Vendredi 29 mai

Référence	Origine	Thèmes
130-1154	CCINP MP	Série de fonctions
130-1157	IMT MP	Intégrabilité d'une fonction
130-1172	CCINP MP	Équation différentielle
130-1178	TPE MP	Probabilités
130-1193	CCINP PSI	Trace
130-1246	IMT PSI	Série de fonctions
130-1269	"	Résolution d'un système différentiel
130-1284	TPE PC	Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$
130-1296	IMT PC	Matrices circulantes
130-1314	CCINP PC	Réduction
130-1320	TPE PC	Base orthonormée
130-1322	CCINP PC	Matrice symétrique définie positive
130-1334	"	Normes matricielles

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*, on pose*

$$f_n(x) = \frac{1}{(n+x)^{3/2} + (n+x)^{1/2}}$$

et on note f*, la somme de la série de fonctions* $\sum f_n$.

[**1.**] *Démontrer que* f *est définie sur* $]-1, +\infty[$.

[**2.**] *Démontrer que* f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $]-1, +\infty[$.

[**3.**] *Trouver un équivalent de* f *au voisinage de* -1*. En déduire que* f *est intégrable sur* $]-1, 0]$.

[**4.**] *Calculer la limite de* f *au voisinage de* $+\infty$.

[**5.**] *Démontrer qu'il existe deux réels* a *et* b *tels que*

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{a}{x^b}.$$

[**1.**] On pose $I =]-1, +\infty[$.
Pour tout $x > -1$ (fixé),

$$f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{3/2}}$$

et comme la série de Riemann $\sum {}^{1}/_{n^{3/2}}$ est convergente, on déduit du théorème de comparaison pour les séries de terme général positif que la série $\sum f_n(x)$ est (absolument) convergente et donc que la somme $S(x)$ est bien définie.

[**2.**] Chaque fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.

Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in I$,

$$f_n'(x) = \frac{-(3n + 3x + 1)}{2(n+x)^{3/2}(n+x+1)^2}$$

et donc

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in I, \quad \left|f_n'(x)\right| \leqslant \frac{3}{2(n+x)^{3/2}(n+x+1)}.$$

En particulier,

$$\forall\, \boxed{n \geqslant 2,}\ \forall\, x \in I, \quad \left|f_n'(x)\right| \leqslant \frac{3}{2(n-1)^{3/2} n}$$

ce qui prouve que la série des dérivées $\sum_{n \geqslant 2} f_n'$ converge normalement sur I.

On a ainsi démontré que $S - f_1$ était de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et que

$$\forall\, x \in I, \quad S'(x) - f_1'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n'(x)$$

et donc que

$$\forall\, x \in I, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x).$$

✍ *Il me paraît plus simple de séparer* f_1 *du reste de la série et de produit un argument de convergence normale sur* I *tout entier que de conserver* f_1 *avec les autres termes et de démontrer la convergence normale sur les intervalles de la forme* $[a, +\infty[$ *pour tout* $a > -1$.

Bien entendu, pour penser à traiter f_1 *séparément, il faut avoir remarqué pourquoi la convergence n'était pas normale au voisinage de* -1 *(c'est le genre de questions qu'il est toujours bon de se poser).*

[**3.**] On reprend la même démarche en traitant f_1 à part !

❧ Pour tout $x > -1$,

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(-1) = \frac{1}{\sqrt{n-1} \cdot n}.$$

En sommant ces inégalités (pour $n \geqslant 2$ seulement, pas pour $n \geqslant 1$!), on obtient

$$\forall\, x > -1, \quad 0 \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x) \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1} \cdot n}.$$

Cet encadrement prouve que $S(x) - f_1(x)$ est bornée sur $]-1, +\infty[$ et en particulier que

$$S(x) \underset{x\to -1}{=} f_1(x) + \mathcal{O}(1).$$

✍ *On prouve ainsi que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 2} f_n$ converge normalement sur I et on redémontre à cette occasion que la somme S est continue sur I en tant que somme de f_1, continue sur I, et de la somme de la série $\sum_{n\geqslant 2} f_n$, qui est pour sa part continue sur $[-1, +\infty[$.*

❧ Comme la fonction f_1 tend vers $+\infty$ au voisinage de -1, on en déduit que

$$S(x) \underset{x\to -1}{=} f_1(x) + \mathcal{O}(1) = f_1(x) + o\big[f_1(x)\big]$$

donc que

$$S(x) \underset{x\to -1}{\sim} f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}(x+2)}$$

et enfin que

$$S(x) \underset{x\to -1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1+x}}.$$

❧ Comme la fonction S est continue sur $]-1, 0]$, cet équivalent prouve que S est intégrable sur $]-1, 0]$ (comparaison à $1/\sqrt{u}$ au voisinage de $u = 0^+$).

[**4.**] On a prouvé que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 2} f_n$ convergeait normalement sur I et donc en particulier au voisinage de $+\infty$.

Comme f_n tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ pour tout $n \geqslant 2$, on en déduit que

$$(S - f_1)(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=2}^{+\infty} 0 = 0.$$

Comme f_1 tend également vers 0 au voisinage de $+\infty$, on en déduit finalement que

$$S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

[**5.**] Fixons $x \geqslant 1$ (ce n'est pas une restriction, puisque x tend vers $+\infty$).

La fonction φ définie par

$$\forall\, t \geqslant 0, \quad \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{t+x}\,(t+x+1)}$$

est continue et décroissante sur $[0, +\infty[$.

Pour tout entier $N \geqslant 1$, une comparaison somme–intégrale (**avec figure correctement légendée !**) donne

$$\int_1^N \varphi(t)\, dt \leqslant \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \leqslant \int_0^N \varphi(t)\, dt.$$

Or, quels que soient $0 \leqslant a \leqslant N$,

$$\int_a^N \varphi(t)\, dt = \int_{x+a}^{N+x} \frac{du}{\sqrt{u}\,(u+1)}$$

(changement de variable affine $u = t + x$) et donc

$$\int_a^N \varphi(t)\, dt = 2\int_{\sqrt{x+a}}^{\sqrt{N+x}} \frac{dv}{v^2+1} = \Big[2 \operatorname{Arctan} v\Big]_{\sqrt{x+a}}^{\sqrt{N+x}}$$

(changement de variable $v = \sqrt{u}$).

On en déduit que

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty} \int_a^N \varphi(t)\, dt &= 2\big[\pi/2 - \operatorname{Arctan} \sqrt{x+a}\big] \\ &= 2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{x+a}}\end{aligned}$$

et donc que
$$2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{\sqrt{x+1}} \leqslant S(x) \leqslant 2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{\sqrt{x}}$$
pour tout $x \geqslant 1$.

Finalement,
$$S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{\sqrt{x}} \sim \frac{2}{\sqrt{x}}$$
ce qui redémontre que S tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et prouve que S n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$.

✍ *Cette dernière remarque sert à justifier le calcul de l'équivalent — car à quoi peut bien servir un équivalent au voisinage de $+\infty$ à moins qu'on n'étudie l'intégrabilité ?*

Soit $a \in \mathbb{R}$. L'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x^a \ln(x + e^{ax})\,dx$$

est-elle convergente ?

La fonction f définie par

$$\forall\, x > 0, \quad f(x) = x^a \ln(x + e^{ax})$$

est évidemment continue sur $]0, +\infty[$ et si $a \geqslant 0$, elle est même définie et continue sur $[0, 1[$.

❧ Si $a = 0$, alors $f(x) = \ln(1 + x)$ et il est clair que f n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$ (elle tend vers $+\infty$).

❧ Si $a > 0$, alors

$$\begin{aligned}\ln(e^{ax} + x) &= ax + \ln(1 + xe^{-ax}) \\ &= ax + xe^{-ax} + o(xe^{-ax}) \\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} ax\end{aligned}$$

donc $f(x) \sim ax^{a+1}$ et f n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$.

❧ Si $a < 0$, alors

$$\begin{aligned}\ln(x + e^{ax}) &= \ln x + \ln\Big(1 + \frac{e^{ax}}{x}\Big) \\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x\end{aligned}$$

et donc $f(x) \sim x^a \ln x$ au voisinage de $+\infty$. Par conséquent, f est intégrable au voisinage de $+\infty$ si, et seulement si, $a < -1$.

❧ On considère $a < -1$. Pour $x \to 0$, on a aussi

$$\begin{aligned}\ln(x + e^{ax}) &= \ln\big(1 + (a+1)x + \mathcal{O}(x^2)\big) \\ &\underset{x\to 0}{\sim} (a+1)x\end{aligned}$$

(puisque $(a + 1) \neq 1$) et donc

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} (a+1)x^{a+1}.$$

Donc, sous la condition $a < -1$, la fonction f est intégrable au voisinage de 0 si, et seulement si, $a + 1 > -1$, c'est-à-dire $a > -2$.

❧ Conclusion : la fonction f est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $-2 < a < -1$.

Soient I*, un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* u*, une application de classe* $\mathscr{C}^k$ *(avec* $k \in \mathbb{N}^*$*) de* I *dans* $\mathbb{R}$*. Pour toute application* $f \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$*, on pose*

$$L_u(f) = f' + uf.$$

[**1.**] *Démontrer que* L_u *est linéaire. Calculer* $L_u \circ L_u$*.*
[**2.**] *Résoudre l'équation différentielle*

$$y'' + 2xy' + (1 + x^2)y = 0.$$

[**1.**] Il est clair que L_u est linéaire, mais c'est une application de $\mathscr{C}^k$ dans $\mathscr{C}^{k-1}$. Par conséquent, la composée $L_u \circ L_u$ n'est définie que si $k \geqslant 2$.

Pour toute fonction f de classe $\mathscr{C}^k$,

$$\begin{aligned}(L_u \circ L_u)(f) &= L_u(f' + u \cdot f)\\ &= (f' + u \cdot f)' + u \cdot (f' + u \cdot f)\\ &= f'' + 2u \cdot f + (u' + u^2) \cdot f.\end{aligned}$$

[**2.**] Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 2xy' + (1 + x^2)y = 0$$

revient à résoudre l'équation

$$L_u \circ L_u(f) = 0$$

avec $u(x) = x$.

❧ Une fonction g appartient au noyau de L_u si, et seulement si, elle est solution de l'équation différentielle du premier ordre :

$$y' + xy = 0$$

c'est-à-dire s'il existe une constante réelle A telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = A.e^{-x^2/2}.$$

❧ Une fonction f appartient donc au noyau de $L_u \circ L_u$ si, et seulement si, il existe une constante réelle A telle que f soit solution de

$$y' + xy = A.e^{-x^2/2}.$$

En résolvant cette équation par variation de la constante, on constate que

$$(L_u \circ L_u)(f) = 0$$

si, et seulement si, il existe deux constantes réelles A et B telles que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (A + Bx)e^{-x^2/2}.$$

Soit X, une variable aléatoire admettant un moment d'ordre deux.
[**1.**] *Trouver un réel x pour lequel l'expression $\mathbf{E}\big[(X-x)^2\big]$ est minimale.*
[**2.**] *Soient $a<b$, deux réels. On suppose que*

$$\mathbf{P}(X \in [a,b]) = 1.$$

Démontrer que

$$\mathbf{V}(X) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}.$$

[**1.**] Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \mathbf{E}\big[(X-x)^2\big] = x^2 - 2x\,\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(X^2).$$

Il s'agit d'un trinôme du second degré dont le coefficient dominant est strictement positif. Il atteint donc son minimum pour

$$x = \frac{-[-2\,\mathbf{E}(X)]}{2\times 1} = \mathbf{E}(X)$$

et ce minimum est égal à

$$\mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \mathbf{V}(X).$$

[**2.**] Comme $a \leqslant X(\omega) \leqslant b$ pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$\forall\,\omega \in \Omega, \quad \Big(X(\omega) - \frac{a+b}{2}\Big)^2 \leqslant \Big(\frac{b-a}{2}\Big)^2$$

et d'après la question précédente

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) &= \min_{x\in\mathbb{R}} \varphi(x)\\ &\leqslant \varphi\Big(\frac{a+b}{2}\Big) = \mathbf{E}\Big[\Big(X(\omega) - \frac{a+b}{2}\Big)^2\Big]\\ &\leqslant \Big(\frac{b-a}{2}\Big)^2.\end{aligned}$$

> *On note $E_{i,j}$, les matrices de la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.*
> [**1.**] *Calculer $E_{i,j}E_{k,\ell}$ en fonction de i, j, k et ℓ.*
> [**2.**] *Soit f, une forme linéaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que*
>
> $$\forall\, A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(AB) = f(BA).$$
>
> *Démontrer que f est colinéaire à la trace.*
> [**3.**] *Soit g, un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $g(I_n) = I_n$ et que*
>
> $$\forall\, A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad g(AB) = g(BA).$$
>
> *Démontrer que g conserve la trace.*

[**1.**] On note $E_1, \dots, E_n$, les vecteurs colonnes de la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On sait que, pour le produit scalaire canonique, cette base est orthonormée :

$$\forall\, 1 \leqslant j, k \leqslant n, \quad E_j^\top.E_k = \delta_{j,k}.$$

On vérifie facilement que

$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad E_{i,j} = E_i.E_j^\top.$$

Par conséquent,

$$E_{i,j}E_{k,\ell} = E_i.\underbrace{E_j^\top.E_k}_{\in\mathbb{R}}.E_\ell^\top = \delta_{j,k}E_i^\top.E_\ell = \delta_{j,k}E_{i,\ell}.$$

[**2.**] Par hypothèse sur f, quels que soient les indices i, j, k et ℓ,

$$f(E_{i,j}E_{k,\ell}) = f(E_{k,\ell}E_{i,j}).$$

D'après le calcul précédent, et par linéarité de f,

$$\delta_{j,k}f(E_{i,\ell}) = \delta_{i,\ell}f(E_{k,j}).$$

En particulier, avec $j = k$,

$$\forall\, 1 \leqslant i, \ell \leqslant n, \quad f(E_{i,\ell}) = \delta_{i,\ell}f(E_{j,j}).$$

On distingue alors deux cas :
— Si $i \neq \ell$, alors $f(E_{i,\ell}) = 0$;
— Si $i = \ell$, alors $f(E_{i,i}) = f(E_{j,j})$.

Par linéarité de f,

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}f(E_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}f(E_{1,1}).$$

Autrement dit, la forme linéaire f est proportionnelle à la trace :

$$f = f(E_{1,1}) \cdot \mathrm{tr}\,.$$

[**3.**] Par hypothèse sur g, la forme linéaire $f = \mathrm{tr} \circ g$ vérifie bien

$$\forall\, A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(AB) = f(BA).$$

Donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(A) = \alpha \cdot \mathrm{tr}(A).$$

En particulier pour $A = I_n$,

$$f(I_n) = \mathrm{tr}\big[g(I_n)\big] = \mathrm{tr}\, I_n = n \neq 0$$

donc le facteur de proportionnalité α est égal à 1. On a bien démontré que

$$\forall\, A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{tr}\big(g(A)\big) = \mathrm{tr}\, A$$

c'est-à-dire que g conserve la trace.

rms130-1246

On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2+1}.$$

[**1.**] *Déterminer l'ensemble de définition de* f.
[**2.**] *Étudier la continuité de* f.
[**3.**] *Démontrer que* f *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $]0, +\infty[$.
[**4.**] *Démontrer que* f *tend vers une limite finie* ℓ *au voisinage de* $+\infty$, *puis déterminer un équivalent de* $f(x) - \ell$ *lorsque* x *tend vers* $+\infty$.
[**5.**] *Étudier les variations de* f.

[**1.**] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2+1}.$$

❧ Pour $x < 0$, le terme général $u_n(x)$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (divergence grossière de la série).

Pour $x \geqslant 0$, on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant u_n(0)$$

et comme

$$u_n(0) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

et que la série $\sum 1/n^2$ est convergente, la série $\sum u_n(x)$ converge si, et seulement si, $x \in \mathbb{R}_+$.

La somme f de la série de fonctions est donc définie sur $[0, +\infty[$.

[**2.**] Chaque fonction u_n est évidemment continue sur $\mathbb{R}_+$. On a vu à la question précédente que la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait normalement sur $\mathbb{R}_+$, donc la somme f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

[**3.**] Chaque fonction u_n est clairement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I =]0, +\infty[$ et

$$\forall\, k \geqslant 1,\ \forall\, x > 0, \quad u_n^{(k)}(x) = \frac{(-n)^k}{n^2+1} e^{-nx}.$$

Par conséquent, pour tout $a > 0$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [a, +\infty[, \quad \left|u_n^{(k)}(x)\right| \leqslant n^{k-2} e^{-na}.$$

On a trouvé un majorant indépendant de x et comme $a > 0$,

$$\frac{(n+1)^{k-2} e^{-(n+1)a}}{n^{k-2} e^{-na}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-a} < 1$$

donc ce majorant est le terme général d'une série convergente (règle de D'Alembert).

On vient donc de démontrer que, pour tout $k \geqslant 1$, la série des dérivées $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

Par conséquent, la somme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a, +\infty[$ et comme cela vaut pour tout $a > 0$, on en déduit que la somme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur

$$]0, +\infty[= \bigcup_{a>0} [a, +\infty[.$$

On sait de plus que

$$\forall\, k \geqslant 1,\ \forall x > 0, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-n)^k}{n^2+1} e^{-nx}.$$

(Le terme en $n = 0$ est constant, donc ses dérivées sont nulles.)

✍ *Et en* 0 *? On sait que* f *est continue sur* $[0, +\infty[$ *et de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $]0, +\infty[$. *De plus, pour tout* $N \geqslant 1$,

$$\forall\, x > 0, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-n}{n^2+1} e^{-nx} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{-n}{n^2+1} e^{-nx}.$$

Comme la série

$$\sum \frac{-n}{n^2+1}$$

est divergente, pour tout $A > 0$*, on peut choisir* $N = N(A) \in \mathbb{N}$ *assez grand pour que*

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{-n}{n^2+1} \leqslant -A-1.$$

Or la somme

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{-n}{n^2+1} e^{-nx}$$

est une expression continue sur $\mathbb{R}$ *en tant que fonction de* x *(puisqu'il n'y a qu'un nombre* FINI *de termes et que chaque terme est continu). En particulier,*

$$\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{N} \frac{-n}{n^2+1} e^{-nx} = \sum_{n=1}^{N} \frac{-n}{n^2+1} < -A$$

donc il existe un réel $\alpha > 0$ *tel que*

$$\forall\, 0 < x \leqslant \alpha, \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{-n}{n^2+1} e^{-nx} \leqslant -A.$$

et par conséquent tel que

$$\forall\, 0 < x \leqslant \alpha, \quad f'(x) \leqslant -A.$$

Cela nous montre que

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty.$$

Comme f *est continue en* 0*, on peut en déduire que le graphe de* f *admet une* ***tangente verticale*** *au point d'abscisse* $x = 0$*.*

[4.] Puisque la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur un voisinage de $+\infty$ et que chaque fonction u_n tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$, le Théorème de la double limite nous assure que la somme f tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$ et que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 1$$

puisque

$$\lim_{x\to+\infty} u_0(x) = 1 \quad \text{et que} \quad \forall\, n \geqslant 1, \quad \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 0.$$

► Pour trouver un équivalent de

$$f(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

lorsque x tend vers $+\infty$, il suffit de détailler la somme :

$$f(x) = 1 + u_1(x) + \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x).$$

Il est clair que

$$\forall\, n \geqslant 2,\ \forall\, x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant \frac{e^{-2x}}{n^2+1}$$

et donc que

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant f(x) - 1 - \frac{e^{-x}}{2} \leqslant e^{-2x} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Cet encadrement nous dit en particulier que

$$f(x) - 1 - \frac{e^{-x}}{2} \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}(e^{-2x})$$

et donc que

$$f(x) - 1 = \frac{e^{-x}}{2} + o(e^{-x}) \sim \frac{e^{-x}}{2}$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

✍ *On peut simplifier considérablement l'étude précédente en remarquant que*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{e^{-nx}}{n^2+1} = \frac{(e^{-x})^n}{n^2+1}.$$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{t^n}{n^2+1}$ *est évidemment égal à* 1*, donc sa somme* g *définie par*

$$g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n^2+1}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $]-1, 1[$.

De plus, la série entière converge pour $t = 1$ *et on peut donc appliquer le Théorème d'Abel (radial) : la somme* g *est en fait continue en* $t = 1$.

Enfin, la série entière diverge grossièrement pour $t > 1$.

Avec $t = e^{-x}$*, on en déduit que* f *est définie si, et seulement si,* $e^{-x}\,]-1, 1]$*, c'est-à-dire si* $x \in \mathbb{R}_+$ *; que* f *est continue sur* $\mathbb{R}_+$ *et de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *(par composition).*

❧ *Par ailleurs, lorsque* x *tend vers* $+\infty$*, la variable* $t = e^{-x}$ *tend vers* 0*. On sait que* g *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *au voisinage de* 0 *et que*

$$g(t) \underset{t \to 0}{=} 1 + t + o(t)$$

(développement de Taylor). Par conséquent,

$$f(x) = g(e^{-x}) \underset{x \to +\infty}{=} 1 + e^{-x} + o(e^{-x}).$$

❧ *On pourrait aller plus loin : comme les coefficients de la série entière sont tous positifs, on peut appliquer le cours de calcul des probabilités sur les séries génératrices. Comme la série* $\sum \frac{n}{n^2+1}$ *est divergente, la fonction* g *n'est pas dérivable en* $t = 1$ *(présence d'une tangente verticale). Par composition, on en déduit que* f *est continue mais pas dérivable en* $x = 0$ *(tangente verticale aussi).*

[**5.**] La fonction f est positive (somme d'une série de fonctions positives) et décroissante (somme d'une série de fonctions décroissantes, ce qui est confirmé par le fait que la dérivée est la somme d'une série de fonctions négatives).

De plus, la fonction f est convexe sur $]0, +\infty[$, puisqu'elle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et que sa dérivée seconde est la somme d'une série de fonctions positives.

Comme f est continue sur $[0, +\infty[$, elle est donc en fait convexe sur $[0, +\infty[$ tout entier (par densité).

On a toutes les informations nécessaires pour tracer le graphe de f de manière assez précise...

Résoudre le système différentiel suivant.

$$\begin{cases} x' = & y - z \\ y' = & 2x + y + z \\ z' = & -2x - y - z \end{cases}$$

MÉTHODE PHYSICIENNE.—

❧ On remarque l'existence d'une intégrale première simple : comme

$$(y' + z') = 0$$

alors la fonction $y + z$ est constante :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y(t) + z(t) = y_0 + z_0.$$

❧ On en déduit que

$$x'' = y' - z' = 4x + 2(y_0 + z_0).$$

Par conséquent, il existe deux constantes réelles A et B telles que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = A\operatorname{ch} 2t + B\operatorname{sh} 2t - \frac{y_0 + z_0}{2}.$$

❧ On en déduit alors que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = [A\operatorname{sh} 2t + B\operatorname{ch} 2t - (y_0 + z_0)t] + [(y_0 + z_0)t] + C_y$$

(en intégrant la seconde équation différentielle, connaissant $x(t)$ et la somme $y(t) + z(t)$) et aussi que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = [-A\operatorname{sh} 2t - B\operatorname{ch} 2t + (y_0 + z_0)t] - [(y_0 + t_0)t] + C_z.$$

Finalement, les fonctions x, y et z s'expriment

$$\begin{aligned} x(t) &= A\operatorname{ch} 2t + B\operatorname{sh} 2t - \frac{y_0 + z_0}{2}, \\ y(t) &= A\operatorname{sh} 2t + B\operatorname{ch} 2t + (y_0 - B), \\ z(t) &= -A\operatorname{sh} 2t - B\operatorname{ch} 2t + (z_0 + B). \end{aligned}$$

VERSION MATHÉMATICIENNE.—

La matrice du système différentiel linéaire homogène à coefficients constants est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est $X(X-2)(X+2)$. La matrice M est donc diagonalisable et en posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

on obtient une matrice inversible telle que

$$P^{-1}MP = \operatorname{Diag}(0, 2, -2).$$

Par conséquent, en posant $U_t = P^{-1}X_t$, on est ramené à

$$U_t' = \operatorname{Diag}(0, 2, -2).U_t$$

et il existe trois constantes K_1, K_2 et K_3 telles que

$$U_t = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 e^{2t} \\ K_3 e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$X_u = PU_t = \begin{pmatrix} K_1 + K_2 e^{2t} + K_3 e^{-2t} \\ -K_1 + K_2 e^{2t} - K_3 e^{-2t} \\ -K_1 - K_2 e^{2t} + K_3 e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

On trouve bien les mêmes solutions, sous une forme un peu différente :

$$K_1 = -\frac{y_0 + z_0}{2}, \quad K_2 = \frac{A+B}{2}, \quad K_3 = \frac{A-B}{2}.$$

✍ *On peut vérifier que les intégrales premières du système correspondent aux vecteurs propres de la matrice* $M^\top$.

[**1.**] *Déterminer les racines complexes du polynôme*

$$X^n - 1.$$

[**2.**] *En déduire la factorisation de* $1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-1}$ *dans* $\mathbb{C}[X]$.

[**3.**] *En déduire que*

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

[**1.**] Les racines du polynôme $X^n - 1$ sont les racines n-ièmes de l'unité, c'est-à-dire

$$\forall\, 0 \leqslant k < n, \quad \zeta_k = \exp \frac{2ik\pi}{n}.$$

On sait que ces n racines sont deux à deux distinctes et donc de multiplicité 1. Par conséquent,

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \zeta_k).$$

[**2.**] D'après la formule de la somme géométrique,

$$X^n - 1 = (X-1)(1 + X + \cdots + X^{n-1})$$

et d'après la factorisation précédente,

$$\prod_{0 \leqslant k < n} (X - \zeta_k) = (X - \zeta_0)(1 + X + \cdots + X^{n-1})$$

donc, en simplifiant par $(X - \zeta_0)$,

$$\sum_{0 \leqslant k < n} X^k = \prod_{1 \leqslant k < n} (X - \zeta_k).$$

✍ *L'anneau $\mathbb{C}[X]$ des polynômes à coefficients complexes étant intègre, on peut simplifier par n'importe quel polynôme différent du polynôme nul.*

[**3.**] En évaluant l'égalité précédente en 1, on obtient

$$n = \prod_{1 \leqslant k < n} (1 - \zeta_k) = \prod_{k=1}^{n-1} (e^{i0} - e^{ik\theta})$$

en posant $\theta = {}^{2\pi}\!/_{n}$. On factorise par l'angle moitié :

$$\begin{aligned} n &= \prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\theta/2} \Big(-2i \sin \frac{k\theta}{2} \Big) \\ &= (-2i)^{n-1} \exp\Big(i\pi \, \frac{1 + \cdots + (n-1)}{n} \Big) \prod_{1 \leqslant k < n} \sin \frac{k\pi}{n} \\ &= (-2i)^{n-1} \exp\Big(\frac{i(n-1)\pi}{2} \Big) \prod_{1 \leqslant k < n} \sin \frac{k\pi}{n} \\ &= (-2i)^{n-1} i^{n-1} \prod_{1 \leqslant k < n} \sin \frac{k\pi}{n} = 2^{n-1} \prod_{1 \leqslant k < n} \sin \frac{k\pi}{n}. \end{aligned}$$

Pour $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, *on pose*

$$M(a,b,c) = aI_3 + bJ + cJ^2$$

avec

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[**1.**] *Démontrer que les matrices* $M(a,b,c)$ *commutent entre elles.*
[**2.**] *Démontrer que* J *est diagonalisable dans* $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$*. Préciser ses éléments propres.*
[**3.**] *Soit* $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$*. Démontrer que* $M(a,b,c)$ *est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.*

[**1.**] Comme la sous-algèbre $\mathbb{C}[J]$ de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ est commutative, les matrices $M(a,b,c)$ (qui sont toutes des polynômes en J) commutent entre elles.

✍ *Comme* $J^3 = I_3$*, alors* $\mathbb{C}[J] = \mathrm{Vect}(I_3, J, J^2)$*. Mais cela ne sert à rien pour répondre à la question !*

[**2.**] Comme $J^3 = I_3$ et que le polynôme annulateur

$$X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$$

est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, la matrice J est diagonalisable.

❧ Considérons une valeur propre λ de J et une colonne propre

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

associée à cette valeur propre. On a alors

$$JX = \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

donc

$$b = \lambda a \quad \text{et} \quad c = \lambda b = \lambda^2 a.$$

✍ *On a aussi* $a = \lambda^3 a$ *sur la troisième ligne, mais comme* λ *est une racine cubique de l'unité, c'est sans importance !*

❧ Comme $j^4 = j$, les colonnes

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de J associés respectivement aux valeurs propres 1, j et j^2.

❧ Comme $J \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ admet trois valeurs propres distinctes, ce sont des valeurs propres simples et les sous-espaces propres sont donc des droites.

Par conséquent,

$$\mathrm{Ker}(J - I_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Ker}(J - jI_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Ker}(J - j^2 I_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}.$$

[**3.**] D'après la question précédente, en posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix},$$

la matrice P est inversible et

$$P^{-1}JP = \mathrm{Diag}(1, j, j^2).$$

On en déduit que

$$P^{-1}J^2P = \mathrm{Diag}(1, j^2, j)$$

et donc que

$$P^{-1}M(a, b, c)P = \mathrm{Diag}(a + b + c, a + bj + cj^2, a + bj^2 + cj).$$

Autrement dit, la base de vecteurs propres qu'on a trouvée pour J est une base de vecteurs propres pour chacune des matrices $M(a, b, c)$ et

$$\mathrm{Sp}\big(M(a, b, c)\big) = \big\{a + b + c,\ a + bj + cj^2,\ a + bj^2 + cj\big\}.$$

✍ *La même démarche peut s'appliquer en dimension n, avec les racines n-ièmes de l'unité (et toujours une matrice de Vandermonde en guise de matrice de passage vers une base de vecteurs propres).*

[**1.**] *Donner un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les matrices sont diagonalisables.*
[**2.**] *Donner un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont aucune matrice non nulle n'est diagonalisable.*
[**3.**] *Déterminer la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les matrices dont diagonalisables.*

[**1.**] D'après le Théorème spectral, toutes les matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont diagonalisables. Il existe donc un sous-espace de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n(n+1)/2$ dont toutes les matrices sont diagonalisables.
[**2.**] Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux. Ainsi, le spectre d'une matrice triangulaire *stricte* est réduit à $\{0\}$ (tous les coefficients diagonaux sont nuls). Si une telle matrice est diagonalisable, alors elle est semblable à la matrice nulle (= la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont nuls) et donc *égale* à la matrice nulle.

✍ *Pour mémoire :* $A = P0_nP^{-1} = 0_n$.

L'ensemble U^+ des matrices triangulaires supérieures strictes est un espace vectoriel de dimension $n(n-1)/2$ et la seule matrice diagonalisable de ce sous-espace est la matrice nulle.
[**3.**] Soit V, un sous-espace de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les matrices sont diagonalisables. D'après la question précédente, l'intersection $V \cap U^+$ est réduite à la matrice nulle : $V \cap U^+ = \{0_n\}$, ce qui prouve que ces deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe. On en déduit que

$$\dim V + \dim U^+ \leqslant \dim \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$$

et donc que

$$\dim V \leqslant \frac{n(n+1)}{2} = \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

Ainsi, le sous-espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est maximal parmi les sous-espaces de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les matrices sont diagonalisables.

✍ ***Précision à titre culturel***

*Dans un ensemble ordonné $(E, \prec)$, un élément a est dit **maximal** lorsqu'il n'existe aucun élément strictement supérieur à lui :*

$$\forall\, x \in E, \qquad a \prec x \implies x = a.$$

*Si $\prec$ est une relation d'ordre total (comme $\leqslant$), la notion d'*élément maximal *coïncide avec celle de* plus grand élément.

En revanche, pour une relation d'ordre partiel (comme $\subset$ ou $|$), ces notions diffèrent. Notamment, il peut exister plusieurs éléments maximaux alors qu'il existe au plus un plus grand élément (et s'il existe un plus grand élément, alors c'est le seul élément maximal).

Exemple : si $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ est ordonné par $|$, alors les éléments maximaux de E sont $6, 7, 8, 9$ et 10.

Variante : si E est l'ensemble des entiers naturels supérieurs à 2 (pour $\leqslant$), alors les éléments minimaux de E pour $|$ sont les entiers premiers (pas de diviseur strict dans E) et l'ensemble E n'a pas de plus petit élément.

En revanche, si $E = \mathbb{N}^*$ est ordonné par $|$, l'entier 1 est le seul élément minimal — et c'est donc le plus petit élément de E.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$, *une famille de vecteurs unitaires d'un espace euclidien* E. *On suppose que*

$$\forall\, x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle\, x \,|\, e_i \,\rangle^2.$$

[**1.**] *Démontrer que* $(e_1, \dots, e_n)$ *est une famille orthogonale de* E.
[**2.**] *Soit* $x \in \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_n)^{\perp}$. *Démontrer que* $x = 0_E$.
[**3.**] *Démontrer que* $(e_1, \dots, e_n)$ *est une base orthonormée de* E.

[**1.**] Prenons $x = e_j$: comme e_j est unitaire,

$$1 = \|e_j\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle\, e_j \,|\, e_i \,\rangle^2 = \|e_j\|^4 + \sum_{i \neq j} \langle\, e_j \,|\, e_i \,\rangle^2$$

et donc

$$\sum_{i \neq j} \langle\, e_j \,|\, e_i \,\rangle^2 = 0.$$

Une somme de réels positifs est nulle si, et seulement si, chaque terme est nul, donc

$$\forall\, i \neq j, \quad \langle\, e_j \,|\, e_i \,\rangle = 0.$$

La famille $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est donc orthogonale.
[**2.**] Si x est orthogonal au sous-espace $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, alors en particulier

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \langle\, x \,|\, e_i \,\rangle = 0$$

et donc

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle\, x \,|\, e_i \,\rangle^2 = 0.$$

Par conséquent $x = 0_E$.
[**3.**] On sait maintenant que $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille orthonormée, et donc libre.
Notons $F = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. Comme E est un espace euclidien, on sait que

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$$

et on a démontré que $F^{\perp} = \{0_E\}$. Par conséquent, $E = F$, ce qui prouve que la famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est aussi une famille génératrice de E.
Finalement, la famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de E.

✍ *On a démontré en particulier que* $\dim E = n$.

> *La matrice de Gram relative à la base canonique de* $E = \mathbb{R}_n[X]$ *du produit scalaire défini par*
> $$\forall\, P, Q \in E, \quad (\, P \mid Q\,) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$$
> *est la matrice*
> $$H = \Big(\frac{1}{i+j+1}\Big)_{0\leqslant i,j\leqslant n}.$$
> *Cette matrice* H *est diagonalisable.*
> *Pour* $U \in \mathfrak{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$*, le scalaire* $U^\top.H.U$ *peut s'exprimer comme l'intégrale d'une fonction positive, donc les valeurs propres de* H *sont strictement positives.*

✍ *On ne vérifie pas qu'il s'agit bien d'un produit scalaire, mais il faut savoir le faire sans hésiter.*

❧ Pour $0 \leqslant i, j \leqslant n$,
$$(\, X^i \mid X^j\,) = \int_0^1 t^{i+j}\,dt = \frac{1}{i+j+1}.$$

❧ Comme toutes les matrices de Gram, la matrice H est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable.

❧ Soit $U \in \mathfrak{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, la colonne canoniquement associée à $(a_0, \dots, a_n)$. Alors
$$\begin{aligned} U^\top.H.U &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i H_{i,j} a_j \\ &= \Big(\, \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \,\Big|\, \sum_{j=0}^{n} a_j X^j \,\Big) \\ &= \Big\| \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \Big\|^2 = \int_0^1 \Big(\sum_{i=0}^{n} a_i t^i \Big)^2 dt. \end{aligned}$$

❧ Par positivité de l'intégrale, on a donc montré que la matrice symétrique H était positive :
$$\forall\, U \in \mathfrak{M}_{n+1,1}(\mathbb{R}), \quad U^\top.H.U \geqslant 0.$$
De plus, si $U^\top.H.U = 0$, alors
$$\Big\| \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \Big\|^2 = 0$$
donc le polynôme
$$\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$$
est le polynôme nul et par conséquent
$$\forall\, 0 \leqslant i \leqslant n, \quad a_i = 0$$
c'est-à-dire $U = 0$. Donc $H \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et d'après la caractérisation spectrale des matrices définies positives, ses valeurs propres sont toutes strictement positives.

Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$*, on pose*

$$\|A\| = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

On admet que $\|\cdot\|$ *est une norme sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *et on pose*

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|.$$

[**1.**] *Soient* $\theta \in \mathbb{R}$ *et*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}.$$

Calculer $\|A\|$ *et* $\rho(A)$*.*
[**2.**] *Démontrer que*

$$\forall\, A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \qquad \|AB\| \leqslant \|A\|.\|B\|.$$

[**3.**] *Soit* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$*. Démontrer que* $\rho(A) \leqslant \|A\|$*.*
[**4.**] *Soit* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$*. Démontrer que*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \rho(A^k) = \rho(A)^k.$$

[**5.**] *Soit* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$*. On suppose que* A *est diagonalisable. Démontrer que la suite* $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ *converge vers la matrice nulle si, et seulement si,* $\rho(A) < 1$*.*

✍ *Bien entendu, on doit savoir justifier sans hésitation que* $\|\cdot\|$ *est bien une norme sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *!*
*Le **rayon spectral*** $\rho(A)$ *est bien défini : comme* A *est une matrice à coefficients* complexes, *son spectre n'est pas vide et par conséquent*

$$\rho(A) = \max\big\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\big\}$$

a bien un sens.

[**1.**] Comme A est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, donc

$$\rho(A) = \max\{1, |e^{i\theta}|\} = 1.$$

D'autre part,

$$\|A\| = \max\{1+0,\ |1+i| + |e^{i\theta}|\} = \sqrt{2} + 1.$$

[**2.**] D'après la formule du produit matriciel, si $AB = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, alors

$$\forall\, 1 \leqslant i,j \leqslant n, \qquad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

et donc

$$\begin{aligned} \forall\, 1 \leqslant j \leqslant n, \quad \sum_{i=1}^{n} |c_{i,j}| &= \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k} b_{k,j}| \end{aligned}$$

par inégalité triangulaire.
Les indices i et k variant indépendamment l'un de l'autre, on peut permuter les deux opérateurs de sommation.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k} b_{k,j}| = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,k}| \right) |b_{k,j}|$$

✍ *C'est le moment de se rappeler que le maximum (ou la borne supérieure) est en particulier un majorant.*

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad \sum_{i=1}^{n} |a_{i,k}| \leqslant \|A\|$$
$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n, \qquad \sum_{k=1}^{n} |b_{k,j}| \leqslant \|B\|$$

On en déduit que

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n, \qquad \sum_{i=1}^{n} |c_{i,j}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|A\|\,|b_{k,j}| \leqslant \|A\|\,\|B\|$$

et donc que

$$\forall\, A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \qquad \|AB\| \leqslant \|A\|.\|B\|.$$

✍ *Cette norme est donc **sous-multiplicative**.*
*Comme $\|I_n\| = 1$, il s'agit ici d'une **norme d'algèbre** — concept qui n'est pas au programme...*

[**3.**] Soient λ, une valeur propre de A et $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, un vecteur propre de A associé à λ. On pose alors

$$B = \begin{pmatrix} X & X & \cdots & X \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$$

et (règle du produit matriciel par blocs)

$$AB = \lambda \cdot B.$$

Par conséquent,

$$|\lambda|\,\|B\| = \|\lambda \cdot B\| = \|AB\| \leqslant \|A\|.\|B\|.$$

Comme $\|B\| > 0$ (puisque B n'est pas la matrice nulle), on en déduit que

$$\forall\, \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \qquad |\lambda| \leqslant \|A\|$$

et donc, en passant au maximum, que

$$\rho(A) \leqslant \|A\|.$$

✍ *Cette inégalité est cohérente avec le cas particulier étudié à la première question.*

[**4.**] Comme toute matrice à coefficients complexes, la matrice A est trigonalisable : elle est semblable à

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et la matrice A^k est donc semblable à

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^k & \star & \cdots & \star \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

En particulier,

$$\mathrm{Sp}(A^k) = \{\lambda^k,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$$

et donc

$$\rho(A^k) = \max\{|\lambda^k|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\} = [\rho(A)]^k.$$

[**5.**] Il existe une matrice inversible Q telle que

$$Q^{-1}AQ = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

et donc
$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \qquad Q^{-1}A^kQ = \mathrm{Diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k).$$

❧ Si $\rho(A) < 1$, alors λ_i^k tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$ (quel que soit l'indice $1 \leqslant i \leqslant n$). Donc $Q^{-1}A^kQ$ tend vers la matrice nulle (pour la norme produit sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et *donc* pour toute norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$). L'application
$$\big[M \mapsto QMQ^{-1}\big]$$
est continue sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ (en tant qu'application linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie), donc A^k tend vers $Q0_nQ^{-1} = 0_n$ lorsque k tend vers $+\infty$ (Théorème de composition de limites).

❧ Réciproquement, si A^k tend vers la matrice nulle lorsque k tend vers $+\infty$, alors $Q^{-1}A^kQ$ tend vers la matrice nulle (Théorème de composition de limites, bis !) et donc (définition de la convergence !)
$$\lim_{k\to+\infty} \|Q^{-1}A^kQ\| = 0.$$
Mais, par définition de $\|\cdot\|$,
$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \qquad \|Q^{-1}A^kQ\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda_i^k| = [\rho(A)]^k.$$
La raison d'une suite géométrique de limite nulle est strictement inférieure à 1 (en valeur absolue), donc $\rho(A) < 1$.