in E$,

$$\forall\, x \in E, \qquad 0 \leqslant |x|\ \mathbf{P}([X = x] \cap A) \leqslant |x|\ \mathbf{P}(X = x)$$

et, par comparaison, la famille $(x\,\mathbf{P}([X = x] \cap A))_{x\in E}$ est sommable. L'ensemble des familles sommables indexées par E étant un espace vectoriel, on en déduit que la famille de terme général

$$\forall\, x \in E, \qquad x\,\mathbf{P}(X = x \mid A) = \frac{1}{\mathbf{P}(A)} \cdot x\,\mathbf{P}([X = x] \cap A)$$

est sommable et donc que l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(X \mid A)$ est bien définie.

✍ *L'espérance conditionnelle sachant un évènement $\mathbf{E}(X \mid A)$ est un* nombre.

[**2.**] Comme $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements, pour chaque $\omega \in \Omega$, il existe un, et un seul, $n \in \mathbb{N}$ tel que $\omega \in A_n$. Par conséquent, la somme qui définit $S(\omega)$ compte au plus un terme non nul et est donc bien définie.

✍ *Comme les réels a_n peuvent être nuls, il se peut que* tous *les termes de la somme soient nuls.*

En particulier,

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \omega \in A_n \implies S(\omega) = a_n.$$

✍ *L'implication réciproque est fausse si les a_n ne sont pas deux à deux distincts.*

❧ Les valeurs prises par l'application $S : \Omega \to \mathbb{R}$ sont les éléments de l'ensemble fini ou dénombrable

$$I = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

En posant

$$\forall\, s \in I, \qquad I_s = \{n \in \mathbb{N} : a_n = s\},$$

on définit une partition de I et

$$\forall\, s \in I, \qquad [S = s] = \bigsqcup_{n \in I_s} A_n \in \mathcal{A}. \tag{4}$$

✍ *Chaque A_n est un évènement : $A_n \in \mathcal{A}$; l'ensemble I_s est contenu dans un ensemble au plus dénombrable, donc il est lui-même au plus dénombrable et comme $\mathcal{A}$ est une tribu, $\mathcal{A}$ est stable par union finie ou dénombrable.*

On a ainsi démontré que S était une variable aléatoire discrète.

❧ Par définition, la variable aléatoire S est d'espérance finie si, et seulement si, la famille $(s\,\mathbf{P}(S = s))_{s \in I}$ est sommable. D'après (4),

$$\forall\, s \in I, \qquad |s|\ \mathbf{P}(S = s) = |s| \sum_{n \in I_s} \mathbf{P}(A_n) = \sum_{n \in I_s} |a_n|\ \mathbf{P}(A_n)$$

par σ-additivité de $\mathbf{P}$ et parce que $a_n = s$ pour tout $n \in I_s$.

Comme $(I_s)_{s \in S}$ est une partition de I, on déduit du Théorème de Fubini-Tonelli (pour les familles de réels positifs) que la famille $(s\,\mathbf{P}(S = s))_{s \in S}$ est sommable si, et seulement si, la famille $(a_n\,\mathbf{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable.

❧ Bien entendu, dans le cas où S est d'espérance finie, on déduit du Théorème de Fubini (pour les familles réelles ou complexes) que

$$\mathbf{E}(S) = \sum_{s \in S} s\,\mathbf{P}(S = s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n\,\mathbf{P}(A_n). \tag{5}$$

✍ *Cette démonstration figure dans le cours, c'est ainsi qu'on démontre la Formule de transfert.*
Variante. *On aurait pu démontrer l'existence d'une variable aléatoire $U : \Omega \to \mathbb{N}$ telle que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad A_n = [U = n].$$

(Ce n'est ni immédiat, ni très compliqué.) Avec $f(n) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que $S = f(U)$, ce qui prouve directement que S est une variable aléatoire discrète et permet de conclure en appliquant *la Formule de transfert (à la fois pour la condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité de S et pour l'expression de $\mathbf{E}(S)$). .*

[**3. a.**] Comme Y est une variable aléatoire discrète de support F, la famille $([Y = y])_{y \in F}$ est un système complet d'évènements et aucun de ces évènements n'est négligeable. Par conséquent, l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(X \mid Y = y)$ est bien définie pour tout $y \in F$ [cf **1.**] et $\mathbf{E}(X \mid Y)$ est une variable aléatoire discrète [cf **2.** en remplaçant A_n par $[Y = y]$ et a_n par $\mathbf{E}(X \mid Y = y)$].

✍ *L'espérance conditionnelle sachant une variable aléatoire $\mathbf{E}(X \mid Y)$ est une* variable aléatoire *(et non un nombre).*

❧ *Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(X \mid Y = y)$ est égale à $\mathbf{E}(X)$ pour tout $y \in F$, donc l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(X \mid Y)$ est une variable aléatoire de Dirac, (presque sûrement) égale à $\mathbf{E}(X)$.*

❧ D'après **2.**, pour démontrer que la variable aléatoire $\mathbf{E}(X \mid Y)$ est d'espérance finie, il suffit de vérifier que la famille de terme général

$$\begin{aligned}\forall\, y \in F, \qquad \mathbf{E}(X \mid Y = y)\ \mathbf{P}(Y = y) &\overset{(1)}{=} \sum_{x \in E} x\,\mathbf{P}(X = x \mid Y = y)\ \mathbf{P}(Y = y)\\ &= \sum_{x \in E} x\,\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])\end{aligned}$$

est sommable.

Par hypothèse, la variable aléatoire X est d'espérance finie, donc la famille

$$\big(|x|\ \mathbf{P}(X=x)\big)_{x\in E}$$

est sommable. Comme la famille $([Y=y])_{y\in F}$ est un système complet d'évènements,

$$\forall\, x\in E,\qquad \mathbf{P}(X=x)=\sum_{y\in F}\mathbf{P}([X=x]\cap[Y=y])$$

et on déduit du Théorème de Fubini-Tonelli que la famille

$$\big(|x|\ \mathbf{P}([X=x]\cap[Y=y])\big)_{(x,y)\in E\times F}$$

est sommable. Par conséquent (Théorème de Fubini), pour tout $y\in F$, la sous-famille

$$\big(x\,\mathbf{P}([X=x]\cap[Y=y])\big)_{x\in E}$$

est sommable et la famille des sommes partielles

$$\forall\, y\in F,\qquad \sum_{x\in E}x\,\mathbf{P}([X=x]\cap[Y=y])=\mathbf{E}(X\mid Y=y)\ \mathbf{P}(Y=y)$$

est sommable.

La variable aléatoire $\mathbf{E}(X\mid Y)$ est donc d'espérance finie et, comme on l'a remarqué plus haut,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big(\mathbf{E}(X\mid Y)\big)&=\sum_{(x,y)\in E\times F}x\,\mathbf{P}\big([X=x]\cap[Y=y]\big)\\&=\sum_{x\in E}\Big(\sum_{y\in F}x\,\mathbf{P}\big([X=x]\cap[Y=y]\big)\Big). &&\text{(Théorème de Fubini)}\end{aligned}$$

Comme $([Y=y])_{y\in F}$ est un système complet d'évènements, par σ-additivité de $\mathbf{P}$,

$$\forall\, x\in E,\qquad \sum_{y\in F}x\,\mathbf{P}\big([X=x]\cap[Y=y]\big)=x\sum_{y\in F}\mathbf{P}\big([X=x]\cap[Y=y]\big)=x\,\mathbf{P}(X=x)$$

et finalement

$$\mathbf{E}\big(\mathbf{E}(X\mid Y)\big)=\sum_{x\in E}x\,\mathbf{P}(X=x)=\mathbf{E}(X).$$

✍ *Soit $f : F\to\mathbb{R}$, une application quelconque. D'après la Formule de transfert, la variable aléatoire discrète $Xf(Y)$ est d'espérance finie si, et seulement si, la famille*

$$\big(xf(y)\,\mathbf{P}([X=x]\cap[Y=y])\big)_{(x,y)\in E\times F}$$

est sommable.

Reprenons la démonstration précédente en supposant que $Xf(Y)$ soit d'espérance finie. Pour tout $y\in F$, la sous-famille

$$\big(xf(y)\,\mathbf{P}([X=x]\cap[Y=y])\big)_{x\in E}$$

est sommable, de somme

$$\begin{aligned}\sum_{x\in E}xf(y)\,\mathbf{P}([X=x]\cap[Y=y])&=f(y)\Big(\sum_{x\in E}x\,\mathbf{P}(X=x\mid Y=y)\Big)\,\mathbf{P}(Y=y)\\&=f(y)g(y)\,\mathbf{P}(Y=y)\end{aligned}$$

où on a posé $g(y)=\mathbf{E}(X\mid Y=y)$ pour tout $y\in F$. D'après le Théorème de Fubini, la famille des sommes partielles

$$\big(f(y)g(y)\,\mathbf{P}(Y=y)\big)_{y\in F}$$

est sommable et

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big[Xf(Y)\big]&=\sum_{(x,y)\in E\times F}xf(y)\,\mathbf{P}([X=x]\cap[Y=y]) &&\text{(Formule de transfert)}\\&=\sum_{y\in F}f(y)g(y)\,\mathbf{P}(Y=y) &&\text{(Théorème de Fubini)}\\&=\mathbf{E}\big[g(Y)f(Y)\big]. &&\text{(Formule de transfert)}\end{aligned}$$

❧ *On déduit de la définition* (2) *que* $g(Y(\omega)) = \mathbf{E}(X \mid Y)(\omega)$ *pour tout* $\omega \in \Omega$. *On a donc démontré que*

$$\mathbf{E}\big[Xf(Y)\big] = \mathbf{E}\big[\mathbf{E}(X \mid Y)\, f(Y)\big] \tag{6}$$

pour toute fonction f *telle que la variable aléatoire* $Xf(Y)$ *soit d'espérance finie. Le résultat cherché en découle avec* $f = 1$.

❧ *La notion de probabilité conditionnelle sert à exprimer la probabilité d'une intersection sous forme d'un produit :*

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A \mid B) \cdot \mathbf{P}(B).$$

La propriété (6) *en est l'analogue en termes d'espérance et donne la raison d'être de l'espérance conditionnelle : elle sert à reformuler l'espérance d'un produit de deux variables aléatoires et se réduit à l'égalité bien connue :* $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y)$ *lorsque les variables aléatoires* X *et* Y *sont indépendantes.*

[**3. b.**] Si X et Y sont des variables aléatoires de carré intégrable, alors le produit XY est d'espérance finie et on déduit de la généralisation (6) que

$$\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}\big(\mathbf{E}(X \mid Y) \cdot Y\big) = \mathbf{E}\big(X\,\mathbf{E}(Y \mid X)\big)$$

(par symétrie). Si $\mathbf{E}(X \mid Y) = Y$ et $\mathbf{E}(Y \mid X) = X$, alors

$$\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X^2) = \mathbf{E}(Y^2).$$

On en déduit que

$$\mathbf{E}(XY) = \sqrt{\mathbf{E}(X^2)}\sqrt{\mathbf{E}(Y^2)}$$

et donc (cas d'égalité dans l'inégalité de Schwarz) que X et Y sont colinéaires et de même sens. Comme $\mathbf{E}(X^2) = \mathbf{E}(Y^2)$, on en déduit en fait que $X = Y$.

✍ *Toutes ces égalités entre variables aléatoires sont indifféremment vérifiées pour tout* $\omega \in \Omega$ *ou seulement pour tout* ω *dans un évènement presque sûr, c'est sans importance ici.*