

---

## MERCREDI 27 MAI

---

<b>Référence</b>	<b>Origine</b>	<b>Thèmes</b>
136-1000	Mines PC	Réduction
136-1221	Centrale MP	Séries entières
136-1318	Centrale PC	Série de fonctions
136-1319	"	Série de fonctions
136-1320	"	Série de fonctions
136-1327	"	Développement en série entière (classique)

Soient  $n \geq 2$  et  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ . À quelle condition la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \text{---} & 0 & a_1 \\ | & & | & \vdots \\ 0 & \text{---} & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \text{---} & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

Si les  $a_k$  sont réels, on peut conclure avec le Théorème spectral : la matrice  $A$  est diagonalisable.

Mais si les  $a_k$  sont complexes ?

- Si  $a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$ , la matrice  $A$  est diagonale – fin de l’histoire !  
On supposera donc dans la suite que  $(a_1, \dots, a_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$ .
- Le rang de la matrice  $A$  est donc égal à 2, la dimension de son noyau est donc égale à  $(n-2)$ .  
— Pour  $n = 2$ , la matrice  $A$  est donc inversible.  
— Pour  $n \geq 3$ , la matrice  $A$  admet 0 pour valeur propre et la dimension de son sous-espace propre est égale à  $(n-2)$ .

Il n’y a rien de plus à dire sur le noyau de  $A$ .

- Considérons maintenant une valeur propre  $\lambda$  non nulle de  $A$ .  
Il existe alors un vecteur  $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$  dans le noyau de

$$A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} -\lambda & & & a_1 \\ & \diagdown & & \vdots \\ & & -\lambda & a_{n-1} \\ a_1 & \text{---} & a_{n-1} & a_n - \lambda \end{pmatrix}$$

↳ Pas de valeur propre sans vecteur propre !

Le vecteur  $(x_1, \dots, x_n)$  est donc un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda \neq 0$  si, et seulement si, les coordonnées  $x_k$  ne sont pas toutes nulles et si

$$\forall 1 \leq k < n, \quad -\lambda x_k + a_k x_n = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n-1} a_k x_k + (a_n - \lambda) x_n = 0.$$

Comme  $\lambda \neq 0$ , on en déduit que

$$\forall 1 \leq k < n, \quad x_k = \frac{a_k}{\lambda} x_n \tag{*}$$

puis que

$$\left[ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k^2}{\lambda} + a_n - \lambda \right] x_n = 0.$$

Pour que  $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$ , il faut donc que  $x_n \neq 0$  et donc que

$$\lambda^2 - a_n \lambda - \left( \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \right) = 0. \tag{†}$$

**Premier cas** — Si la somme

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2$$

est nulle, alors l’équation (†) admet une racine nulle et la matrice  $A$  possède donc au plus une valeur propre non nulle. Mais, d’après (\*), le sous-espace propre associé à cette valeur propre non nulle est la droite vectorielle dirigée par le vecteur

$$(a_1, \dots, a_{n-1}, 1).$$

Donc il y a deux valeurs propres : 0 et  $\lambda \neq 0$  et la somme des sous-espaces propres, égale à  $(n-2)+1$ , est strictement inférieure à  $n$ . Dans ce cas, la matrice  $A$  n’est pas diagonalisable.

**Deuxième cas** — Dans le cas contraire, l'équation (†) admet deux racines non nulles.

— Si le discriminant

$$\Delta = a_n^2 + 4 \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2$$

est nul, alors l'équation (†) admet en fait une racine double et on a remarqué que le sous-espace propre associé à cette valeur propre est une droite vectorielle. On conclut cette fois encore que  $A$  n'est pas diagonalisable.

— Dans le cas contraire,  $A$  possède trois valeurs propres : 0 (associée à un sous-espace propre de dimension  $(n-2)$ ) et deux autres valeurs propres distinctes  $\lambda$  et  $\mu$ , toutes deux associées à une droite propre. Dans ce cas, la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace :

$$(n-2) + 1 + 1 = n$$

donc  $A$  est diagonalisable.

☞ Dans la discussion qu'on vient de mener, si les coefficients  $a_k$  sont réels, alors les conditions

$$a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2 = 0 \quad \text{et} \quad a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2 + a_n^2 = 0$$

impliquent toutes deux que  $a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$  (la somme est nulle et c'est une somme de termes positifs), possibilité qu'on avait exclue avant de commencer la discussion.

Cela confirme ce que nous annonçait d'emblée le Théorème spectral : si les  $a_k$  sont réels, alors la matrice  $A$  est diagonalisable.

☛ Variante.

On peut aussi commencer l'exercice en calculant le polynôme caractéristique de  $A$ . Pour cela, on développe d'abord par rapport à la première ligne de  $A$ , puis par rapport à la première colonne de la deuxième sous-matrice.

$$\begin{aligned} \chi_n &= X \begin{vmatrix} X & & & -a_2 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & X & -a_{n-1} \\ -a_2 & \cdots & a_{n-1} & X - a_n \end{vmatrix}_{[n-1]} + (-1)^{n+1} (-a_1) \begin{vmatrix} 0 & X & & \\ & & \ddots & \\ & & & X \\ -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{vmatrix}_{[n-1]} \\ &= X \chi_{n-1} - (-1)^n a_1 \cdot (-1)^{(n-1)+1} (-a_1) \begin{vmatrix} X & & & \\ & X & & \\ & & \ddots & \\ & & & X \end{vmatrix}_{[n-2]} \\ &= X \chi_{n-1} - a_1^2 X^{n-2} \end{aligned}$$

où  $\chi_{n-1}$  est le polynôme caractéristique de la matrice analogue à  $A$  avec  $a_2, \dots, a_n$ .

De proche en proche, on devine que

$$\chi_n = X^{n-2} (\chi_2 - a_{n-2}^2 \cdots - a_1^2) = X^{n-2} \left( X^2 - a_n X - \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \right)$$

puisque

$$\chi_2 = \begin{vmatrix} X & -a_{n-1} \\ -a_{n-1} & X - a_n \end{vmatrix} = X^2 - a_n X - a_{n-1}^2.$$

On continue en discutant sur le discriminant

$$\Delta = a_n^2 + 4 \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2.$$

— Si ce discriminant est nul, alors le complexe  $a_n/2$  est racine double du polynôme caractéristique  $\chi_n$  et il faut dans ce cas, discuter sur la nullité éventuelle de  $a_n$ .

— Sinon, alors le facteur du second degré admet deux racines complexes distinctes, mais l'une d'elles est peut-être nulle : nouvelle discussion !

Même en explicitant les valeurs propres de  $A$ , on ne peut se dispenser de calculer les vecteurs propres de  $A$  et la fin de cette variante est la même que celle de la démonstration initiale.

[ Question de cours ]

Rappeler la règle de d'Alembert.

[ 1. ] En déduire que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , la somme

$$A_p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p \binom{2n}{n}}$$

est définie.

[ 2. ] Déterminer le rayon de convergence  $R$  de la série entière

$$\sum \frac{2^{2n-1}}{n^2 \binom{2n}{n}} x^{2n}.$$

[ 3. ] Pour  $x \in ]-R, R[$ , on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n-1}}{n^2 \binom{2n}{n}} x^{2n}.$$

[ 3.a. ] Démontrer que

$$\forall x \in ]-R, R[, \quad S(x) = (\text{Arcsin } x)^2.$$

[ 3.b. ] Calculer  $A_0, A_1$  et  $A_2$ .

[ 1. ] Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$a_n = \frac{1}{n^p \binom{2n}{n}} > 0.$$

On en déduit que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^p}{(n+1)^p} \cdot \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}.$$

Comme  $1/4 < 1$ , la série  $\sum a_n$  est (absolument) convergente.

[ 2. ] Pour  $x \neq 0$ , on pose  $b_n = 2^{2n-1} a_n x^{2n}$ . D'après la question précédente,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = x^2.$$

Pour  $|x| > 1$ , la série  $\sum b_n$  est grossièrement divergente et pour  $|x| < 1$ , elle est absolument convergente. Donc le rayon de convergence de la série entière

$$\sum \frac{2^{2n-1}}{n^2 \binom{2n}{n}} x^{2n}$$

est égal à 1.

[ 3.a. ] Plusieurs possibilités envisageables ici pour calculer le développement en série entière de

$$f(x) = (\text{Arcsin } x)^2.$$

- On calcule le développement en série entière de la fonction Arcsin et on tente un produit de Cauchy : calculs sordides.
- On dérive  $f$  et on tente un produit de Cauchy sur

$$f'(x) = 2 \text{Arcsin } x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(puisque'on sait développer chaque facteur) : pas mieux!

- On dérive  $f$ , on pose alors

$$g(x) = \frac{1}{2} \cdot f'(x) = \frac{\text{Arcsin } x}{\sqrt{1-x^2}}$$

et on dérive  $g$  :

$$(1-x^2)g'(x) = 1 + xg(x). \quad (\dagger)$$

C'est la seule méthode pratique!

On sait que  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  est développable en série entière (fonction de référence, le rayon de convergence est égal à 1) et donc que Arcsin est développable en série entière (on peut primitiver terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence). D'après le Théorème sur le produit de Cauchy, la fonction  $g$  est donc développable en série entière (avec un rayon de convergence au moins égal à 1) et comme il s'agit clairement d'une fonction impaire, il existe une suite  $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^{2k+1}.$$

On en déduit que

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad (1-x^2)g'(x) = c_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} [(2k+3)c_{k+1} - (2k+1)c_k] x^{2k+2}$$

et que

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad 1 + xg(x) = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^{2k+2}.$$

Mais

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad (1-x^2)g'(x) = 1 + xg(x)$$

et, par unicité du développement en série entière, on peut identifier les coefficients terme à terme :

$$c_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (2k+3)c_{k+1} = (2k+2)c_k.$$

On en déduit sans trop de peine que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad c_k = \frac{(2^k k!)^2}{(2k+1)!}$$

et donc que

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4^k}{(2k+1) \binom{2k}{k}} x^{2k+1}.$$

• Par définition de  $g$ ,

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad f(x) = f(0) + 2 \int_0^1 g(t) dt = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4^k}{(2k+1)(2k+2) \binom{2k}{k}} x^{2k+2}.$$

On vérifie sans peine que

$$(2k+1)(2k+2) \binom{2k}{k} = (k+1)^2 \binom{2k+2}{k+1}$$

ce qui nous donne, avec un changement d'indice ( $k \leftarrow k+1$ ),

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad (\text{Arcsin } x)^2 = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4^{k-1}}{k^2 \binom{2k}{k}} x^{2k} = S(x).$$

[ 3.b. ] D'après la question précédente,

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad (\text{Arcsin } x)^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x)^{2n}}{n^2 \binom{2n}{n}}.$$

En particulier, pour  $x = 1/2$ ,

$$A_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \binom{2n}{n}} = 2(\text{Arcsin } 1/2)^2 = \frac{\pi^2}{18}.$$

• En dérivant terme à terme et en simplifiant par 2, on obtient

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad \frac{\text{Arcsin } x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x)^{2n-1}}{n \binom{2n}{n}}. \quad (*)$$

En particulier, pour  $x = 1/2$ ,

$$A_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \binom{2n}{n}} = \frac{\text{Arcsin } 1/2}{\sqrt{1-1/4}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

On déduit de (\*) que

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad 2x \frac{\text{Arcsin } x}{\sqrt{1-x^2}} = 2xg(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x)^{2n}}{n \binom{2n}{n}}.$$

En dérivant, on obtient (la fonction  $g$  a été définie plus haut)

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad 2[xg'(x) + g(x)] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n}(2n)x^{2n-1}}{n \binom{2n}{n}} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n}x^{2n-1}}{\binom{2n}{n}}$$

donc

$$2A_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(2 \cdot [1/2])^{2n-1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{1}{2}g'(1/2) + g(1/2).$$

D'après l'équation différentielle (†) vérifiée par  $g$ ,

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad xg'(x) + g(x) = \frac{x}{1-x^2}(1+xg(x)) + g(x) = \frac{x+g(x)}{1-x^2}$$

donc

$$A_0 = \frac{1}{3} \cdot (1/2 + g(1/2)) = \frac{1}{3} + \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$$

Ces expressions littérales peuvent être confirmées numériquement.

```
from scipy.special import comb

def binom(n, p):
    return comb(n, p, exact=True)

def A(p, N):
    s = 0
    for n in range(1, N):
        s += 1/(n**p*binom(2*n, n))
    return s
```

On trouve ainsi

$$A_0 \approx 0,7363998587187148 \quad A_1 \approx 0,6045997880780728 \quad A_2 \approx 0,5483113556160754$$

avec  $N = 30$ . (Au delà de  $N = 30$ , les valeurs numériques ne changent plus, il est probable que toutes les décimales sauf la dernière soient exactes.)

On étudie ici

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}.$$

[ 1. ] Quel est l'ensemble de définition de  $f$ ? Démontrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

[ 2. ] Déterminer un équivalent de  $f$  au voisinage de 1.

[ 1. ] Pour  $|x| < 1$ , la suite de terme général  $x^n$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , donc

$$\frac{x^n}{1-x^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x^n$$

et la série est absolument convergente (par comparaison à une série géométrique).

Pour  $x = \pm 1$ , le terme général n'est pas défini pour une infinité d'indices  $n$  (division par zéro).

Pour  $|x| > 1$ , la suite de terme général  $x^n$  tend vers l'infini, donc

$$\frac{x^n}{1-x^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -1$$

et la série est grossièrement divergente.

La somme  $f$  est donc définie sur l'intervalle ouvert  $] -1, 1[$  (et seulement sur cet intervalle).

• Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  définie par

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad f_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n} = -1 + \frac{1}{1-x^n} \quad (*)$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, 1[$ . On a déjà justifié que la série de fonctions  $\sum f_n$  convergeait simplement sur  $] -1, 1[$ . De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in ]-1, 1[, \quad f'_n(x) = \frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}$$

et par conséquent

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall 0 < r < 1, \forall x \in [-r, r], \quad |f'_n(x)| \leq \frac{nr^{n-1}}{(1-r)^2}.$$

Le majorant est indépendant de  $x$  et on reconnaît le terme général d'une série convergente (série entière de rayon de convergence égal à 1), donc la série des dérivées  $\sum f'_n$  converge normalement sur chaque segment  $[-r, r] \subset ] -1, 1[$ .

De ce fait, la somme  $f$  de cette série de fonctions est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur

$$\bigcup_{0 < r < 1} [-r, r] = ] -1, 1[$$

et

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}.$$

[ 2. ] Lorsque  $x$  tend vers 1, chaque terme tend vers  $+\infty$ , donc il est clair que la somme  $f$  tend vers  $+\infty$ . Mais encore?

• Pour  $0 < x < 1$ , il est clair sur (\*) que la suite de terme général  $\frac{x^n}{1-x^n}$  est décroissante. Plus généralement, en posant

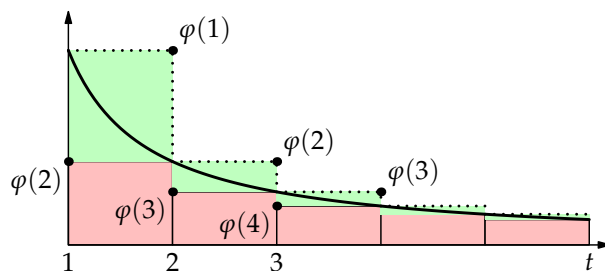
$$\forall 0 < x < 1, \forall t \geq 1, \quad \varphi(x, t) = \frac{x^t}{1-x^t} = \frac{e^{t \ln x}}{1-e^{t \ln x}} = -1 + \frac{1}{1-e^{t \ln x}}$$

on définit une fonction continue et décroissante de  $t$ , intégrable sur  $[1, +\infty[$  car équivalente à  $e^{t \ln x}$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .

↳ Comme  $0 < x < 1$ , le facteur  $\ln x$  est strictement négatif.

Il est donc judicieux de comparer notre somme à une intégrale :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \varphi(n) \leq \int_1^{+\infty} \varphi(t) dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n)$$



c'est-à-dire

$$\forall 0 < x < 1, \quad \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t} dt \leq f(x) \leq \frac{x^1}{1-x^1} + \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t} dt. \quad (\dagger)$$

On effectue alors le changement de variable (décroissant)  $u = x^t = e^{t \ln x}$  qui donne  $du = \ln x \cdot x^t dt$  :

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t} dt = \int_x^0 \frac{1}{1-u} \cdot \frac{du}{\ln x} = \frac{\ln(1-x)}{\ln x}.$$

D'après ( $\dagger$ ),

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} \frac{\ln(1-x)}{\ln x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{1-x}\right) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{\ln(1-x)}{\ln x} \sim \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$$

puisque  $\ln(1-x)$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $x$  tend vers 1.

🔗 On pouvait conjecturer le résultat en remarquant que

$$1 - x^n = (1-x)(1+x+\dots+x^{n-1}) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} n(1-x)$$

et en en déduisant audacieusement que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{1-x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$

Heureux hasard... On pourrait justifier cette propriété si on réussissait à obtenir un encadrement satisfaisant de la différence

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} - \frac{x^n}{n(1-x)}$$

mais ça ne me paraît pas simple.

On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(nx^2 + 1)}.$$

[ 1.a. ] Étudier la continuité de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .

[ 1.b. ] Calculer les limites de  $f$  en  $0^+$  et en  $+\infty$ .

[ 1.c. ] La fonction  $f$  est-elle intégrable sur  $]0, +\infty[$  ?

[ 1.a. ] Pour  $x > 0$ ,

$$\frac{1}{n(nx^2 + 1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 x^2}$$

et comme la série de Riemann  $\sum 1/n^2$  est absolument convergente, la somme  $f(x)$  est bien définie.

• Pour tout  $a > 0$ ,

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [a, +\infty[, \quad 0 \leq u_n(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{n(nx^2 + 1)} \leq \frac{1}{n(na^2 + 1)}.$$

Le majorant est indépendant de  $x$  et, on vient de le justifier, c'est le terme général d'une série convergente, donc la série de fonctions  $\sum u_n$  converge normalement sur  $[a, +\infty[$ . Comme les fonctions  $u_n$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ , on en déduit que la somme  $f$  est continue sur

$$\bigcup_{a>0} [a, +\infty[ = ]0, +\infty[.$$

[ 1.b. ] On a démontré que la série de fonctions  $\sum f_n$  convergeait normalement au voisinage de  $+\infty$ . Comme chaque fonction  $f_n$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , on déduit du Théorème d'interversion des limites que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

• En tant que somme de fonctions décroissantes, la fonction  $f$  est décroissante, donc elle tend vers une limite (finie ou infinie) au voisinage de 0. Puisque les fonctions  $f_n$  sont positives,

$$\forall N \geq 1, \forall x > 0, \quad f(x) \geq \sum_{n=1}^N f_n(x).$$

On en déduit que

$$\forall N \geq 1, \quad f(0^+) \geq \sum_{n=1}^N f_n(0) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}.$$

Comme  $f(0^+)$  est indépendant de  $N$ , on peut passer à la borne supérieure dans cette inégalité et comme la série harmonique est une série divergente de terme général positif, on en déduit que

$$f(0^+) = +\infty.$$

[ 1.c. ] La fonction  $f$  est continue sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

• Il est clair que

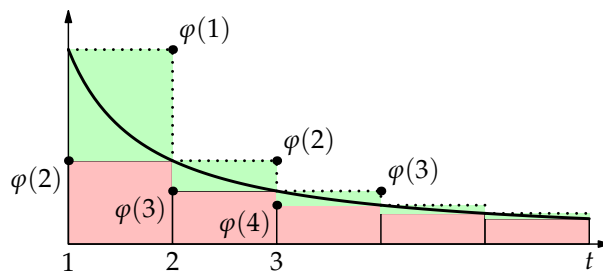
$$\forall x > 0, \quad 0 \leq f(x) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 x^2} = \frac{\zeta(2)}{x^2}$$

et donc que  $f$  est intégrable au voisinage de  $+\infty$ .

• Pour  $x > 0$ , la fonction  $\varphi_x$  définie par

$$\forall t \geq 1, \quad \varphi_x(t) = \frac{1}{t(tx^2 + 1)}$$

est clairement décroissante sur  $[1, +\infty[$ . Nous allons donc comparer la somme  $f(x)$  à une intégrale.



Pour tout  $x > 0$ ,

$$\int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt \leq f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \leq u_1(x) + \int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt. \quad (*)$$

Pour calculer l'intégrale, on décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{t(tx^2 + 1)} = \frac{1}{t} - \frac{x^2}{tx^2 + 1}$$

et on primitive en prenant soin de ne pas faire apparaître d'intégrales divergentes !

$$\int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt = \left[ \ln \frac{t}{tx^2 + 1} \right]_1^{+\infty} = -2 \ln x + \ln(1 + x^2).$$

On déduit alors de (\*) que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -2 \ln x + \ln(1 + x^2) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{1 + x^2}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -2 \ln x.$$

Comme  $\ln$  est intégrable au voisinage de 0 (fonction de référence!), on en déduit que  $f$  est intégrable au voisinage de 0.

On a ainsi démontré que la fonction  $f$  était intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

• **Variante.**

On sait que la fonction  $f$  est continue sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ . Par ailleurs, il est assez clair que chaque fonction  $u_n$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  et on vérifie (en posant  $u = \sqrt{nx}$ ) que

$$\forall n \geq 1, \quad \int_0^{+\infty} |u_n(t)| dt = \frac{\pi}{2n\sqrt{n}}.$$

Comme la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$  est absolument convergente, le Théorème d'intégration terme à terme nous assure que la fonction  $f$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  et que

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t) dt = \frac{\pi}{2} \zeta(3/2).$$

↳ Dans sa version lebesguienne, le Théorème d'intégration terme à terme ne justifie pas seulement l'égalité

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n(t) dt$$

mais aussi (et surtout) que la somme de la série de fonctions  $\sum u_n$  est intégrable sur l'intervalle  $I$ .

On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{x^2 + n^2}.$$

[ 1. ] Déterminer l'ensemble de définition de  $f$  et étudier la continuité de  $f$ .

[ 2. ] Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $\alpha > 0$ . Justifier la convergence de l'intégrale généralisée

$$I_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-\alpha t} dt$$

et calculer sa valeur.

[ 3. ] La fonction  $f$  est-elle intégrable sur  $]0, +\infty[$  ?

[ 1. ] En posant

$$\varphi = \left[ (x, t) \mapsto \frac{t}{x^2 + t^2} \right],$$

on obtient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) = \frac{x^2 - t^2}{(x^2 + t^2)^2}.$$

• Soit  $A > 0$ . Pour  $x \in [-A, A]$ , la suite de terme général

$$u_n(x) = \frac{n}{x^2 + n^2}$$

est décroissante à partir de  $n \geq A$  et tend vers 0. On peut donc invoquer le Critère spécial des séries alternées :

- pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la série alternée  $\sum (-1)^{n-1} u_n(x)$  est convergente ;
- pour tout  $A > 0$  et pour tout  $n \geq A$ , le reste d'ordre  $n$  est dominé :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1} u_k(x) \right| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{n}{0^2 + n^2} = \frac{1}{n}$$

donc la série de fonctions  $\sum (-1)^{n-1} u_n$  converge uniformément sur tout segment  $[-A, A]$ .

La somme  $f$  est donc définie sur  $\mathbb{R}$  et comme les fonctions  $u_n$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ , la somme  $f$  est continue sur

$$\mathbb{R} = \bigcup_{A>0} [-A, A].$$

[ 2. ] Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $\alpha > 0$ . Pour tout  $A > 0$ ,

$$\int_0^A \cos(xt) e^{-\alpha t} dt = \Re \int_0^A e^{(ix-\alpha)t} dt = \Re \frac{e^{(ix-\alpha)A} - 1}{ix - \alpha}.$$

Comme  $\alpha > 0$ ,

$$|e^{(ix-\alpha)A}| = e^{-\alpha A} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0,$$

donc l'intégrale généralisée  $I_\alpha(x)$  est convergente et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \alpha > 0, \quad I_\alpha(x) = \Re \frac{1}{\alpha - ix} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}.$$

[ 3. ] Avec un minimum de lucidité, on se rend compte que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-nt} dt.$$

• Fixons  $x \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad \left| \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \cos(xt) e^{-nt} \right| = |\cos(xt)| \left| \frac{e^{-t}(1 - (-1)^N e^{-Nt})}{1 + e^{-t}} \right|$$

(somme géométrique)

$$\leq 2e^{-t}.$$

La majorant est intégrable en fonction de  $t$  sur  $[0, +\infty[$  et indépendant de  $N \in \mathbb{N}^*$ . La convergence de la suite des sommes partielles est donc dominée, ce qui permet de passer à la limite sous le signe  $\int$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cos(xt) e^{-nt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} \cdot \cos(xt) dt.$$

• On sait que la fonction  $\cos$  est développable en série entière sur  $\mathbb{R}$ , donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k} t^{2k}}{(2k)!} dt.$$

Pour chaque  $x \in \mathbb{R}$  fixé, la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k} t^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}$$

est une série de fonctions continues sur  $\mathbb{R}_+$  qui converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$  vers la fonction continue

$$t \mapsto \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} \cdot \cos(xt).$$

De plus, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} \cdot \frac{x^{2k} t^{2k}}{(2k)!} \right| dt \leq x^{2k} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} t^{2k}}{(2k)!} dt = x^{2k} \quad (\text{calcul classique})$$

$$\geq \frac{x^{2k}}{2}$$

puisque  $1 \leq 1+e^{-t} \leq 2$ . On en déduit que, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , la série numérique

$$\sum \int_0^{+\infty} \left| \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} \cdot \frac{x^{2k} t^{2k}}{(2k)!} \right| dt$$

est convergente, ce qui nous autorise à intégrer terme à terme :

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} \cdot t^{2k} dt$$

et la minoration qu'on a trouvé nous assure que cette série entière diverge grossièrement pour  $|x| \geq 1$ .

La fonction  $f$  est donc développable en série entière sur  $] -1, 1[$  :

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{(-1)^k}{(2k)!} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} \cdot t^{2k} dt \right) x^{2k}$$

et le rayon de convergence de cette série entière est égal à 1 (par comparaison à la série géométrique).

• On aurait pu aussi remarquer que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+(x/n)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+k-1}}{n^{2k+1}} \cdot x^{2k}$$

et espérer pouvoir appliquer le Théorème de Fubini pour obtenir :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+k-1}}{n^{2k+1}} \right) x^{2k}.$$

Mais la famille considérée n'est pas sommable puisque :

— Si la famille  $(a_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$  est sommable, alors la série de terme général

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sigma_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k}$$

est absolument convergente

— alors que la série  $\sum (-1)^{n-1} u_n(x)$  est convergente sans être absolument convergente puisque  $u_n(x) \sim 1/n$ .

On ne peut donc pas compter sur le Théorème de Fubini pour conclure.

Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  est **absolument monotone** lorsque

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad f^{(k)}(x) \geq 0.$$

[ **Question de cours** ]

Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral.

[ **1.** ] Soient  $f$  et  $g$ , deux fonctions absolument monotones sur  $I$ . Démontrer que  $f + g$  et  $fg$  sont absolument monotones sur  $I$ .

[ **2.** ] Soient  $R > 0$  et  $f$ , une fonction absolument monotone sur  $I = [0, R[$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$\forall x \in I, \quad R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

[ **2.a.** ] Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction

$$x \mapsto \frac{R_n(x)}{x^n}$$

est croissante sur  $]0, R[$ .

[ **2.b.** ] Démontrer que la fonction  $f$  est la somme de sa série de Taylor sur  $[0, R[$ .

[ **1.** ] La somme  $f + g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad (f + g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x) \geq 0$$

en tant que somme de termes positifs.

De même, le produit  $fg$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$  et, d'après la formule de Leibniz,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \geq 0$$

car chaque terme est le produit de trois facteurs positifs.

Ainsi,  $f + g$  et  $fg$  sont absolument monotones.

[ **2.a.** ] D'après la formule de Taylor avec reste intégral,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad R_n(x) &= \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt \\ &= \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 f^{(n+1)}(xu)(1-u)^n du. \quad (\text{avec } t = xu \text{ et } dt = x du) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad \frac{R_n(x)}{x^n} = \frac{x}{n!} \int_0^1 f^{(n+1)}(xu)(1-u)^n du.$$

On remarque alors que

- Le facteur  $x/n!$  est une fonction positive et croissante de  $x$ .
- L'expression  $f^{(n+1)}(xu)(1-u)^n$  est positive sur  $[0, 1]$ , donc l'intégrale est positive.
- La dérivée  $(f^{(n+1)})' = f^{(n+2)}$  est positive, donc la fonction  $f^{(n+1)}$  est croissante et la fonction

$$x \mapsto f^{(n+1)}(xu)$$

est croissante en tant que composée de fonctions croissantes. Comme le facteur  $(1-u)^n$  est positif et indépendant de  $x$ , on en déduit que la fonction intégrande est croissante par rapport à  $x$ .

Un produit de fonctions croissantes et positives est lui-même une fonction croissante et positive, donc la fonction

$$x \mapsto \frac{R_n(x)}{x^n}$$

est croissante et positive sur  $I$ , quel que soit l'entier  $n$ .

[ **2.b.** ] Soit  $x \in ]0, \mathbb{R}[$ . Il existe donc un réel  $\alpha$  tel que  $0 \leq x < \alpha < \mathbb{R}$  et on déduit de la question précédente que

$$0 \leq \frac{R_n(x)}{x^n} \leq \frac{R_n(\alpha)}{\alpha^n}.$$

Comme  $f$  est absolument monotone,

$$R_n(\alpha) = f(\alpha) - \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \alpha^k}_{\geq 0} \leq f(\alpha)$$

et comme  $x^n > 0$ ,

$$0 \leq R_n(x) \leq f(\alpha) \cdot \left(\frac{x}{\alpha}\right)^n. \quad (*)$$

Comme  $0 < x < \alpha$ , le majorant tend vers 0, donc  $R_n(x)$  tend vers 0 et finalement

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

☞ L'égalité est évidente pour  $x = 0$ !

☛ L'encadrement (\*) signifie que la suite des restes  $R_n$  converge uniformément sur tout segment  $[0, \alpha] \subset [0, \mathbb{R}[$  vers la fonction nulle, c'est-à-dire que la série de Taylor converge uniformément sur tout segment de  $[0, \mathbb{R}[$  — ce qui ne surprendra pas ceux qui connaissent le cours sur les séries entières.

☛ On peut démontrer que la fonction  $\tan$  est absolument monotone sur  $[0, \pi/2[$ , en utilisant notamment la célèbre relation

$$\forall 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \quad \tan' \theta = 1 + \tan^2 \theta$$

dans un raisonnement par récurrence. Ce qui précède prouve que la fonction  $\tan$  est développable en série entière sur l'intervalle  $] -\pi/2, \pi/2[$ .