Jeudi 28 mai

Référence	Origine	Thèmes
136-472	Mines MP	Idéaux
136-481	"	Polynômes
136-482	"	Polynômes, convexité (archi-classique)
136-507	"	Comatrices
136-619	"	Compacité
136-636	"	Série harmonique

rms136-472

> *Soit* A*, un anneau commutatif. Un idéal* I *de* A *est dit* ***premier*** *lorsque* $I \neq A$ *et que, quels que soient* x *et* y *dans* A*, si* $xy \in I$*, alors* $x \in I$ *ou* $y \in I$*.*
> [**1.**] *Déterminer les idéaux premiers de* $\mathbb{Z}$*.*
> [**2.**] *Soit* $P \in \mathbb{K}[X]$*, un polynôme irréductible. Démontrer que l'idéal* $\langle P \rangle$ *engendré par* P *est un idéal premier de* $\mathbb{K}[X]$*.*
> [**3.**] *Soient* I*, un idéal premier ; J et K, deux idéaux de l'anneau* A*. Démontrer que : si* $J \cap K = I$*, alors* $J = I$ *ou* $K = I$*.*
> [**4.**] *Soit* A*, un anneau commutatif dont les idéaux stricts sont tous premiers. Démontrer que l'anneau* A *est intègre, puis que c'est un corps.*

[**1.**] Comme $\mathbb{Z}$ est un anneau intègre, l'idéal nul $\{0\}$ est premier.

Si l'idéal I n'est ni nul, ni égal à $\mathbb{Z}$, alors il existe un entier naturel $n \geqslant 2$ tel que $I = n\mathbb{Z}$.

Si n est composé, alors il existe deux entiers a et b supérieurs à 2 tels que $n = ab \in I$. Comme $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 2$, alors $0 < a < n$ et $0 < b < n$, donc $a \notin I$ et $b \notin I$, donc l'idéal I n'est pas premier.

Si $n \geqslant 2$ n'est pas composé, alors n est premier. Considérons deux entiers x et y tels que $x \notin I$ et $y \notin I$. Comme $I = \langle n \rangle$, alors n ne divise ni x, ni y et comme n est premier, alors x et y sont premiers à n. Par conséquent (Bézout), le produit xy est premier à n, donc $xy \notin I$. L'idéal I est donc premier.

❧ Les idéaux premiers de $\mathbb{Z}$ sont l'idéal nul et les idéaux engendrés par les nombres premiers.

[**2.**] On suit la même démarche.

Comme P est irréductible, si I est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ qui contient P, alors ou bien $I = \langle P \rangle$, ou bien $I = \mathbb{K}[X]$.

Soient Q et R, deux polynômes tels que $QR = P$. L'idéal $\langle Q \rangle$ contient Q et $P = QR$, donc il contient l'idéal $\langle P \rangle$. Comme P est irréductible,

— ou bien $\langle Q \rangle = \langle P \rangle$ et, dans ce cas, $Q \in \langle P \rangle$;
— ou bien $\langle Q \rangle = \mathbb{K}[X]$ et, dans ce cas, Q est inversible, donc $P = QR$ est associé à R et, de ce fait, $R \in \langle P \rangle$.

On a ainsi démontré que l'idéal $\langle P \rangle$ était premier.

[**3.**] Comme $J \cap K = I$, les deux idéaux J et K contiennent l'idéal I.

Raisonnons par l'absurde : si $J \neq I$ et $K \neq I$, alors $I \subsetneq J$ et $I \subsetneq K$, donc il existe $x \in J \setminus I$ et $y \in K \setminus I$. Comme les idéaux sont absorbants pour la multiplication, on en déduit que $xy \in J$ (puisque $x \in J$) et $xy \in K$ (puisque $y \in K$). Donc

$$xy \in J \cap K = I.$$

Comme l'idéal I est premier, il s'ensuit que x ou y appartient à I, ce qui est faux par hypothèse.

Cette contradiction démontre que notre hypothèse est fausse et donc que $J = I$ ou que $K = I$.

[**4.**]

✍ *Un* ***anneau intègre*** *est un anneau commutatif sans diviseur de zéro. Ici, l'anneau* A *est supposé commutatif, il suffit donc de vérifier qu'il n'y a pas de diviseur de zéro. (Par l'absurde, une fois de plus.)*

L'idéal nul $\{0_A\}$ est un idéal strict de A, donc il est premier. Par définition, s'il existe deux éléments x et y de A tels que $xy \in \{0_A\}$, alors l'un des deux facteurs au moins appartient à $\{0_A\}$. Cela signifie précisément que l'anneau A est intègre.

✍ *Dans un anneau, les éléments neutres* 0_A *et* 1_A *sont distincts et l'idéal* $\langle x \rangle$ *est égal à* A *si, et seulement si,* x *est un élément inversible.*

❧ Considérons un élément x non nul de A.

Si x^2 est inversible, alors l'idéal $\langle x^2 \rangle$ est égal à A, donc il existe $a \in A$ tel que $ax^2 = 1_A$. Dans ce cas, x est inversible (d'inverse ax).

Si x^2 n'est pas inversible, alors l'idéal $\langle x^2 \rangle$ est premier, donc $x \in \langle x^2 \rangle$ (puisque $x \cdot x \in \langle x^2 \rangle$). Il existe donc $a \in A$ tel que $x = ax^2$. Comme $x \neq 0_A$ et que l'anneau A est intègre, on en déduit que $ax = 1_A$ et donc que x est inversible (d'inverse a).

On a ainsi démontré que tout élément non nul de A était inversible et donc que A était un corps.

✍ *Un corps ne compte que deux idéaux :* $\{0\}$ *et lui-même...*

[**1.**] *Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe un, et un seul, polynôme $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que*

$$\forall x \in \mathbb{C}^*, \quad P_n\Big(x+\frac{1}{x}\Big) = x^n + \frac{1}{x^n}.$$

[**2.**] *Soit $a \in \mathbb{Q}$ tel que $\cos a\pi \in \mathbb{Q}$. Démontrer que $2\cos a\pi$ est en fait un entier relatif.*

[**1.**] L'ensemble V des valeurs prises par l'expression $x+1/x$ lorsque x parcourt $\mathbb{R}^*$ est un ensemble infini. Par conséquent, si deux polynômes P et Q vérifient $P(y) = Q(y)$ pour tout $y \in V$, alors $P = Q$.

✍ *Une étude rapide montre que $V =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.*

Il existe donc **au plus un** polynôme $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad P_n\Big(x+\frac{1}{x}\Big) = x^n + \frac{1}{x^n}.$$

❧ Il est clair que les polynômes $P_0 = 2$ et $P_1 = X$ conviennent.
Il n'est pas plus difficile de remarquer que $P_2 = X^2 - 2$ convient :

$$\forall x \in \mathbb{C}^*, \qquad \Big(x+\frac{1}{x}\Big)^2 = \Big(x^2+\frac{1}{x^2}\Big) + 2.$$

HR : Supposons que, pour un entier $n \geqslant 2$, il existe deux polynômes P_n et P_{n-1} à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{C}^*, \qquad P_n\Big(x+\frac{1}{x}\Big) = x^n + \frac{1}{x^n} \quad \text{et} \quad P_{n-1}\Big(x+\frac{1}{x}\Big) = x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}.$$

Comme

$$\Big(x^n+\frac{1}{x^n}\Big)\Big(x+\frac{1}{x}\Big) = \Big(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\Big) + \Big(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\Big)$$

pour tout $x \in \mathbb{C}^*$, on en déduit que le polynôme P_{n+1} défini par

$$P_{n+1} = XP_n - P_{n-1}$$

convient.

L'existence des polynômes P_n est ainsi démontrée par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$.

✍ *L'unicité des polynômes P_n prouve que ces polynômes vérifient* nécessairement *la relation de récurrence*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n.$$

(Sans l'unicité, cette relation n'est qu'une condition suffisante pour trouver des polynômes convenables.)

On déduit alors de cette relation (au moyen d'une nouvelle démonstration par récurrence) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n est un polynôme unitaire de degré n.

[**2.**] Comme $a \in \mathbb{Q}$, il existe deux entiers $n \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $a = n/q$ et (formules de Moivre-Euler)

$$2\cos a\pi = e^{ia\pi} + e^{-ia\pi} = e^{ia\pi} + \frac{1}{e^{ia\pi}}.$$

Par construction du polynôme P_{2q},

$$P_{2q}(2\cos a\pi) = (e^{ia\pi})^{2q} + \frac{1}{(e^{ia\pi})^{2q}} = e^{2in\pi} + e^{-2in\pi} = 2.$$

Ainsi, le réel $2\cos a\pi$ est un nombre rationnel qui est une racine du polynôme $P_{2q} - 2 \in \mathbb{Z}[X]$.

Il existe donc deux entiers $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{N}^*$, *premiers entre eux*, et des entiers $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{d-1}$ tels que

$$2\cos a\pi = \frac{u}{v} \quad \text{et} \quad \Big(\frac{u}{v}\Big)^d + \sum_{k=0}^{d-1} \beta_k \Big(\frac{u}{v}\Big)^k = 0.$$

✍ *Le polynôme P_{2q} est unitaire, détail capital !*

En multipliant par v^d, on en déduit que

$$u^d = -\sum_{k=0}^{d-1} \beta_k u^k v^{d-k} = -v\Big(\sum_{k=0}^{d-1} \beta_k u^k v^{d-k-1}\Big).$$

Cette factorisation est licite dans $\mathbb{Z}$: pour $0 \leqslant k < d$, la différence $(d-k)$ est un entier naturel non nul, donc $(d-k-1) \in \mathbb{N}$. Comme les β_k et u sont des entiers relatifs, on en déduit que le second membre est un entier multiple de v et donc que v est un diviseur de u^d.

Par construction, on a choisi u et v premiers entre eux, donc v est premier à u^d.

On a ainsi démontré que $v = 1$ et donc que $2\cos a\pi = u/1 = u \in \mathbb{Z}$.

✍ *En tant que réel, il est clair que* $2\cos a\pi \in [-2, 2]$*, donc*

$$\cos a\pi \in \{-1, \quad -1/2, \quad 0, \quad 1/2, \quad 1\}.$$

Par conséquent, les rationnels a *tels que* $\cos a\pi$ *soient rationnels sont* 0*,* $1/3$*,* $1/2$*,* $2/3$ *et* 1 *(et tous ceux qui s'en déduisent grâce aux symétries de la fonction* $\cos$*).*

rms136-482

Soient E*, un espace vectoriel réel de dimension finie et* $I = \{x_1, \dots, x_n\}$*, une partie finie de* E*. On note* $C(I)$*, l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de* I *:*

$$z \in C(I) \iff \exists\, (\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{R}_+^n, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \quad \textit{et} \quad z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

✍ *L'ensemble* $C(I)$ *est l'**enveloppe convexe** des éléments de* I *: c'est la plus petite partie convexe qui contienne* I*, c'est aussi l'intersection de toutes les parties convexes de* E *qui contiennent* I*.*

Pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$*, on note* $Z(Q)$*, l'ensemble des racines complexes de* Q*.*
On considère ici un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$*, non constant.*
[1.] *Écrire la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle* P'/P*.*
[2.] *Démontrer que* $C(Z(P')) \subset C(Z(P))$*.*
[3.] *Soit* H*, un demi-plan fermé de* $\mathbb{C}$ *qui contient au moins une racine de* P'*.*
[3. a.] *Le demi-plan* H *contient au moins une racine de* P*.*
[3. b.] *Démontrer que* $P_*(H) = \mathbb{C}$*.*

[1.] Comme P n'est pas constant, il est scindé (Théorème de d'Alembert-Gauss) :

$$P = c \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k}$$

en supposant que les nombres complexes α_k soient deux à deux distincts et que les multiplicités m_k soient des entiers naturels non nuls.

La formule de Leibniz nous donne l'expression de P' et on en déduit que

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{X - \alpha_k}.$$

[2.] Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, une racine de P'.

❧ Si z_0 est aussi une racine de P, c'est-à-dire si z_0 est une racine au moins double de P, alors il n'y a rien à prouver !

❧ On suppose donc que $P(z_0) \neq 0$ et que $P'(z_0) = 0$. On en déduit que

$$\frac{P'(z_0)}{P(z_0)} = 0 = \sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{z_0 - \alpha_k}.$$

En faisant intervenir les quantités conjuguées et en conjuguant l'expression, on obtient

$$0 = \sum_{k=1}^{r} m_k \cdot \frac{z_0 - \alpha_k}{|z_0 - \alpha_k|^2}$$

c'est-à-dire

$$z_0 \left(\sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{|z_0 - \alpha_k|^2} \right) = \sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{|z_0 - \alpha_k|^2} \cdot \alpha_k. \tag{$\star$}$$

Les scalaires

$$\lambda_k = \frac{m_k}{|z_0 - \alpha_k|^2}$$

sont tous strictement positifs, donc leur somme est strictement positive et la relation $(\star)$ montre que z_0 est bien une combinaison convexe des complexes $\alpha_1, \dots, \alpha_r$.

✍ *Il faut arriver à dépasser le fait que l'expression des scalaires* λ_k *dépend de* z_0 *pour conclure !*

[3. a.] Par l'absurde.

Si H ne contient aucune racine de P, alors H^c contient toutes les racines de P. Or H^c est un demi-plan ouvert, donc une partie convexe qui contient $Z(P)$. Par conséquent,

$$C\big(Z(P')\big) \subset C\big(Z(P)\big) \subset H^c,$$

ce qui contredit l'hypothèse d'une racine de P' dans H.

✍ *On utilise seulement le fait que* H^c *soit convexe, rien de plus !*

[**3. b.**] Il est clair que l'image de H par P est contenue dans $\mathbb{C}$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $Q_z = P - z$. Comme H contient une racine de $Q_z' = P'$, il contient aussi une racine de Q_z, c'est-à-dire un antécédent de z par P. Donc la restriction de P à H est surjective.

rms136-507

Soient $\mathbb{K}$, un sous-corps de $\mathbb{C}$; A et B, deux matrices semblables de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrer que leurs comatrices $\operatorname{Com}(A)$ et $\operatorname{Com}(B)$ sont semblables.

✍ *Cf [136-596] (26 mai) pour quelques rappels utiles sur la comatrice.*

On note P, une matrice inversible telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

Deux matrices semblables ont même rang et même déterminant, donc $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$ et $\det A = \det B$.

Les matrices A et B ont aussi même polynôme caractéristique, donc

$$\operatorname{tr}\operatorname{Com}(A) = \operatorname{tr}\operatorname{Com}(B).$$

✍ *Il suffit de réfléchir un peu au calcul du polynôme caractéristique :*

$$\det(XI_n - M) = X^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f_k(M) X^{n-k}$$

et chaque coefficient $f_k(M)$ est la somme des mineurs principaux d'ordre k :

$$f_k(M) = \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ \#(I)=k}} \det M_{I,I}.$$

Les mineurs principaux d'ordre $(n-1)$ sont en fait les coefficients diagonaux de la comatrice, donc $f_{n-1}(M) = \operatorname{tr}\operatorname{Com}(M)$.

❧ Si A est inversible, alors B est inversible et leurs inverses sont semblables :

$$\forall\, P \in GL_n(\mathbb{K}), \qquad P^{-1}A^{-1}P = (P^{-1}AP)^{-1} = B^{-1}.$$

D'après les formules de Cramer,

$$\big(\operatorname{Com}(A)\big)^{\top} = \det A \cdot A^{-1} = \det B \cdot PB^{-1}P^{-1} = P\big[\big(\operatorname{Com}(B)\big)^{\top}\big]P^{-1}$$

donc $\operatorname{Com}(A)$ et $\operatorname{Com}(B)$ sont semblables.

❧ Si $\operatorname{rg} A \leqslant n-2$, alors $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} A \leqslant n-2$, donc $\operatorname{Com}(A) = \operatorname{Com}(B) = 0_n$: la conclusion est la même.

❧ Si $\operatorname{rg} A = n-1$, alors $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} A = n-1$. Pour chacune des deux matrices, il existe donc au moins un mineur d'ordre $(n-1)$ non nul, donc les deux comatrices sont distinctes de la matrice nulle 0_n.

Comme $\det A = 0$, on déduit des formules de Cramer (en transposant) que

$$A^{\top}.\operatorname{Com}(A) = \operatorname{Com}(A).A^{\top} = 0_n.$$

Donc $\operatorname{Im}\operatorname{Com}(A) \subset \operatorname{Ker} A^{\top}$ et $\operatorname{Im} A^{\top} \subset \operatorname{Ker}\operatorname{Com}(A)$.

Une matrice a même rang que sa transposée, donc $\dim \operatorname{Ker} A^{\top} = 1$ et $\dim \operatorname{Im} A^{\top} = n-1$. Sachant que $\operatorname{Com}(A) \neq 0_n$, on a $\dim \operatorname{Im}\operatorname{Com}(A) \geqslant 1$, donc (inclusion et égalité des dimensions, ainsi que le Théorème du rang)

$$\operatorname{Im}\operatorname{Com}(A) = \operatorname{Ker} A^{\top} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Ker}\operatorname{Com}(A) = \operatorname{Im} A^{\top}.$$

Par conséquent,

— la comatrice $\operatorname{Com}(A)$ est une matrice de rang 1 et il existe une colonne C et une ligne L telles que

$$\operatorname{Com}(A) = C.L. \tag{$\star$}$$

— La colonne C engendre l'image de $\operatorname{Com}(A)$, c'est-à-dire le noyau de $A^{\top}$:

$$A^{\top}.C = 0. \tag{$\dagger$}$$

— La ligne L représente une forme linéaire dont le noyau est celui de A, c'est-à-dire l'image de $A^\top$:

$$L.A^\top = 0. \tag{‡}$$

✍ *Comme $\operatorname{rg} A = n-1$, la colonne C et la ligne L sont déterminées à un facteur près par les équations (†) et (‡).*

❧ Comme B vérifie les mêmes propriétés que A, il existe une colonne C_0 et une ligne L_0 telles que

$$\operatorname{Com}(B) = C_0.L_0, \qquad B^\top.C_0 = 0, \qquad L_0.B^\top = 0. \tag{⋆⋆}$$

On a supposé que $B = P^{-1}AP$, donc

$$B^\top = Q.A^\top.Q^{-1} \qquad \text{avec} \qquad Q = P^\top.$$

On en déduit que

$$A^\top.X = 0 \iff B^\top.(QX) = 0 \qquad \text{et que} \qquad Y.A^\top = 0 \iff Y.Q^{-1}.B^\top = 0.$$

Par conséquent, la colonne C_0 est proportionnelle à $Q^{-1}C$ et la ligne L_0 est proportionnelle à $L.Q$. Donc $\operatorname{Com}(B) = C_0.L_0$ est proportionnelle à

$$(Q^{-1}C)(L.Q) = Q^{-1}(C.L)Q = Q^{-1}.\operatorname{Com}(A).Q.$$

Mais on a remarqué plus haut que $\operatorname{Com}(A)$ et $\operatorname{Com}(B)$ avaient même trace !

— Si cette trace n'est pas nulle, on peut conclure que $\operatorname{Com}(B)$ est en fait égale (et pas seulement proportionnelle !) à $Q^{-1}.\operatorname{Com}(A).Q$, donc les deux comatrices sont semblables.

— Si cette trace est nulle, alors on ne peut plus conclure à l'égalité de $\operatorname{Com}(B)$ et de $Q^{-1}.\operatorname{Com}(A).Q$, mais on considère en fait deux matrices de rang 1 et de trace nulle et ces deux matrices sont donc semblables.

✍ *Toute matrice de rang 1 et de trace nulle est semblable à la matrice élémentaire $E_{1,2}$ (exercice classique).*

rms136-619

[**1.**] *On munit l'espace* $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *de la norme* $\|\cdot\|_\infty$. *Les parties*

$$A = \left\{ f \in E \;:\; \int_0^1 f(t)\,dt = 1 \right\} \qquad \textit{et} \qquad B = \left\{ f \in E \;:\; f_*([0,1]) \subset [0,1] \right\}$$

sont-elles compactes ?
[**2.**] *Soit* $(E, \|\cdot\|)$, *un espace vectoriel normé et* K, *une partie compacte non vide de* E. *Une application* $f : K \to K$ *est une* ***isométrie de*** K *lorsque*

$$\forall\, x, y \in K, \qquad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

[**2. a.**] *Dans le cas* $E = \mathbb{R}$ *et* $K = [0,1]$, *quelles sont les isométries de* K *?*
[**2. b.**] *Si* $f : K \to K$ *est une isométrie du compact* K, *alors* f *est surjective.*
[**3.**] *Soient* K, *une partie compacte de* E *et* f, *une application continue de* K *dans* K *telle que*

$$\forall\, x, y \in K, \qquad \|f(x) - f(y)\| \geqslant \|x - y\|.$$

Démontrer que f *est une isométrie.*

[**1.**] Il est facile de concevoir une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur $[0,1]$ telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 f_n(t)\,dt = 1 \qquad \text{et que} \qquad \lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = +\infty.$$

(Si on a la bonne idée de faire une FIGURE, on pourra trouver des fonctions affines par morceaux dont l'intégrale est l'aire d'un rectangle de plus en plus haut et de plus en plus étroit.)

Une partie compacte étant nécessairement bornée, la partie A n'est pas compacte.

✍ *Autre contre-exemple :* Merci MG !

On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *strictement croissante de réels strictement compris entre* 0 *et* 1 *et, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on note* b_n, *le milieu du segment* $[a_n, a_{n+1}]$ *:*

$$b_n = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on note* f_n, *la fonction*
— *continue sur* $[0,1]$ *;*
— *nulle sur* $[0, a_n] \cup [a_{n+1}, 1]$,
— *affine sur* $[a_n, b_n]$ *et sur* $[b_n, a_{n+1}]$,
— *telle que* $f(b_n) = 1$.

(Qu'attendez-vous pour faire une ***figure*** *?) Il est clair que* $\|f_n\|_\infty = 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *mais aussi que* $\|f_n - f_m\|_\infty = 1$, *quels que soient* $m \neq n$. *Par conséquent, aucune suite extraite de* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est convergente pour la norme uniforme.*

❧ Pour $n \geqslant 2$, on considère la fonction continue $f_n : [0,1] \to [0,1]$ définie par

$$\forall\, t \in [0, 1/n], \quad f_n(t) = 1 - nt \qquad \text{et} \qquad \forall\, t \in [1/n, 1], \quad f_n(t) = 0.$$

(Si on a la bonne idée de faire une FIGURE, on verra apparaître un triangle.) Il est clair que $f_n \in B$ pour tout $n \geqslant 2$ et que la suite $(f_n)_{n\geqslant 2}$ converge simplement vers la fonction φ définie par

$$\varphi(1) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall\, t \in \,]0,1]\,, \quad \varphi(t) = 0.$$

La convergence uniforme implique la convergence simple : s'il existait une suite extraite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui convergeait uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction ψ, alors la fonction ψ serait continue sur $[0,1]$ (la convergence uniforme conserve la continuité) et cette suite extraite convergerait aussi simplement sur $[0,1]$ vers ψ.

Si une suite (de fonctions) converge (simplement sur $[0,1]$), alors toute suite extraite converge (simplement sur $[0,1]$) vers la même limite. On devrait donc avoir $\psi(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in [0,1]$, ce qui contredit la continuité de ψ (discontinuité en 1, cf FIGURE).

La partie B n'est pas compacte non plus.

[**2.a.**] Commençons par remarquer que $f(0) \in [0,1]$, $f(1) \in [0,1]$ et que
$$\big|f(1)-f(0)\big| = \|1-0\| = 1.$$
Par conséquent, il n'y a que deux possibilités : $(f(0), f(1)) = (0,1)$ et $(f(0), f(1)) = (1,0)$.

Si $f : [0,1] \to [0,1]$ est une isométrie, alors $g = [x \mapsto f(1-x)]$ est aussi une isométrie de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Nous pouvons donc supposer dans ce qui suit que $f(0) = 0$ et que $f(1) = 1$.

Pour tout $x \in [0,1]$, on a donc $f(x) \in [0,1]$ et
$$\big|f(x)-f(0)\big| = |x-0| = x$$
et une seule possibilité : $f(x) = x$.

Sous l'hypothèse $f(0) = 0$, on n'a qu'une seule isométrie : $x \mapsto x$.

Par symétrie, sous l'hypothèse $f(0) = 1$, on n'a qu'une seule isométrie : $x \mapsto 1-x$.

Il existe donc exactement deux isométries de $[0,1]$.

[**2.b.**] Par l'absurde !

Notons $F = f_*(K)$, l'image de K par f : en tant qu'image d'une partie compacte (non vide) par une application continue, la partie F est une partie compacte (non vide).

Si f n'est pas surjective, alors il existe $x_0 \in K$ tel que $x_0 \notin F$. Comme F est une partie fermée non vide, la distance de x_0 à F est atteinte et donc strictement positive : il existe $\alpha > 0$ tel que
$$\forall\, x \in K, \qquad \|x - x_0\| \geqslant \alpha.$$
Considérons la suite de terme général $u_n = f^n(x_0)$. Comme $x_0 \in K$ et que K est stable par f, tous les u_n appartiennent à K. Et comme K est compacte, il existe une suite extraite (u_{n_k}) qui converge vers un élément w de K et d'après l'inégalité triangulaire,
$$\forall\, k, \ell \in \mathbb{N}, \quad \|u_{n_\ell} - u_{n_k}\| \leqslant \|u_{n_\ell} - w\| + \|w - u_{n_k}\|.$$
Mais, quels que soient les indices $0 \leqslant k < \ell$,
$$\begin{aligned}\|u_{n_\ell} - u_{n_k}\| &= \big\|f^{n_k}(u_{n_\ell - n_k}) - f^{n_k}(x_0)\big\| \\ &= \|u_{n_\ell - n_k} - x_0\| \qquad \text{(une composée d'isométries est une isométrie)} \\ &\geqslant \alpha > 0.\end{aligned}$$
ce qui contredit le fait que (u_{n_k}) tende vers w lorsque k tend vers $+\infty$.

On a ainsi démontré la surjectivité de f.

✍ *La propriété d'isométrie prouve clairement que f est injective, donc f est en fait bijective de K sur K.*

[**3.**] Considérons deux points x et y du compact K et laissons agir f : on définit deux suites d'éléments de K en posant
$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad x_k = f^k(x) \qquad \text{et} \qquad y_k = f^k(y).$$
Comme K est compact, le produit cartésien $K \times K$ est compact, donc il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que les deux suites extraites $(x_{\varphi(k)})$ et $(y_{\varphi(k)})$ convergent vers deux éléments ℓ_x et ℓ_y de K.

✍ *Quel meilleur moyen d'exploiter la compacité de K et la fonction f que de faire ainsi agir f sur les éléments de K ? Ce n'est pas une astuce, c'est une* méthode, *qu'on a déjà appliquée pour traiter la question précédente.*

Une récurrence immédiate nous donne
$$\forall\, u, v \in K,\ \forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \big\|f^k(u) - f^k(v)\big\| \geqslant \|u - v\| \tag{$\star$}$$
à partir de l'hypothèse faite sur f. L'astuce taupinale, version semi-groupes, nous donne alors
$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \|x_{\varphi(k+1)-\varphi(k)} - x\| \leqslant \big\|f^{\varphi(k)}(x_{\varphi(k+1)-\varphi(k)}) - f^{\varphi(k)}(x)\big\| = \big\|x_{\varphi(k+1)} - x_{\varphi(k)}\big\|.$$
Comme $(x_{\varphi(k)})$ converge vers ℓ_x, la suite de terme général $x_{\varphi(k+1)} - x_{\varphi(k)}$ tend vers 0_E :
$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \big\|(x_{\varphi(k+1)} - x_{\varphi(k)}) - 0_E\big\| \leqslant \big\|x_{\varphi(k+1)} - \ell_x\big\| + \big\|\ell_x - x_{\varphi(k)}\big\|$$
et par encadrement,
$$\lim_{k \to +\infty} x_{\varphi(k+1)-\varphi(k)} = x. \tag{$\dagger$}$$

L'extractrice φ est, par définition, strictement croissante et tend vers $+\infty$. On peut supposer que φ est même **convexe** au sens où

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \varphi(k+2) - \varphi(k+1) > \varphi(k+1) - \varphi(k)$$

(quitte à remplacer φ par une suite extraite de φ).

Dans ces conditions, la fonction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \psi(k) = \varphi(k+1) - \varphi(k)$$

est une extractrice et on a démontré (†) que la suite extraite de terme général $x_{\psi(k)}$ convergeait vers le point x.

Pour les mêmes raisons (et avec la <u>même</u> extractrice ψ), la suite extraite de terme général $y_{\psi(k)}$ converge vers le point y.

On déduit alors de $(\star)$ que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \qquad \|x_{\psi(k)} - y_{\psi(k)}\| = \left\|f^{\psi(k)}(x) - f^{\psi(k)}(y)\right\| \geqslant \left\|f(x) - f(y)\right\| \geqslant \|x - y\|$$

et en faisant tendre k vers $+\infty$, on en déduit que

$$\|x - y\| = \lim_{k \to +\infty} \|x_{\psi(k)} - y_{\psi(k)}\| \geqslant \left\|f(x) - f(y)\right\| \geqslant \|x - y\|.$$

La fonction f est donc une isométrie.

rms136-636

On note H_n, le n-ième ***nombre harmonique*** *:*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$k_j = \min\{n \in \mathbb{N}^* \;:\; H_n \geqslant j\}.$$

[**1.**] *Démontrer que les entiers k_j sont bien définis pour tout $j \in \mathbb{N}^*$.*
[**2.**] *Étudier la monotonie et la limite éventuelle de la suite $(k_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$.*
[**3.**] *Démontrer que*

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{k_{j+1}}{k_j} = e.$$

[**1.**] Pour $j \in \mathbb{N}^*$, notons

$$E_j = \{n \in \mathbb{N}^* \;:\; H_n \geqslant j\}.$$

Comme $E_j \subset \mathbb{N}$, il suffit de vérifier que $E_j \neq \varnothing$ pour en déduire que $k_j = \min(E_j)$ est bien défini.

On sait que la série harmonique est une série divergente de terme général positif, donc ses sommes partielles H_n tendent vers $+\infty$. Par conséquent, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, à partir d'un certain rang (qui dépend de j), tous les entiers n appartiennent à E_j.

Les entiers k_j sont donc bien définis pour tout $j \in \mathbb{N}^*$.

[**2.**] Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Par définition, $k_{j+1} \in E_{j+1}$, donc

$$H_{k_{j+1}} \geqslant j+1 \geqslant j$$

donc $k_{j+1} \in E_j$. Or $k_j = \min(E_j)$, donc $k_j \leqslant k_{j+1}$. La suite $(k_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ est donc croissante.

❧ Toute suite croissante tend vers une limite, finie ou infinie. Si la suite (k_j) était convergente, alors elle serait stationnaire (c'est une suite d'*entiers*) et on en déduirait que, pour un certain rang j_0,

$$\forall\, j \geqslant j_0, \qquad k_j = k_{j_0}.$$

En revenant à la définition,

$$\forall\, j \geqslant j_0, \qquad H_{k_{j_0}} \geqslant j$$

ce qui signifierait que $H_{k_{j_0}} = +\infty$: c'est absurde !

La suite $(k_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ tend donc vers $+\infty$.

[**3.**] Par définition de l'entier k_j,

$$H_{k_j} - \frac{1}{k_j} = H_{k_j - 1} < j \leqslant H_{k_j},$$

donc

$$\forall\, j \geqslant 1, \qquad j \leqslant H_{k_j} < j + \frac{1}{k_j} \tag{$\dagger_1$}$$

et donc

$$\forall\, j \geqslant 1, \qquad j+1 < H_{k_{j+1}} \leqslant j+1+\frac{1}{k_{j+1}}. \tag{$\dagger_2$}$$

On en déduit par soustraction que

$$\forall\, j \geqslant 1, \qquad 1 - \frac{1}{k_j} = (j+1) - \left(j + \frac{1}{k_j}\right) \leqslant H_{k_{j+1}} - H_{k_j} \leqslant \left(j + \frac{1}{k_{j+1}}\right) - j = 1 + \frac{1}{k_{j+1}}. \tag{$\dagger$}$$

Comme (k_j) tend vers $+\infty$, on a démontré par encadrement que

$$\lim_{j\to+\infty} H_{k_{j+1}} - H_{k_j} = 1.$$

❧ Comme la fonction $t \mapsto {}^1\!/_t$ est décroissante, on peut comparer une intégrale à deux sommes. (Évidemment, si on fait une FIGURE, c'est plus simple.)

Pour tout $j \geqslant 2$,

$$H_{k_{j+1}} - H_{k_j} \leqslant \int_{k_j}^{k_{j+1}} \frac{dt}{t} = \ell n \frac{k_{j+1}}{k_j} \leqslant H_{k_{j+1}-1} - H_{k_j-1} = \left(H_{k_{j+1}} - \frac{1}{k_{j+1}}\right) - \left(H_{k_j} - \frac{1}{k_j}\right).$$

On déduit de ce qui précède que

$$\lim_{j \to +\infty} \ell n \frac{k_{j+1}}{k_j} = 1$$

(par encadrement) et donc, en composant par exp (qui est continue),

$$\lim_{j \to +\infty} \frac{k_{j+1}}{k_j} = e.$$