
VENDREDI 22 MAI

Référence	Origine	Thèmes
135-488	Mines MP	Arithmétique
135-506	"	Calcul matriciel (archi-classique)
135-837	"	Probabilités
135-963	Mines PSI	Équation différentielle
135-1177	Mines PC	Probabilités
135-1199	Centrale MP	Calcul matriciel
135-1400	Mines Telecom MP	Dénombrement
135-1404	"	Calcul matriciel
135-1409	"	Réduction
135-1412	"	Algèbre linéaire
132-1228	CCINP PC	Intégrales

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_n = 2^{2^n} + 1.$$

[1.] Calculer F_0 et démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F_n = 2 + \prod_{k=0}^{n-1} F_k.$$

[2.] On suppose que m et n sont deux entiers naturels distincts. Démontrer que

$$F_m \wedge F_n = 1.$$

[3.] En déduire que l'ensemble des nombres premiers est infini.

[1.] Il est clair que $F_0 = 2^1 + 1 = 3$ et que $F_1 = 2^2 + 1 = 5$. On a donc

$$F_1 = 2 + F_0.$$

☞ Par convention, un produit indexé par $0 \leq k \leq -1$ est égal à 1, donc la relation demandée est vraie aussi pour $n = 0$.

Supposons que la formule demandée soit vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$F_{n+1} - 1 = 2^{2^{n+1}} - 1 = 2^{2 \cdot 2^n} - 1 = (2^{2^n} - 1)^2 = (F_n - 1)^2.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= 1 + (F_n - 1)^2 \stackrel{\text{HR}}{=} 1 + \left(1 + \prod_{k=0}^{n-1} F_k\right)^2 = 2 + 2 \prod_{k=1}^{n-1} F_k + \left(\prod_{k=0}^{n-1} F_k\right)^2 = 2 + \left(\prod_{k=1}^{n-1} F_k\right) \left(2 + \prod_{k=0}^{n-1} F_k\right) \\ &\stackrel{\text{HR}}{=} 2 + \left(\prod_{k=0}^{n-1} F_k\right) F_n = 2 + \prod_{k=0}^n F_k \end{aligned}$$

et la formule est établie par récurrence.

[2.] Soient $0 \leq m < n$. On a donc $0 \leq m \leq n-1$ et, d'après la question précédente,

$$F_n - \left(\prod_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ k \neq m}} F_k\right) F_m = 2.$$

On déduit du Théorème de Bézout que le pgcd $F_m \wedge F_n$ divise 2, alors que ce pgcd est impair.

☞ La relation de Bézout nous assure que le pgcd $d = a \wedge b$ divise tous les entiers de la forme $au + bv$, quel que soit $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$.

☛ Les deux entiers F_m et F_n sont impairs, donc aucun des deux n'est divisible par 2 et leur pgcd est donc impair.

On a donc bien démontré que

$$\forall 0 \leq m < n, \quad F_m \wedge F_n = 1.$$

[3.] On a démontré que $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ était une famille infinie d'entiers deux à deux premiers entre eux.

☛ Supposons qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers : p_1, \dots, p_d . Chaque entier admet une, et une seule, décomposition en produit de facteurs premiers, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (\alpha_{n,1}, \dots, \alpha_{n,d}) \in \mathbb{N}^d, \quad n = \prod_{k=1}^d p_k^{\alpha_{n,k}}.$$

Si deux entiers m et n sont premiers entre eux, chaque facteur premier p_k apparaît au plus une fois avec une valuation non nulle dans la décomposition de ces deux entiers :

$$\forall m \neq n, \forall 1 \leq k \leq d, \quad \alpha_{m,k} \alpha_{n,k} = 0.$$

Par conséquent, une famille d'entiers deux à deux premiers entre eux contient au plus d entiers distincts.

☛ On a démontré par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers.

On en déduit que

$$0 = \text{tr}(J_r) = \text{tr}(Q^{-1}AP) = \text{tr}((AP)Q^{-1}) = \text{tr}(A.(PQ^{-1})) \neq 0$$

et la contradiction est manifeste.

• **Variante.** On raisonne encore par l'absurde.

Si l'hyperplan H ne contient aucune matrice inversible, alors en particulier $I_n \notin H$. Il existe donc une forme linéaire φ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$H = \text{Ker } \varphi \quad \text{et} \quad \varphi(I_n) = 1.$$

↪ Deux formes linéaires proportionnelles et non nulles ont même noyau. Comme $I_n \notin \text{Ker } \varphi$, on peut supposer que $\varphi(I_n) = 1$, quitte à remplacer φ par $\frac{1}{\varphi(I_n)} \cdot \varphi$.

Par linéarité de φ ,

$$\varphi(M - \varphi(M)I_n) = 0$$

donc $M - \varphi(M)I_n \notin \text{GL}_n(\mathbb{K})$ (puisque l'hyperplan H ne contient aucune matrice inversible). Autrement dit, quelle que soit la matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, le scalaire $\varphi(M)$ est une valeur propre de M .

• Quels que soient les indices $1 \leq i, j \leq n$ *distincts*, le spectre de la matrice élémentaire $E_{i,j}$ est réduit à 0, donc $\varphi(E_{i,j}) = 0$. Par conséquent, l'hyperplan H contient toutes les matrices $E_{i,j}$ avec $i \neq j$.

Cet hyperplan contient donc toutes les matrices de permutation sans point fixe (il en existe au moins une) et comme ces matrices sont inversibles, on bute sur une nouvelle contradiction.

↪ Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si la dimension n est paire, il est facile de construire une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont le spectre est vide : la contradiction apparaît très vite !

On considère une variable aléatoire X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

[1.] Démontrer que $\mathbf{P}(X \geq 2\lambda) \leq 1/\lambda$.

[2.] Soit Z , une variable aléatoire réelle, centrée, admettant un moment d'ordre deux. On pose $\mathbf{V}(Z) = \sigma^2$.

[2.a.] Démontrer que

$$\forall a > 0, \forall x > 0, \quad \mathbf{P}(Z \geq a) \leq \frac{\sigma^2 + x^2}{(x + a)^2}.$$

[2.b.] En déduire que

$$\mathbf{P}(Z \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

[3.] Démontrer l'inégalité de Cantelli :

$$\mathbf{P}(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{1 + \lambda}.$$

[1.] Tout d'abord, $[X \geq 2\lambda] = [X - \lambda \geq \lambda] \subset [|X - \lambda| \geq \lambda]$. Comme X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, alors $\mathbf{E}(X) = \mathbf{V}(X) = \lambda$ et on déduit de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que

$$\mathbf{P}(|X - \lambda| \geq \lambda) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}.$$

Par croissance de la mesure \mathbf{P} ,

$$\mathbf{P}(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}.$$

[2.a.] Soient a et x , deux réels strictement positifs. Alors $a + x > 0$ et par conséquent

$$[Z \geq a] = [Z + x \geq a + x] \subset [(Z + x)^2 \geq (a + x)^2].$$

↪ C'est bien parce que le minorant $a + x$ est positif que l'inclusion est vraie : elle découle du fait que la fonction $[t \mapsto t^2]$ est croissante sur \mathbb{R}_+ .

Comme Z admet un moment d'ordre deux, la variable aléatoire $(Z + x)^2$ est une variable aléatoire positive d'espérance finie et cette fois nous pouvons invoquer l'inégalité de Markov.

$$\mathbf{P}(Z \geq a) \leq \frac{\mathbf{E}[(Z + x)^2]}{(a + x)^2}$$

D'après la formule de Koenig-Huyghens,

$$\mathbf{E}[(Z + x)^2] = \mathbf{V}(Z + x) + [\mathbf{E}(Z + x)]^2 = \mathbf{V}(Z) + x^2$$

puisque Z est supposée centrée. On a donc bien

$$\forall a > 0, \forall x > 0, \quad \mathbf{P}(Z \geq a) \leq \frac{\sigma^2 + x^2}{(x + a)^2}.$$

[2.b.] Il faut prendre conscience d'un détail important dans la propriété précédente : le membre de gauche ne dépend pas de x . Par conséquent, on peut passer à la borne inférieure sur $x > 0$ dans le membre de droite. Pour cela, il suffit d'étudier les variations du second membre en fonction de x :

$$\forall x > 0, \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\sigma^2 + x^2}{(x + a)^2} \right) = \frac{2(ax - \sigma^2)}{(a + x)^3}.$$

On en déduit que le second membre est minimal pour $x = \sigma^2/a$ et, pour cette valeur particulière de x , on obtient

$$\forall a > 0, \quad \mathbf{P}(Z \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

[3.] Comme X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, alors $Z = X - \lambda$ est une variable aléatoire centrée qui admet un moment d'ordre deux :

$$\sigma^2 = \mathbf{V}(Z) = \mathbf{V}(X) = \lambda.$$

D'après l'inégalité précédente,

$$\mathbf{P}(X \geq 2\lambda) = \mathbf{P}(Z \geq \lambda) \leq \frac{\lambda}{\lambda + \lambda^2} = \frac{1}{1 + \lambda}.$$

• On a ainsi amélioré l'estimation de $\mathbf{P}(X \geq 2\lambda)$ (ce n'est pas une surprise, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est assez grossière) et cette amélioration est particulièrement sensible pour les faibles valeurs de λ .

On considère l'équation différentielle suivante.

$$x^2 y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 2(1+x) \quad (E)$$

[1.] Déterminer les solutions de l'équation homogène (H) associée à (E) qui sont de la forme $y(x) = x^\alpha$.

[2.] En déduire les solutions de (E) sur $I_+ =]0, +\infty[$ et sur $I_- =]-\infty, 0[$.

[3.] L'équation (E) admet-elle des solutions sur \mathbb{R} ?

[1.] Après injection de $y(x) = x^\alpha$ dans (H), on simplifie et finalement on cherche les réels α tels que

$$\forall x > 0, \quad (\alpha^2 - 3\alpha + 2)x^\alpha = 0.$$

Les seules solutions sont $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$.

Réciproquement, il est clair que toute fonction polynomiale de la forme $[x \mapsto ax + bx^2]$ est solution de (H) sur \mathbb{R} (et non pas seulement sur $]0, +\infty[$).

[2.] **Réduction à la forme canonique** —

Sur un intervalle I exempt de singularité, l'équation différentielle (E) peut s'écrire sous la forme canonique

$$\forall x \in I, \quad Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x) \quad (C)$$

avec

$$A(x) = \frac{1}{x^2} \begin{pmatrix} 0 & x^2 \\ -2 & 2x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(x) = \frac{1}{x^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 + 2x \end{pmatrix}$$

et une fonction $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ est solution de (E) (resp. de (H)) si, et seulement si, la fonction

$$Y = \left[x \mapsto \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} \right] \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$$

est solution de (C) (resp. de l'équation homogène (C_h) associée à (C)).

Sur les intervalles $I_- =]-\infty, 0[$ et $I_+ =]0, +\infty[$, les deux fonctions A et B sont continues. Dans ces conditions, le Théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure en particulier que l'ensemble des solutions de l'équation homogène (H) sur un intervalle I contenu dans I_- ou dans I_+ est un plan vectoriel.

D'après la question précédente, les applications F_1 et F_2 définies par

$$F_1 = \left[x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad \text{et} \quad F_2 = \left[x \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ 2x \end{pmatrix} \right]$$

sont deux solutions non proportionnelles de l'équation homogène (C_h) , donc le couple (F_1, F_2) est une base du plan des solutions de (C_h) .

Par conséquent, la matrice

$$M(x) = \begin{pmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix}$$

est inversible pour tout $x \in I$ et on peut trouver une solution particulière de l'équation (C) sous la forme $Y(x) = M(x)\Lambda(x)$ où $\Lambda \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ (méthode de variation des constantes).

On vérifie sans peine que $Y(x) = M(x)\Lambda(x)$ est solution de (C) sur l'intervalle I si, et seulement si,

$$\forall x \in I, \quad M(x)\Lambda'(x) = B(x)$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in I, \quad \Lambda'(x) = \frac{2}{x^3} \begin{pmatrix} -x - x^2 \\ 1 + x \end{pmatrix}.$$

En choisissant

$$\Lambda(x) = \frac{1}{x^2} \begin{pmatrix} 2x - 2x^2 \ln|x| \\ -1 - 2x \end{pmatrix},$$

on en déduit qu'une solution particulière de (C) sur I_+ est donnée par

$$Y(x) = M(x)\Lambda(x) = \begin{pmatrix} x & x^2 \\ \star & \star \end{pmatrix} \Lambda(x) = \begin{pmatrix} 1 - 2x \ln|x| - 2x \\ \star \end{pmatrix}.$$

☞ Comme, par définition,

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$$

et qu'on s'intéresse essentiellement à y , il est inutile d'effectuer les calculs sur la deuxième ligne.

☛ Une solution particulière de (E) est donc donnée par

$$\forall x \in I, \quad y_0(x) = 1 - 2x \ln|x|.$$

☞ On peut supprimer le terme $-2x$, puisqu'il s'agit d'une solution de l'équation homogène (H)!

D'après le principe de superposition, pour $I = I_-$ et pour $I = I_+$, une fonction $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ est solution de l'équation différentielle (E) si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que

$$\forall x \in I, \quad y(x) = [ax + bx^2] + [1 - 2x \ln|x|].$$

[3.] Si f est une solution de (E) sur \mathbb{R} , alors il existe des réels a_- , b_- , a_+ et b_+ tels que

$$\forall x < 0, \quad f(x) = a_-x + b_-x^2 + 1 - 2x \ln|x| \quad \text{et} \quad \forall x > 0, \quad f(x) = a_+x + b_+x^2 + 1 - 2x \ln|x|.$$

Quels que soient les réels a_- , b_- , a_+ et b_+ , le raccord en $x = 0$ est continu (limite nulle à gauche et à droite de 0) mais n'est pas dérivable en $x = 0$ (tangente verticale).

L'équation (E) n'admet donc pas de solution sur \mathbb{R} .

Soit X , une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

[1.] Démontrer que $\mathbf{P}(X \geq \lambda + 1) \leq \lambda$.

[2.] Démontrer que $\mathbf{P}(X \leq \lambda/3) \leq 9/4\lambda$.

[1.] Comme X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, on sait que $\mathbf{E}(X) = \mathbf{V}(X) = \lambda$.

• Si $\lambda \geq 1$, l'inégalité est évidente.

• Si $0 < \lambda < 1$, alors

$$[X \geq \lambda + 1] = [X - \mathbf{E}(X) \geq 1] \subset [|X - \mathbf{E}(X)| \geq 1].$$

• Quel que soit le réel $a > 0$,

$$[|Y| \geq a] = [Y \geq a] \cup [Y \leq -a],$$

donc $[Y \geq a] \subset [|Y| \geq a]$ et $[Y \leq -a] \subset [|Y| \geq a]$.

On en déduit que

$$\mathbf{P}(X \geq \lambda + 1) \leq \mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq 1) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{1^2} = \lambda$$

(inégalité de Bienaymé-Tchebychev).

[2.] On procède de la même manière : comme

$$[X \leq \lambda/3] = [X - \mathbf{E}(X) \leq -2\lambda/3] \subset [|X - \mathbf{E}(X)| \geq 2\lambda/3],$$

alors

$$\mathbf{P}(X \leq \lambda/3) \leq \mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq 2\lambda/3) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{(2\lambda/3)^2} = \frac{9}{4\lambda}$$

(inégalité de Bienaymé-Tchebychev à nouveau).

• L'inégalité précédente n'avait d'intérêt que pour les faibles valeurs de λ (et d'autant plus intéressante que λ était proche de 0).

Cette seconde inégalité n'a d'intérêt que si $\lambda \geq 9/4$ et est d'autant plus intéressante que λ est grand (le majorant est alors proche de 0, ce qui signifie que l'évènement étudié est très peu probable).

[1.] Rappeler le Théorème de Cayley-Hamilton. Démontrer ce théorème dans le cas d'une matrice diagonalisable.

[2.] Soient A et B , deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ dont les spectres sont disjoints : $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$.

[2.a.] Démontrer que les matrices $\chi_A(B)$ et $\chi_B(A)$ sont inversibles.

[2.b.] Démontrer que, pour toute matrice $C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une, et une seule, matrice $D \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AD - DB = C$.

[3.] Soit $C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

[3.a.] Démontrer que les matrices

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

sont semblables.

[3.b.] En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que la matrice M soit diagonalisable.

[1.] Théorème de Cayley-Hamilton : pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), le polynôme caractéristique χ_A est un polynôme annulateur de A .

• Si A est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $D = Q^{-1}AQ$ soit diagonale. On en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad D^k = Q^{-1}A^kQ$$

et donc que, par combinaison linéaire,

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad P(D) = Q^{-1}P(A)Q$$

et comme $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad P(D) = \text{Diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)).$$

Les scalaires λ_k sont les valeurs propres de A , c'est-à-dire les racines du polynôme caractéristique χ_A . Par conséquent, $\chi_A(D) = 0_n$ et donc

$$\chi_A(A) = Q\chi_A(D)Q^{-1} = 0_n.$$

[2.a.] Comme $\chi_A \in \mathbb{C}[X]$, c'est un polynôme scindé, unitaire, de degré n :

$$\chi_A = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k).$$

↳ Dans cette écriture, les λ_k (= les valeurs propres de A) ne sont pas nécessairement distinctes.

On en déduit une factorisation de la matrice $\chi_A(B)$ sous la forme

$$\chi_A(B) = (B - \lambda_1 I_n)(B - \lambda_2 I_n) \cdots (B - \lambda_n I_n).$$

Les λ_k sont les valeurs propres de A et comme les spectres de A et de B sont disjoints, aucun des scalaires λ_k n'est une valeur propre de B . Par conséquent, chaque matrice $(B - \lambda_k I_n)$ est inversible et la matrice $\chi_A(B)$ est inversible (en tant que produit de matrices inversibles).

• Par symétrie, la matrice $\chi_B(A)$ est inversible.

[2.b.]

↳ Puisqu'il s'agit de démontrer qu'une équation possède une, et une seule, solution, on cherche la bijection.

Considérons l'application $\varphi = [M \mapsto AM - MB]$. Cette application est clairement un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, espace vectoriel de dimension finie. D'après le Théorème du rang, il suffit de vérifier que son noyau est réduit à la matrice nulle pour en déduire que cette application est un automorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et conclure.

• Considérons donc une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AM = MB$. Supposons qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k M = MB^k$.

↳ Cette hypothèse de récurrence est vraie pour $k = 1$ (par hypothèse), elle est aussi vraie de manière évidente pour $k = 0$.

Alors

$$A^{k+1}M = A \cdot A^k M \stackrel{HR}{=} A \cdot MB^k = AM \cdot B^k = MB \cdot B^k = MB^{k+1}$$

donc cette propriété est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$ et, par combinaison linéaire,

$$\forall Q \in \mathbb{C}[X], \quad Q(A)M = MQ(B).$$

• En particulier, pour $Q = \chi_A$, on déduit du Théorème de Cayley-Hamilton que $0_n = 0_n \cdot M = M \cdot \chi_A(B)$ et comme $\chi_A(B)$ est inversible, on en déduit que $M = 0_n \cdot [\chi_A(B)]^{-1} = 0_n$.

Le noyau de l'endomorphisme φ est donc réduit à $\{0_n\}$, cqfd.

[3.a.] La matrice

$$Q = \begin{pmatrix} I & D \\ 0 & I \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{C})$$

est inversible (matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont tous distincts de 0) et on vérifie sans peine que son inverse est

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} I & -D \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

On vérifie sans plus de difficulté que

$$QMQ^{-1} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

ce qui prouve que les deux matrices sont semblables.

↳ En remplaçant C par $AD - DB$ dans la matrice M , on devine qu'on peut passer de la matrice M à la matrice diagonale par blocs au moyen d'opérations de pivot sur les lignes de blocs (= multiplication à gauche par une matrice inversible) et sur les colonnes de blocs (= multiplication à droite par une matrice inversible). On peut ainsi deviner quelle matrice Q peut convenir.

• Si on ne devine pas la matrice Q , on peut toujours écrire cette matrice par blocs :

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{pmatrix}$$

et développer les deux produits

$$QM \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} Q.$$

En identifiant terme à terme les quatre blocs, on doit pouvoir deviner les choix convenables pour Q_1, Q_2, Q_3 et Q_4 .

[3.b.] La matrice M est donc diagonalisable si, et seulement si, la matrice diagonale par blocs $M' = \text{Diag}(A, B)$ est diagonalisable.

Quel que soit le polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$,

$$Q(M') = \text{Diag}(Q(A), Q(B))$$

donc Q est un polynôme annulateur de M' si, et seulement si, c'est un polynôme annulateur de A et de B .

• Si M' est diagonalisable, alors il existe un polynôme annulateur Q de M' qui est scindé à racines simples, donc A et B admettent un polynôme annulateur scindé à racines simples, donc A et B sont diagonalisables.

• Réciproquement, si A et B sont diagonalisables, leurs polynômes minimaux μ_A et μ_B sont scindés à racines simples. On a fait l'hypothèse que les spectres de A et de B étaient disjoints, donc les polynômes μ_A et μ_B n'ont aucune racine en commun.

↳ Les racines du polynôme minimal sont les valeurs propres !

Par conséquent, le produit $\mu_A \mu_B$ est un polynôme scindé à racines simples et comme ce polynôme annule A et B , c'est un polynôme annulateur de M et M est donc diagonalisable.

• Conclusion : la matrice M est diagonalisable si, et seulement si, A et B sont diagonalisables.

Quel est le nombre d'applications

$$f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$$

telles que $f \circ f = f$?

• **Analyse.**

L'ensemble $\text{Im } f$ est une partie non vide de $\llbracket 1, n \rrbracket$, donc il y a $2^n - 1$ choix possibles pour $\text{Im } f$.
Pour tout $x \in \text{Im } f$, il existe $u \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $x = f(u)$, on doit avoir

$$f(x) = (f \circ f)(u) = f(u) = x$$

(et donc *un seul* choix possible pour $f(x)$).

Pour $x \notin \text{Im } f$, on doit avoir $f(x) \in \text{Im } f$ (et donc r choix possibles si $\#(\text{Im } f) = r$).

• **Synthèse.**

On construit f en commençant par choisir une partie non vide F de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et on pose $f(x) = x$ pour tout $x \in F$, de telle sorte que $F \subset \text{Im } f$.

Pour $x \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus F$, on choisit $f(x) \in F$ arbitrairement, si bien que $F = \text{Im } f$.

Quels que soient les choix opérés, on obtient ainsi une fonction f telle que $f \circ f = f$.

Pour tout $1 \leq r \leq n$, il y a $\binom{n}{r}$ choix possibles pour une partie F de cardinal r et, pour les $(n - r)$ éléments x qui n'appartiennent pas à F , il y a r^{n-r} choix.

Il y a donc

$$\sum_{r=1}^n \binom{n}{r} r^{n-r}$$

applications $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ telles que $f \circ f = f$.

Soit $n \geq 2$, un entier.

On considère la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad a_{i,j} = \sin(i+j).$$

Calculer le rang de A , puis le déterminant de A .

Considérons les colonnes $X, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définies par

$$X^T = (\cos 1 \quad \cos 2 \quad \cdots \quad \cos n) \quad \text{et} \quad Y^T = (\sin 1 \quad \sin 2 \quad \cdots \quad \sin n).$$

Comme $a_{i,j} = \sin i \cos j + \cos i \sin j$, la j -colonne de A est égale à $\sin j \cdot X + \cos j \cdot Y$ et toutes les colonnes de A sont donc des combinaisons linéaires de X et Y . Par conséquent, le rang de A est inférieur à 2.

• Le déterminant de la matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix} \sin 2 & \sin 3 \\ \sin 3 & \sin 4 \end{pmatrix}$$

est égal à $\sin 2 \sin 4 - \sin 3 \sin 3 = \frac{(\cos 2 - \cos 6) - (1 - \cos 6)}{2} = \frac{\cos 2 - 1}{2} \neq 0$, donc le rang de A_2 est égal à 2 et le rang de A est supérieur à 2.

↳ Le rang d'une matrice est supérieur ou égal à r si, et seulement si, il existe au moins un mineur d'ordre r non nul.

Le déterminant de la matrice A_2 est un mineur principal d'ordre 2, non nul, de A .

• On a ainsi démontré que $\text{rg } A = 2$ pour tout entier $n \geq 2$; que $\det A = \frac{\cos 2 - 1}{2}$ pour $n = 2$ et $\det A = 0$ pour tout $n \geq 3$.

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

[1.] Expliciter une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

[2.] Soit $X \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$X^2 + X = A.$$

On pose $\Delta = P^{-1}XP$.

[2.a.] Calculer $\Delta^2 + \Delta$.

[2.b.] Démontrer que D et Δ commutent. En déduire que Δ est diagonale.

[3.] Résoudre l'équation $X^2 + X = A$ pour $X \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

[1.] On reconnaît une matrice bien connue et on en déduit que les matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vérifient $P^{-1}AP = D$.

[2.a.] Sans surprise,

$$\Delta^2 + \Delta = P^{-1}(X^2 + X)P = P^{-1}AP = D.$$

[2.b.] D'après la question précédente, D est un polynôme en Δ , donc D et Δ commutent.

✎ Restons élémentaires et posons

$$\Delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{ce qui donne} \quad D\Delta = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta D = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2c & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que D et Δ commutent si, et seulement si, $b = c = 0$ (les réels a et d étant quelconques), c'est-à-dire si, et seulement si, Δ est diagonale.

✎ On a travaillé matriciellement pour que le raisonnement soit aussi bref que possible. Mais il faut être conscient qu'il s'agit ici d'un cas particulier simple d'un résultat plus général : si M est une matrice diagonale avec n coefficients diagonaux deux à deux distincts, alors les matrices qui commutent à M sont les matrices diagonales.

Cette propriété peut se démontrer par un calcul matriciel direct (assez fastidieux) ou vectoriellement en introduisant un endomorphisme diagonalisable dont les sous-espaces propres sont des droites vectorielles (plus élégant).

[3.] Sachant que $\Delta = \text{Diag}(a, d)$, l'équation $\Delta^2 + \Delta = D$ se traduit par $a^2 + a = 2$, c'est-à-dire $a = 1$ ou $a = -2$, et par $d^2 + d = 0$, c'est-à-dire $d = 0$ ou $d = -1$. Il y a donc quatre solutions pour Δ :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

qui donnent quatre solutions pour $X = P\Delta P^{-1}$. Sachant que

$$A = PDP^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

on en déduit que les quatre solutions pour X sont :

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2}A, \quad P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = A - I_2, \quad P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = -A, \quad P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{-1}{2}A - I_2. \quad (*)$$

✎ L'énoncé nous poussait à diagonaliser la matrice A , mais on peut s'en passer, il suffit de connaître un polynôme annulateur de A pour expliciter les solutions de l'équation.

✎ Variante avec le polynôme minimal

Comme $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ n'est pas une homothétie, son polynôme minimal est de degré 2, donc la dimension de la sous-algèbre $\mathbb{R}[A]$ des polynômes en A est égale à 2 et par conséquent $\mathbb{R}[A] = \mathbb{R}_1[A]$. Comme $A^2 = 2A$, le polynôme minimal de A est donc égal à $X^2 - 2X = X(X - 2)$.

De même, quelle que soit la matrice $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, la sous-algèbre $\mathbb{R}[M]$ est égale à $\mathbb{R}_1[M]$ (puisque le degré du polynôme minimal de M est inférieur à 2) et si $M^2 + M = A$, alors $A \in \mathbb{R}_1[M]$. Comme $\mathbb{R}_1[M]$ est une sous-algèbre, elle contient donc la sous-algèbre $\mathbb{R}_1[A]$ engendrée par A et, par égalité des dimensions, on a donc : $\mathbb{R}_1[M] = \mathbb{R}_1[A]$. En particulier, $M \in \mathbb{R}_1[A]$ et il existe deux réels α et β tels que $M = \alpha I + \beta A$.

On en déduit que

$$M^2 = \alpha^2 A^2 + 2\alpha\beta A + \beta^2 I = 2\alpha(\alpha + \beta)A + \beta^2 I$$

puisque $A^2 = 2A$. L'équation $X^2 + X = A$ devient alors

$$\alpha(2\alpha + 2\beta + 1)A + \beta(\beta + 1)I = A = 1 \cdot A + 0 \cdot I.$$

Comme A n'est pas une homothétie, le couple (A, I) est une famille libre et l'équation $X^2 + X = A$ est alors équivalente au système

$$\begin{cases} \alpha(2\alpha + 2\beta + 1) = 1 \\ \beta(\beta + 1) = 0 \end{cases}$$

ce qui nous donne $\beta = 0$ et $\alpha(2\alpha + 1) = 1$ d'une part et $\beta = -1$ et $\alpha(2\alpha - 1) = 1$ d'autre part. On a ainsi retrouvé les quatre solutions présentées plus haut (\star).

Soient E , un espace vectoriel réel de dimension finie et $u \in L(E)$, un endomorphisme tel que

$$u^3 + u = \omega_E$$

(où ω_E est l'endomorphisme nul de E).

[1.] Soit $x \in \text{Im } u$. Calculer $u^2(x)$.

[2.] On note v , l'endomorphisme de $\text{Im } u$ induit par restriction de u .

[2.a.] Justifier l'existence de v .

[2.b.] Démontrer que v est un automorphisme de $\text{Im } u$.

[3.] Démontrer que l'entier $\text{rg } u$ est pair.

[1.] Comme $x \in \text{Im } u$, il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $x = u(x_0)$ et d'après la relation de liaison

$$u^2(x) = u^3(x_0) = -u(x_0) = -x.$$

[2.a.] Le sous-espace $\text{Im } u$ est stable par u , donc il existe bien un endomorphisme de $\text{Im } u$ induit par restriction de u .

☞ *Il faut bien comprendre qu'il n'y a pas d'autre raison à avancer que la stabilité du sous-espace.*

[2.b.] Par définition, $v : \text{Im } u \rightarrow \text{Im } u$ et $v(x) = u(x)$ pour tout $x \in \text{Im } u$. D'après la première question, $(v \circ v)(x) = u^2(x) = -x$ pour tout $x \in \text{Im } u$. Autrement dit, $v \circ v = -I_{\text{Im } u}$, ce qui prouve que v est un automorphisme de $\text{Im } u$ et que $v^{-1} = -v$.

[3.] Par définition, si l'entier $\text{rg } u$ est impair, alors la dimension du sous-espace $\text{Im } u$ est impaire et le polynôme caractéristique de $v \in L(\text{Im } u)$ est un polynôme à coefficients réels dont le degré est impair.

Un tel polynôme admet nécessairement une racine, donc v possède au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$.

☞ *L'existence d'une racine provient du Théorème des valeurs intermédiaires.*

On a remarqué que $X^2 + 1$ était un polynôme annulateur de v et on sait que toute valeur propre de v est nécessairement une racine de tout polynôme annulateur de v .

Or $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X^2 + 1$ n'a pas de racine réelle, c'est donc absurde.

Le rang de v est donc pair.

☛ Variante avec des matrices complexes

Par hypothèse, $X(X^2 + 1) = X(X + i)(X - i)$ est un polynôme annulateur scindé à racines simples (dans $\mathbb{C}[X]$!) pour la matrice A canoniquement associée à l'endomorphisme u . Il existe donc une matrice de passage $P \in GL_n(\mathbb{C})$ (à coefficients **complexes**) et une matrice diagonale à coefficients complexes

$$D = \text{Diag}(0, \dots, 0, i, \dots, i, -i, \dots, -i) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$$

telles que $P^{-1}AP = D$.

En particulier, A et D ont même polynôme caractéristique (ce sont deux matrices *semblables*) et comme $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, les coefficients de son polynôme caractéristique sont des nombres **réels**.

On en déduit que les multiplicités de $\pm i$, racines complexes conjuguées du polynôme $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$, sont égales et cela prouve qu'il y a autant de coefficients diagonaux de D égaux à $+i$ que de coefficients diagonaux de D égaux à $-i$.

Le nombre de coefficients diagonaux non nuls est donc pair et il s'agit du rang de D , c'est-à-dire du rang de A (deux matrices semblables ont même rang).

On étudie

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt.$$

[1.] Démontrer que F est définie sur \mathbb{R}_+^* .

[2.] Démontrer que F est positive et décroissante. Déterminer sa limite en $+\infty$.

[3.] Démontrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* . Calculer $F(x) - F'(x)$ pour $x > 0$ et en déduire que F est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* .

[4.] Démontrer que

$$\forall x > 0, \quad F(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

En déduire un équivalent de F au voisinage de 0.

[1.] Posons $I = [0, +\infty[$ et $\Omega =]0, +\infty[$, ainsi que

$$\forall (t, x) \in I \times \Omega, \quad \varphi(t, x) = \frac{e^{-xt}}{1+t}.$$

• Soit $x \in \Omega$ (fixé). Il est clair que la fonction

$$[t \mapsto \varphi(t, x)]$$

est continue sur l'intervalle I . Il est clair que

$$\varphi(t, x) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-xt})$$

et comme $x > 0$, la fonction $[t \mapsto e^{-xt}]$ est intégrable sur I .

Par conséquent, la fonction $[t \mapsto \varphi(t, x)]$ est intégrable sur I et la fonction F est donc bien définie sur Ω .

[2.] Soient $0 < x < y$. Pour tout $t \in I$, il est clair que $t \geq 0$ et donc que

$$0 \leq \frac{e^{-yt}}{1+t} \leq \frac{e^{-xt}}{1+t}.$$

En intégrant bornes croissantes (pour $t \in I$), on en déduit que

$$0 \leq F(y) \leq F(x),$$

ce qui prouve que F est positive et décroissante sur Ω .

• En particulier, la fonction F tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$. Il reste à déterminer la valeur de cette limite (positive).

Il est clair que

$$\forall (t, x) \in I \times \Omega, \quad 0 \leq \frac{e^{-xt}}{1+t} \leq e^{-xt}$$

et comme $x > 0$, on en déduit par intégration bornes croissantes que

$$\forall x \in \Omega, \quad 0 \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}.$$

Par encadrement, la fonction F tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

↳ **Variante**

On sait que, pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto \varphi(t, x)]$ est intégrable sur I .

Il est clair que, pour tout $t \in]0, +\infty[$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(t, x) = 0.$$

(C'est faux pour $t = 0$, mais c'est sans importance.)

Enfin, il est tout aussi clair que

$$\forall x \geq 1, \forall t \in]0, +\infty[, \quad |\varphi(t, x)| \leq e^{-t}$$

où le majorant est indépendant de x et intégrable sur I en fonction de t : la condition de domination est donc vérifiée pour $x \in [1, +\infty[$, c'est-à-dire au voisinage de $+\infty$.

D'après le Théorème de convergence dominée,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(t, x) dt = 0.$$

[3.] **Régularité** — Il est clair que, pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto \varphi(t, x)]$ est de classe \mathcal{C}^1 sur Ω et que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x) = \frac{-te^{-xt}}{1+t}.$$

Intégrabilité — On a justifié plus haut que, pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto \varphi(t, x)]$ est intégrable sur I .

De même, pour tout $x \in \Omega$, la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x) \right]$$

est continue sur I et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-xt}.$$

Comme $x > 0$, on en déduit que la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x) \right]$$

est intégrable sur I .

Domination — Soient $a > 0$ et $\mathcal{V} = [a, +\infty[$. Alors

$$\forall (t, x) \in I \times \mathcal{V}, \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x) \right| \leq e^{-at}.$$

Le majorant est indépendant de x et intégrable sur I en fonction de t , donc la condition de domination est satisfaite.

D'après le Théorème de Leibniz sur les intégrales fonctions d'un paramètre, la fonction F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{V} pour tout $a > 0$ (et donc de classe \mathcal{C}^1 sur Ω) et

$$\forall a > 0, \forall x > a, \quad F'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{1+t} dt.$$

• On en déduit que

$$\forall x > 0, \quad F(x) - F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}$$

et donc que

$$\forall x \in \Omega, \quad F'(x) = F(x) - \frac{1}{x}.$$

On a démontré que la fonction F était de classe \mathcal{C}^1 sur Ω .

• HR : Supposons que F soit de classe \mathcal{C}^n sur Ω . La relation précédente nous dit alors que F' est de classe \mathcal{C}^n sur Ω et donc que F est en fait de classe \mathcal{C}^{n+1} sur Ω .

On a ainsi démontré par récurrence que F est de classe \mathcal{C}^n sur Ω pour tout $n \geq 1$ et donc de classe \mathcal{C}^∞ .

[4.] Commençons par remarquer que

$$\forall x \in \Omega, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t)+x}}{1+t} dt = e^x \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t)}}{1+t} dt.$$

Posons alors $u = x(1+t)$ (changement de variable affine avec $du = x dt$, licite car $x > 0$). On a donc

$$\frac{du}{1+u} = \frac{dt}{1+t}$$

(si tant est qu'une telle égalité ait vraiment un sens mathématique!) et on en déduit que

$$\forall x \in \Omega, \quad F(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

☞ Cette nouvelle expression de $F(x)$ permet de prouver que F est de classe \mathcal{C}^∞ sur Ω en appliquant le Théorème fondamental seulement (sans avoir à justifier l'application du Théorème de dérivation comme on l'a fait plus haut).

☛ Il est clair que

$$\frac{e^{-u}}{u} \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{u}$$

et que la fonction $[u \mapsto 1/u]$ est positive et **non** intégrable au voisinage de 0. D'après le Théorème d'intégration des relations de comparaison,

$$\int_x^1 \frac{e^{-u}}{u} du \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \int_x^1 \frac{1}{u} du = -\ln x.$$

☞ On aura remarqué qu'il s'agit ici d'infiniment grands.

D'après la relation de Chasles, pour tout $x > 0$,

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = \int_x^1 \frac{e^{-u}}{u} du + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du}_{\text{Cte}}$$

et d'après l'équivalent précédent,

$$F(x) = \underbrace{e^x}_{\sim 1} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln x.$$

☛ En particulier, la fonction F tend vers $+\infty$ au voisinage de 0.