
MARDI 26 MAI

Référence	Origine	Thèmes
136-1230	Centrale MP	Équation différentielle
136-1231	"	Calcul différentiel
136-460	Mines MP	Arithmétique
136-596	"	Comatrice, matrices symétriques
2025 AH 1/2	"	Endomorphismes auto-adjoints
2025 BB 1/2	"	Séries entières
2025 BB 2/2	"	Matrices nilpotentes

On considère l'équation différentielle

$$y''(x) + q(x)y(x) = 0 \quad (E)$$

où $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, paire et π -périodique.

[**Question de cours**]

Démontrer que l'ensemble S des solutions de (E) est un espace vectoriel. Préciser sa dimension.

[**1.**] Pour $y \in S$, on pose

$$\varphi(y) = [x \mapsto y(x + \pi)].$$

Démontrer que φ est un endomorphisme de S .

[**2.**] Soit $\mathcal{B} = (y_1, y_2)$, la base de S formée des solutions qui vérifient

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1.$$

[**2.a.**] Démontrer que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = A \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix}.$$

[**2.b.**] Étudier la parité de y_1 et de y_2 .

[**2.c.**] Démontrer que $\det A = 1$.

[**2.d.**] Que dire du polynôme caractéristique de A ? Démontrer que $A + A^{-1} = \operatorname{tr} A \cdot I_2$, puis que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} y_1(-\pi) & y_2(-\pi) \\ y_1'(-\pi) & y_2'(-\pi) \end{pmatrix}.$$

En déduire que

$$y_1(\pi) = y_2'(\pi).$$

[**1.**] Soit $y \in S$.

Comme y est \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} (par définition de S) et que $x \mapsto x + \pi$ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} (fonction affine), la fonction $\varphi(y)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

De plus, d'après la formule de dérivation des fonctions composées,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [\varphi(y)]''(x) = y''(x + \pi) \stackrel{*}{=} -q(x + \pi)y(x + \pi) \stackrel{*}{=} -q(x)\varphi(y)(x),$$

l'égalité $*$ découlant de la périodicité de q . On vient de vérifier que $\varphi(y)$ appartient bien à S .

La linéarité de φ est claire.

🔗 Il s'agit de vérifier que

$$\forall y, z \in S, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(\lambda y + z)(x) = \lambda \varphi(y)(x) + \varphi(z)(x)$$

et, à mon avis, un examinateur normalement constitué se satisfait de voir un candidat écrire cette expression (avec les quantificateurs qui vont bien).

Donc φ est bien un endomorphisme de S .

[**2.**] 🔗 On pourra se référer à chaque étape de l'étude à un cas particulier bien connu : si la fonction q est constante, égale à 1, alors $y_1 = \cos$ et $y_2 = \sin$.

[**2.a.**] On sait (Théorème de Cauchy-Lipschitz) qu'il existe une, et une seule, fonction $y_1 \in S$ telle que $y_1(0) = 1$ et $y_1'(0) = 0$. De même pour y_2 .

On sait aussi (cf cours) que S est un espace vectoriel de dimension 2 et que l'application

$$\Phi : S \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ y \longmapsto (y(0), y'(0))$$

est un isomorphisme de S sur \mathbb{R}^2 . Comme les vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$ forment une base de \mathbb{R}^2 et que l'image réciproque d'une base (de \mathbb{R}^2) par un isomorphisme est une base (de S), le couple (y_1, y_2) est bien une base de S .

🔗 Certes, la question n'est pas posée, mais il faut savoir y répondre.

Par définition de φ ,

$$\varphi(y_1)(0) = y_1(0 + \pi) = y_1(\pi), \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad [\varphi(y_1)]'(x) = y_1'(x + \pi)$$

donc

$$\begin{cases} \varphi(y_1)(0) = y_1(\pi) \cdot 1 + y_1'(\pi) \cdot 0 \\ [\varphi(y_1)]'(0) = y_1(\pi) \cdot 0 + y_1'(\pi) \cdot 1 \end{cases}$$

Autrement dit, l'image de $\varphi(y_1)$ par Φ est en fait l'image de $y_1(\pi) \cdot y_1 + y_1'(\pi) \cdot y_2$ par Φ . Comme Φ est injectif (c'est un isomorphisme),

$$\varphi(y_1) = y_1(\pi) \cdot y_1 + y_1'(\pi) \cdot y_2$$

et, de même,

$$\varphi(y_2) = y_2(\pi) \cdot y_1 + y_2'(\pi) \cdot y_2$$

d'où

$$\mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix}.$$

[2.b.] Considérons la fonction z_1 définie par $z_1(x) = y_1(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z_1''(x) = (-1)^2 y_1''(-x) \stackrel{S}{=} -q(-x) y_1(-x) \stackrel{*}{=} -q(x) z_1(x),$$

l'égalité $*$ provenant de la parité de q . De plus,

$$z_1(0) = y_1(-0) = 1 \quad \text{et} \quad z_1'(0) = -y_1'(-0) = 0$$

donc z_1 est une solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la même condition initiale que y_1 . Par conséquent, $z_1 = y_1$, ce qui signifie que la solution y_1 est paire.

En considérant $z_2(x) = -y_2(-x)$, on vérifie de manière analogue que z_2 est une solution de (E) qui vérifie la même condition initiale que y_2 , donc $z_2 = y_2$ et la solution y_2 est impaire.

[2.c.] Pour tout $t \in \mathbb{R}$, posons

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

☞ *Ce n'est pas une astuce, c'est du cours : le wronskien doit être connu.*

L'équation différentielle peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = B(x) \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & 0 \end{pmatrix}$$

donc le déterminant wronskien vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad W'(x) = \text{tr } B(x) \cdot W(x) = 0.$$

☞ *Attention, le programme 2022 n'est pas clair sur ce point : le wronskien doit être connu, mais rien n'est précisé sur l'équation différentielle vérifiée par le wronskien.*

En cas de doute, on peut développer $W(x)$, le dériver et, à l'aide de l'équation (E), vérifier rapidement que $W'(x)$ est identiquement nul : il n'y a aucune difficulté technique.

Par conséquent, la fonction W est constante et

$$\det A = \det W(\pi) = \det W(0) = \det I_2 = 1.$$

[2.d.] Comme $\det A = 1$, on déduit des formules de Cramer que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} y_2'(\pi) & -y_2(\pi) \\ -y_1'(\pi) & y_1(\pi) \end{pmatrix}$$

et donc que

$$A + A^{-1} = (y_1(\pi) + y_2'(\pi)) I_2 = \text{tr } A \cdot I_2.$$

☞ *On peut éviter d'expliciter A^{-1} et se contenter d'invoquer le Théorème de Cayley-Hamilton en dimension 2, avec une matrice A inversible dont le déterminant est égal à 1.*

• On a démontré que φ était un endomorphisme de S et le calcul de déterminant a prouvé que φ était en fait un automorphisme de S . La bijection réciproque de φ est facile à expliciter :

$$\forall z \in S, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi^{-1}(z) = z(x - \pi).$$

En raisonnant comme plus haut, on arrive à

$$A^{-1} = \mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1}) = \begin{pmatrix} y_1(-\pi) & y_2(-\pi) \\ y_1'(-\pi) & y_2'(-\pi) \end{pmatrix}.$$

Par parité de y_1 et imparité de y_2 , on en déduit que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & -y_2(\pi) \\ -y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix}$$

et donc que

$$A + A^{-1} = \begin{pmatrix} 2y_1(\pi) & 0 \\ 0 & 2y_2'(\pi) \end{pmatrix}.$$

En comparant les deux expressions de $A + A^{-1}$, on arrive à la conclusion :

$$y_1(\pi) = y_2'(\pi).$$

Le symbole \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

L'espace $\mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$ est muni de la norme N définie par

$$\forall A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{K}), \quad N(A) = \sup_{1 \leq j \leq d} \sum_{i=1}^d |a_{i,j}|.$$

[1.] Démontrer que la norme N est sous-multiplicative :

$$\forall A, B \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{K}), \quad N(AB) \leq N(A)N(B).$$

[2.] Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer que l'application R_k définie par

$$\forall A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{K}), \quad R_k(A) = A^k$$

est différentiable et expliciter sa différentielle.

[3.] On fixe $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$. Démontrer que l'application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_d[X]$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \chi_{tA}$$

est dérivable et calculer sa dérivée.

[4.] Soient A et B dans $\mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$. Démontrer que l'application $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi(t) = \chi_{tA}(B)$$

est dérivable et calculer sa dérivée.

[1.] Notons $AB = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Par inégalité triangulaire,

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad |c_{i,j}| = \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| |b_{k,j}|.$$

En sommant sur i ,

$$\forall 1 \leq j \leq n, \quad \sum_{i=1}^n |c_{i,j}| \leq \sum_{k=1}^n \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n |a_{i,k}| \right)}_{\leq N(A)} |b_{k,j}| \leq N(A) \sum_{k=1}^n |b_{k,j}| \leq N(A)N(B).$$

Le majorant est indépendant du paramètre j , on peut donc passer au maximum :

$$N(AB) = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |c_{i,j}| \leq N(A)N(B).$$

• Variante.

Par inégalité triangulaire,

$$\forall X = (x_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad \forall 1 \leq i \leq n, \quad |(AX)_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right) \|X\|_\infty$$

et en passant au maximum,

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad \|AX\|_\infty \leq N(A)\|X\|_\infty.$$

Une famille finie de réels positifs possède un plus grand élément : il existe donc un indice $1 \leq i_0 \leq n$ tel que

$$N(A) = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|$$

et il existe une famille de scalaires $X_0 = (x_j^0)_{1 \leq j \leq n}$ telle que

$$\forall 1 \leq j \leq n, \quad |x_j^0| = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| = \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j^0.$$

☞ Si $a_{i_0,j} = 0$, on peut choisir $x_j^0 = 1$. Sinon, on choisit

$$x_j^0 = \frac{|a_{i_0,j}|}{a_{i_0,j}},$$

c'est-à-dire le signe de $a_{i_0,j}$ (cas réel) ou son argument (cas complexe).

On a donc une colonne $X_0 \neq 0$ telle que

$$\|X_0\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad \|AX_0\|_\infty = N(A).$$

On a ainsi démontré que

$$\forall A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad N(A) = \sup_{\|X\|_\infty=1} \|AX\|_\infty.$$

Autrement dit, N est la norme (sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$) subordonnée à la norme $\|\cdot\|_\infty$ (sur \mathbb{K}^n) et *ipso facto* N est sous-multiplicative.

[2.] L'ensemble $\mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$ est une algèbre associative unitaire de dimension finie et R_k est une application polynomiale de $\mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$ dans elle-même, donc R_k est différentiable.

☞ Si les matrices A et H commutent, on peut appliquer la formule du binôme :

$$R_k(A + H) = R_k(A) + kA^{k-1}H + \sum_{i=2}^k \binom{k}{i} A^{k-i}H^i.$$

L'application $H \mapsto kA^{k-1}H$ est évidemment linéaire (et continue). Par inégalité triangulaire,

$$N\left(\sum_{i=2}^k \binom{k}{i} A^{k-i}H^i\right) \leq \sum_{i=2}^k \binom{k}{i} N(A^{k-i}H^i)$$

et comme N est sous-multiplicative,

$$N\left(\sum_{i=2}^k \binom{k}{i} A^{k-i}H^i\right) \leq \sum_{i=2}^k \binom{k}{i} N(A)^{k-i}N(H)^i.$$

Dans cette somme, l'indice i est supérieur à 2, on peut donc factoriser par $N(H)^2$ et en déduire que

$$R_k(A + H) = R_k(A) + kA^{k-1}H + \mathcal{O}(N(H)^2).$$

Seules les homothéties commutent à toutes les matrices : si A est quelconque, ce calcul seul ne permet pas d'identifier l'application linéaire tangente $dR_k(A)$. Mais il donne l'idée de ce qui va suivre.

☛ Pour $k = 0$, l'application R_k est constante et $dR_0(A)$ est l'application nulle, quelle que soit la matrice A .

☛ Pour $k \in \mathbb{N}$, on sait que R_k est différentiable :

$$\forall A, H \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{K}), \quad R_k(A + H) = R_k(A) + dR_k(A)(H) + \varepsilon_A(H) \cdot H,$$

où $\varepsilon_A : \mathfrak{M}_d(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ tend vers $0_{\mathbb{K}}$ au voisinage de 0_d , et par ailleurs

$$\forall A, B, H, K \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{K}), \quad (A + H)(B + K) = AB + (AK + HB) + HK$$

(sans hypothèse de commutativité). Par conséquent,

$$R_{k+1}(A + H) = AR_k(A) + [A dR_k(A)(H) + HR_k(A)] + \varepsilon_A(H) \cdot AH + H dR_k(A)(H) + \varepsilon_A(H) \cdot H^2.$$

L'application

$$H \mapsto [A dR_k(A)(H) + HR_k(A)]$$

est bien linéaire de $\mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$ dans $\mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$ et comme la norme N est sous-multiplicative,

$$N(\varepsilon_A(H) \cdot AH + H dR_k(A)(H) + \varepsilon_A(H) \cdot H^2) \leq |\varepsilon_A(H)|N(A)N(H) + \|dR_k(A)\|N(H)^2 + |\varepsilon_A(H)|N(H)^2$$

ce qui prouve que

$$\varepsilon_A(H) \cdot AH + H \, dR_k(A)(H) + \varepsilon_A(H) \cdot H^2 \underset{N(H) \rightarrow 0}{=} o(N(H)).$$

Par unicité du développement limité à l'ordre 1, on a démontré que

$$\forall A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{K}), \forall k \in \mathbb{N}, \forall H \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{K}), \quad dR_{k+1}(A)(H) = A \, dR_k(A)(H) + HA^k.$$

On vérifie alors par récurrence que

$$\forall A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{K}), \forall k \in \mathbb{N}, \forall H \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{K}), \quad dR_{k+1}(A)(H) = \sum_{i=0}^k A^i H A^{k-i}.$$

☞ On a en fait re-démontré la formule de Leibniz (différentiation d'un "produit") et on a procédé par récurrence pour que les calculs restent d'une ampleur limitée. Je préfère éviter d'écrire l'expression développée de $(A + H)^k$ à grands renforts de "...".

[3.] Pour $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \det(XI_n - tA) \\ &= t^n \det\left(\frac{X}{t}I_n - A\right) = t^n \chi_A(X/t). \end{aligned}$$

Notons $\chi_A = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \dots + b_1X + b_0$. On a alors

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= t^n \left(\frac{1}{t^n} X^n + \frac{b_{n-1}}{t^{n-1}} X^{n-1} + \dots + \frac{b_1}{t} X + b_0 \right) \\ &= X^n + b_{n-1}tX^{n-1} + \dots + b_1t^{n-1}X + b_0t^n. \end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice nulle est X^n , donc cette égalité est vraie aussi pour $t = 0$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k t^{n-k} X^k. \quad (\star)$$

L'application φ est ainsi une application polynomiale de \mathbb{R} dans $\mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = \sum_{k=1}^n k b_{n-k} X^{n-k} t^{k-1}.$$

☞ En effet, on a exhibé une famille $(u_k)_{0 \leq k \leq n}$ de vecteurs de $E = \mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \sum_{k=0}^n t^k \cdot u_k,$$

ce qui permet d'en déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = \sum_{k=1}^n k t^{k-1} \cdot u_k.$$

[4.] On obtient $\psi(t)$ en substituant $B \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$ à l'indéterminé X : d'après (\star) ,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi(t) = B^n + \sum_{k=1}^n b_{n-k} t^k B^{n-k}.$$

Avec le même raisonnement (seul l'espace vectoriel d'arrivée, c'est-à-dire la nature des vecteurs considérés, change), ψ est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi'(t) = \sum_{k=1}^n k b_{n-k} t^{k-1} B^{n-k}.$$

☞ Ce sont des calculs très simples (dérivée un polynôme!), il convient de ne pas se laisser impressionner par le fait qu'on étudie des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel qui n'est pas \mathbb{R} .

Soient p et q , deux entiers naturels premiers entre eux, tels que $p < q$. Démontrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ et une liste strictement croissante (a_1, \dots, a_n) d'entiers naturels strictement positifs telle que

$$a_1 \leq \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor \quad \text{et} \quad \frac{p}{q} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{a_k}.$$

Nous allons démontrer le résultat par récurrence finie : la première itération ne se distingue pas des autres, il suffit donc de considérer un entier $k \in \mathbb{N}^*$ et de décrire l'itération du procédé en prenant soin de justifier la terminaison de l'algorithme.

• On suppose que p_k et q_k sont deux entiers naturels premiers entre eux (et en particulier supérieurs à 1) avec $p_k < q_k$.

On peut alors effectuer la division euclidienne de q_k par p_k : il existe deux entiers a_k et r_k tels que

$$q_k = a_k p_k + r_k \quad \text{avec} \quad 0 \leq r_k < p_k. \quad (*)$$

Comme $q_k > p_k$, le quotient a_k est supérieur à 1 et, par définition du reste,

$$\frac{q_k}{p_k} - 1 < a_k = \frac{q_k}{p_k} - \frac{r_k}{p_k} \leq \frac{q_k}{p_k}.$$

Donc a_k est un entier tel que

$$a_k \leq \frac{q_k}{p_k} < a_k + 1$$

donc

$$a_k = \left\lfloor \frac{q_k}{p_k} \right\rfloor \geq 1 \quad (\dagger)$$

par définition de la partie entière.

• Si on se sent à l'aise avec la division euclidienne et la division euclidienne, on peut directement affirmer que $a_k = \lfloor q_k/p_k \rfloor$. L'inégalité $a_k \geq 1$ est essentielle pour la suite.

En divisant (*) par $a_k q_k \geq 1$, on obtient

$$\frac{p_k}{q_k} = \frac{1}{a_k} - \frac{r_k}{a_k q_k}.$$

• Si $r_k = 0$, on s'arrête là.

Sinon, le pgcd $d_k = r_k \wedge (a_k q_k)$ est supérieur à 1 (car $r_k \geq 1$ et $a_k q_k \geq 1$), ce qui nous permet de définir deux entiers naturels non nuls p_{k+1} et q_{k+1} en posant

$$r_k = d_k p_{k+1} \quad \text{et} \quad a_k q_k = d_k q_{k+1} \quad \text{si bien que} \quad \frac{p_k}{q_k} = \frac{1}{a_k} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}. \quad (\ddagger)$$

Par définition du pgcd, les deux entiers p_{k+1} et q_{k+1} sont premiers entre eux et

$$1 \leq p_{k+1} \leq r_k < a_k.$$

On peut alors appliquer le même procédé au couple (p_{k+1}, q_{k+1}) car

- les entiers naturels p_{k+1} et q_{k+1} sont premiers entre eux et en particulier supérieurs à 1 ;
- $d_k p_{k+1} = r_k < a_k$ (définition du reste), $a_k \leq a_k q_k$ car $q_k \geq 1$ et comme $a_k q_k = d_k q_{k+1}$ avec $d_k \geq 1$, on en déduit que $p_{k+1} < q_{k+1}$ en simplifiant par d_k .

• Par construction, $r_k = d_k p_{k+1} < p_k$ et $d_k \geq 1$, donc $p_{k+1} < p_k$. Tant que le procédé continue, on définit une famille strictement décroissante d'entiers naturels (p_k) . Au bout d'un nombre fini d'itérations, on obtiendra donc un entier r_n nul et le procédé s'arrêtera alors.

Il existe donc une famille finie d'entiers naturels non nuls (a_1, a_2, \dots, a_n) qui vérifient la propriété (\ddagger) :

$$\forall 1 \leq k < n, \quad (-1)^{k-1} \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^{k-1}}{a_k} + (-1)^k \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$$

avec en outre

$$(-1)^{n-1} \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n-1}}{a_n}.$$

☞ Par définition de n , l'entier r_n est nul et, par construction (\ddagger) , l'entier p_{n+1} est nul lui aussi.

On en déduit par télescopage que

$$(-1)^{1-1} \frac{p_1}{q_1} = \sum_{1 \leq k < n} \left[(-1)^{k-1} \frac{p_k}{q_k} - (-1)^k \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right] + (-1)^{n-1} \frac{p_n}{q_n}$$

et donc, en partant de $(p_1, q_1) = (p, q)$,

$$\frac{p}{q} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{a_k}.$$

☞ Si on sait coder l'algorithme d'Euclide, on peut coder facilement le calcul des entiers a_k .

```
def decomposition(p, q):
    A = []
    while p>0:
        a, r = q//p, q%p
        A.append(a)
        d = pgcd(r, q*a)
        p = r//d
        q = (a*q)//d
    return A
```

Les fans de récursivité peuvent écrire un code récursif, mais c'est un peu plus délicat puisque la fonction principale se contente d'appeler la fonction récursive.

```
def iterer(p, q, A):
    if p==0:
        return A
    else:
        a, r = q//p, q%p
        A.append(a)
        d = pgcd(r, q*a)
        return iterer(r//d, (a*q)//d, A)

def decomposition(p, q):
    return iterer(p, q, [])
```

☛ Il reste à démontrer que la famille des entiers a_k est strictement croissante. La monotonie est assez évidente : comme $0 \leq r_k < p_k$ et que $a_k \geq 1$ par (\ddagger) ,

$$\frac{q_{k+1}}{p_{k+1}} \stackrel{(\ddagger)}{=} \frac{a_k q_k}{r_k} > \frac{q_k}{p_k}$$

et comme la fonction $[\cdot]$ est croissante, la famille des a_k est croissante.

Supposons que $r_k \geq 1$ et que $a_{k+1} = a_k$. D'après $(*)$,

$$q_k = a_k p_k + r_k \quad \text{et} \quad q_{k+1} = a_{k+1} p_{k+1} + r_{k+1} = a_k p_{k+1} + r_{k+1}.$$

En multipliant la seconde égalité par $d_k \geq 1$, on obtient

$$a_k q_k \stackrel{(\ddagger)}{=} d_k q_{k+1} = a_k d_k p_{k+1} + d_k r_{k+1} \stackrel{(\ddagger)}{=} a_k r_k + d_k r_{k+1}$$

et, en prenant en compte la première égalité, on obtient

$$a_k^2 p_k = d_k r_{k+1}.$$

Par construction, $0 \leq r_{k+1} < p_{k+1}$ (puisque r_k est le reste d'une division euclidienne par $p_{k+1} \geq 1$). Or $d_k \geq 1$ (en tant que pgcd de deux entiers naturels non nuls), donc

$$a_k^2 p_k = d_k r_{k+1} < d_k p_{k+1} \stackrel{(\ddagger)}{=} r_k.$$

Mais $a_k \geq 1$ (puisque $a_k \geq a_1 \geq 1$) et $0 \leq r_k < p_k$ d'après (*): on devrait donc avoir

$$a_k^2 p_k \geq p_k > r_k.$$

Cette contradiction montre que l'égalité $a_{k+1} = a_k$ est absurde. Comme $a_{k+1} \geq a_k$, on en déduit que $a_{k+1} > a_k$.

La famille $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ est donc une famille strictement croissante d'entiers naturels supérieurs à 1.

|| Soit $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Démontrer que la comatrice $\text{Com}(M)$ appartient aussi à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Quelques rappels ne sont pas superflus : tout ce qu'il faut savoir sur la comatrice est là.

↳ Pour $1 \leq i, j \leq n$, on note $M_{i,j} \in \mathfrak{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, la matrice obtenue en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne de A . Par définition, $\det M_{i,j}$ est un **mineur d'ordre** $(n-1)$ de la matrice M et

$$\text{Com}(M) = ((-1)^{i+j} \det M_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}. \quad (\ddagger)$$

Le scalaire $(-1)^{i+j} \det M_{i,j}$ est un **cofacteur** puisqu'il apparaît dans l'expression développée du déterminant de M .

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \det M = \sum_{j=1}^n m_{i,j} (-1)^{i+j} \det M_{i,j} \quad (\text{développement par la } i\text{-ème ligne})$$

$$\forall 1 \leq j \leq n, \quad \det M = \sum_{i=1}^n m_{i,j} (-1)^{i+j} \det M_{i,j} \quad (\text{développement par la } j\text{-ème colonne})$$

Ces relations et la propriété d'antisymétrie du déterminant aboutissent à la formule fondamentale :

$$M \cdot \text{Com}(M)^\top = \text{Com}(M)^\top \cdot M = \det M \cdot I_n. \quad (\star)$$

• Si la matrice M est symétrique, alors $M_{i,j} = M_{j,i}^\top$ et donc

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad (-1)^{i+j} \det M_{i,j} = (-1)^{j+i} \det M_{j,i}.$$

D'après (\ddagger) , si la matrice M est symétrique, alors sa comatrice est symétrique.

• Si $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est inversible, alors en fait $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\det M > 0$. D'après (\star) ,

$$\text{Com}(M) = \frac{1}{\det M} \cdot M^{-1}.$$

La matrice M^{-1} est symétrique (inverse d'une matrice symétrique inversible) et ses valeurs propres sont strictement positives (puisque les valeurs propres de M sont strictement positives). Donc $M^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et comme $\det M > 0$, la comatrice est elle aussi définie positive.

• Si $\text{rg } M \leq n-2$, alors $\det M_{i,j} = 0$ pour tout (i, j) , donc la comatrice est nulle et en particulier elle appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

• Si $\text{rg } M = n-1$, alors la relation (\star) prouve que l'image de M est contenue dans le noyau de $\text{Com}(M)$, donc le rang de $\text{Com}(M)$ est inférieur à 1. Comme $\text{rg } M = n-1$, il existe au moins un mineur d'ordre $(n-1)$ non nul, donc $\text{Com}(M) \neq 0_n$. Donc le rang de $\text{Com}(M)$ est égal à 1.

Il existe donc une matrice ligne L et une matrice colonne C , non nulles, telles que

$$\text{Com}(M) = C \cdot L.$$

Mais $\text{Com}(M)$ est symétrique, donc

$$(C \cdot L)^\top = L^\top \cdot C^\top = C \cdot L,$$

ce qui prouve que les colonnes C et L^\top sont proportionnelles : il existe un réel α tel que $L^\top = \alpha \cdot C$ et donc tel que

$$\text{Com}(M) = \alpha \cdot C \cdot C^\top. \quad (\ddagger)$$

En particulier,

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \alpha c_i^2 = (-1)^{i+i} \det M_{i,i}.$$

Supposons que $\det M_{i,i} = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. D'après la relation précédente,

— ou bien $\alpha = 0$ mais alors $\text{Com}(M) = 0_n$ d'après (\ddagger) : impossible puisque $\text{Com}(M)$ est ici une matrice de rang 1 !

— ou bien $\alpha \neq 0$ mais alors $c_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $\text{Com}(M) = 0_n$ d'après (\ddagger) : impossible aussi, pour la même raison !

Il existe donc au moins un indice $1 \leq i \leq n$ tel que $\alpha c_i^2 = \det M_{i,i} \neq 0$. Or

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top \cdot M_{i,i} \cdot X = Y^\top \cdot M \cdot Y \quad \text{avec} \quad Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_{i-1} \\ 0 \\ x_{i+1} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

et $Y^\top \cdot M \cdot Y \geq 0$ puisque $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Donc $\alpha c_i^2 > 0$, ce qui prouve que $\alpha > 0$.

Finalement,

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top \cdot \text{Com}(M) \cdot X = \alpha \cdot X^\top \cdot C^\top \cdot C \cdot X = \alpha \cdot \|CX\|^2 \geq 0$$

et $\text{Com}(M) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

• Nous avons donc démontré que, dans tous les cas, la comatrice d'une matrice symétrique positive était symétrique positive elle aussi.

Variante.

Merci YG!

Le résultat est, comme on l'a vu, facile à démontrer pour $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on peut le prolonger à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ par un argument de densité (qui contourne les propriétés subtile de la comatrice).

• Une matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si, et seulement si,

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top \cdot M \cdot X \geq 0.$$

Par conséquent,

$$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \bigcap_{X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})} [X^\top \cdot M \cdot X \geq 0].$$

Or :

- d'une part, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est fermé (en tant que sous-espace vectoriel de dimension finie);
- d'autre part, $[X^\top \cdot M \cdot X \geq 0]$ est l'image réciproque de l'intervalle fermé $[0, +\infty[$ par l'application $M \mapsto X^\top \cdot M \cdot X$ (application linéaire sur un espace de dimension finie), donc c'est une partie fermée de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$;
- enfin, une intersection quelconque de parties fermées est toujours une partie fermée,

donc $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

• Soit $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$M_k = M + \frac{1}{k} I_n.$$

Il est clair que $M_k \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (combinaison linéaire de deux matrices symétriques réelles) et

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^\top \cdot M_k \cdot X = \underbrace{X^\top \cdot M \cdot X}_{\geq 0} + \frac{1}{k} \cdot \underbrace{\|X\|^2}_{> 0} > 0,$$

donc $M_k \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. De plus, par homogénéité de la norme,

$$\|M_k - M\| = \frac{1}{k} \|M\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0,$$

donc la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers M .

On vient de prouver que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

• Soit $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$, une suite de matrices symétriques définies positives qui converge vers M .

• Ici, la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie plus haut.

On sait que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{Com}(M_k) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}).$$

D'autre part, l'application $M \mapsto \text{Com}(M)$ est une application continue (car les coefficients de $\text{Com}(M)$ sont des fonctions polynomiales des coefficients de M), donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \text{Com}(M_k) = \text{Com}(M).$$

Comme $\text{Com}(M_k) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé, on en déduit que $\text{Com}(M) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

[1.] Démontrer l'existence d'une matrice $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que

$$A^2 = S.$$

[2.] Démontrer que $A^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et que

$$(A^{-1})^2 = S^{-1}.$$

[3.] Démontrer que

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle X|X \rangle^2 \leq \langle SX|X \rangle \langle S^{-1}X|X \rangle$$

(pour le produit scalaire canonique sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

[4.] Étudier le cas d'égalité.

[1.] Il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dont les coefficients sont strictement positifs telles que

$$P^T \cdot S \cdot P = D.$$

On pose alors

$$A = P \cdot \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \cdot P^T$$

et on vérifie que cette matrice A répond à la question.

↳ On peut démontrer que cette matrice A est la seule possible.

[2.] Vérification immédiate.

↳ L'essentiel est de citer précisément le théorème qui caractérise les matrices définies positives parmi les matrices symétriques réelles.

[3.] D'après le Théorème spectral, la matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est diagonalisable, ses valeurs propres sont strictement positives et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux. De plus, S^{-1} est diagonalisable et possède les mêmes sous-espaces propres que S .

Par conséquent, pour tout $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe une famille orthogonale $(X_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(S)}$ telle que

$$X = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(S)} X_\lambda \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \text{Sp}(S), \quad SX_\lambda = \lambda X_\lambda.$$

On en déduit que

$$SX = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(S)} \lambda X_\lambda \quad \text{et que} \quad S^{-1}X = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(S)} \frac{1}{\lambda} X_\lambda.$$

Comme la famille $(X_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(S)}$ est orthogonale, on déduit du Théorème de Pythagore que

$$\langle SX|X \rangle = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(S)} \lambda \|X_\lambda\|^2 \quad \text{et que} \quad \langle S^{-1}X|X \rangle = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(S)} \frac{1}{\lambda} \|X_\lambda\|^2.$$

Il reste à remarquer que

$$\langle X|X \rangle^2 = \left(\sum_{\lambda \in \text{Sp}(S)} \|X_\lambda\|^2 \right)^2 = \left(\sum_{\lambda \in \text{Sp}(S)} \sqrt{\lambda} \|X_\lambda\| \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \|X_\lambda\| \right)^2$$

et à appliquer l'inégalité de Schwarz pour conclure.

↳ On peut compléter cette majoration simple par l'**Inégalité de Kantorovitch** :

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle SX|X \rangle \langle S^{-1}X|X \rangle \leq \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}} + \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}} \right)^2 \langle X|X \rangle^2$$

où λ_{\min} (resp. λ_{\max}) est la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de S .

La page https://fr.wikipedia.org/wiki/Inégalité_de_Kantorovitch propose une démonstration astucieuse : pour tout $t > 0$,

$$\langle SX|X \rangle \langle S^{-1}X|X \rangle \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{t} \langle SX|X \rangle t + t \langle S^{-1}X|X \rangle \right)^2 = \frac{1}{4} \left\langle \left(\frac{1}{t}S + tS^{-1} \right) X | X \right\rangle$$

et en posant $t = \sqrt{\lambda_{\min} \lambda_{\max}}$, on peut vérifier que

$$\forall \mu \in \text{Sp} \left(\frac{1}{t}S + tS^{-1} \right), \quad \mu \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}} + \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}}.$$

[4.] L'inégalité de Schwarz est une égalité si, et seulement si, les deux vecteurs sont proportionnels. On en déduit que l'inégalité précédente est une égalité si, et seulement si, le vecteur X est un vecteur propre ou le vecteur nul.

En effet, si $X \neq 0$, alors les vecteurs

$$\left(\sqrt{\lambda} \|X_{\lambda}\| \right)_{\lambda \in \text{Sp}(S)} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \|X_{\lambda}\| \right)_{\lambda \in \text{Sp}(S)}$$

sont tous deux non nuls et sont donc proportionnels si, et seulement si, il existe un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(S), \quad \sqrt{\lambda} \|X_{\lambda}\| = \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} \|X_{\lambda}\|,$$

c'est-à-dire

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(S), \quad (\lambda\alpha - 1) \|X_{\lambda}\| = 0.$$

Comme les vecteurs X_{λ} ne sont pas tous nuls (puisque $X \neq 0$), il existe $\lambda \in \text{Sp}(S)$ tel que $\alpha = 1/\lambda$ et comme les λ sont deux à deux distincts, il existe un seul vecteur X_{λ} non nul : le vecteur X est donc un vecteur propre.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite de réels positifs telle que la série $\sum a_n$ diverge et que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ soit égal à 1.

[1.] Démontrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow 1} +\infty.$$

[2.] Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite réelle telle que

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n.$$

Démontrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

[3.] En déduire un équivalent au voisinage de 1 des sommes suivantes.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\sin 1/n) x^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + 1/n) x^n \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n) x^n \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^k x^n \quad \text{pour } k \in \mathbb{N} \quad (4)$$

[1.] Comme le rayon de convergence est égal à 1, la somme de la série entière est définie au moins sur l'intervalle ouvert $] -1, 1[$:

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Soit $A > 0$. Comme la série $\sum a_n$ est une série divergente de terme général positif, ses sommes partielles tendent vers $+\infty$. Il existe donc un rang N tel que

$$\sum_{n=0}^N a_n \geq A + 1.$$

Une fonction polynomiale est continue, donc il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [1 - \eta, 1], \quad \left| \sum_{n=0}^N a_n x^n - \sum_{n=0}^N a_n \right| \leq 1$$

et donc tel que

$$\forall x \in [1 - \eta, 1], \quad \sum_{n=0}^N a_n x^n \geq A.$$

Comme les a_n sont tous positifs et que $x \geq 0$,

$$\forall x \in [1 - \eta, 1[, \quad S(x) \geq \sum_{n=0}^N a_n x^n \geq A.$$

On a ainsi démontré que S tendait vers $+\infty$ au voisinage gauche de 1.

↳ Par définition, $S(x)$ tend vers $+\infty$ au voisinage de 1^- si, et seulement si,

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [1 - \eta, 1[, \quad S(x) \geq A.$$

C'est bien ce que nous avons démontré.

[2.] La relation $a_n \sim b_n$ entraîne que b_n est positif (au moins à partir d'un certain rang) et que le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n x^n$ est égal à 1. On pose donc

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

On en déduit que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad A(x) - B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - b_n) x^n \quad \text{où} \quad a_n - b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(a_n).$$

Il nous reste à vérifier que

$$A(x) - B(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} o(A(x)),$$

ce qui nous donnera le résultat attendu.

↳ *Question technique classique.*

Il faut résister à la tentation d'appliquer un théorème de comparaison qui ne s'applique pas ici : les théorèmes de sommation des relations de comparaison permettent de comparer des sommes partielles (cas divergent) ou des restes (cas convergent), mais en aucun il ne permettent de comparer des sommes en fonction d'un paramètre.

• Puisque $a_n \sim b_n$, il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positive et de limite nulle telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n - b_n| \leq \varepsilon_n a_n.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1[, \quad |A(x) - B(x)| &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n - b_n| x^n && \text{(inégalité triangulaire)} \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n a_n x^n. \end{aligned}$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe donc un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < \varepsilon_n \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1[, \quad |A(x) - B(x)| &\leq \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon_n a_n x^n + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=N}^{+\infty} a_n x^n && \text{(relation de Chasles)} \\ &\leq \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon_n a_n x^n + \frac{\varepsilon}{2} A(x). && (a_n x^n \geq 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

On a démontré que $A(x)$ tendait vers $+\infty$ au voisinage de 1 et une fonction polynomiale est bornée sur le segment $[0, 1]$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{A(x)} \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon_n a_n x^n = 0$$

et par conséquent il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in [1 - \alpha, 1[, \quad 0 \leq \frac{1}{A(x)} \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon_n a_n x^n \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement,

$$\forall x \in [1 - \alpha, 1[, \quad |A(x) - B(x)| \leq \varepsilon A(x)$$

et les quantificateurs (sur α et ε) nous permettent de conclure :

$$A(x) - B(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} o(A(x)), \quad \text{c'est-à-dire} \quad A(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} B(x).$$

[3.] On sait que $\sin 1/n \sim 1/n$, donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{n} \cdot x^n \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

• De même,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n \underset{x \rightarrow 1}{\sim} -\ln(1-x).$$

• Le rayon de convergence de la série entière $\sum \ln n x^n$ est égal à 1. Par linéarité,

$$\forall 0 < x < 1, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} [\ln(n+1)] x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n) x^n = \left(\frac{1}{x} - 1\right) \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n) x^n$$

avec le changement d'indice $n \leftarrow n+1$ (en remarquant que $\ln 1 = 0$).

• *Interdit d'évoquer la linéarité de la somme avant d'avoir calculé le rayon de convergence de la série entière qu'on sort du chapeau !*

On déduit alors de l'équivalent précédent que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n) x^n \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$

• *Oui, ce raisonnement est un peu astucieux. Mais pas le suivant (qui figure dans le cours).*

• De même à nouveau,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^k x^n \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x^k \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) x^{n-k} = x^k \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{1}{1-x} \right)$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^k x^n \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que, pour toute matrice nilpotente $N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, le produit AN est une matrice nilpotente. Déterminer A .

Propriété essentielle pour traiter cet exercice : La trace d'une matrice nilpotente est nulle.

Le polynôme caractéristique d'une matrice nilpotente est égal à X^n et

$$\chi_A = X^n - \operatorname{tr} A \cdot X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A$$

pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour $N = E_{i,j}$ (matrice élémentaire), le produit AN présente $(n-1)$ colonnes nulles et la j -ième colonne est égale à la i -ème colonne de A . Comme AN est nilpotente, sa trace est nulle, donc

$$\forall i \neq j, \quad a_{i,j} = 0.$$

La matrice A est donc diagonale.

Pour le produit scalaire canonique sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, défini par

$$\forall X, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle X | Y \rangle = X^T \cdot Y,$$

la base canonique $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ est orthonormée :

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad \langle E_i | E_j \rangle = \delta_{i,j}$$

et par conséquent, les vecteurs $(E_i + E_j)$ et $(E_i - E_j)$ sont orthogonaux (ce sont les diagonales d'un losange).

Pour $i \neq j$, la matrice

$$N_{i,j} = (E_i + E_j) \cdot (E_i - E_j)^T$$

est nilpotente d'indice 2 :

$$N_{i,j}^2 = (E_i + E_j) \cdot \langle (E_i - E_j) | (E_i + E_j) \rangle \cdot (E_i - E_j)^T = 0_n$$

et

$$AN_{i,j} = (a_{i,i}E_i + a_{j,j}E_j) \cdot (E_i - E_j)^T = a_{i,i}E_{i,i} - a_{j,j}E_{j,j} - a_{i,i}E_{i,j} + a_{j,j}E_{j,i}.$$

Donc $\operatorname{tr}(AN_{i,j}) = a_{i,i} - a_{j,j}$ et comme $AN_{i,j}$ est nilpotente, on en déduit que

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad a_{i,i} = a_{j,j}.$$

Donc la matrice A est une homothétie.

La réciproque est évidente.