

---

## VENDREDI 29 MAI

---

Certains énoncés ont été transmis par des candidats aux concours en 2025 - merci à eux.

Autant que possible, j'ai veillé à établir des énoncés mathématiquement corrects, faites-moi signe si vous rencontrez des points litigieux.

---

### Modules utilisés

---

136-py-48	<code>numpy, scipy.integrate</code>
136-py-45	<code>matplotlib.pyplot</code>
Centrale25-I01	<code>numpy, scipy.integrate, matplotlib.pyplot</code>
Centrale25-I05	<code>numpy, numpy.random, matplotlib.pyplot</code>

---

On considère ici les intégrales

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt \quad \text{et} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad I_m = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2m+1} t}{t} dt.$$

- [ 1. ] Déterminer une valeur approchée de l'intégrale  $J$  à l'aide de Python.
- [ 2. ] Calculer une valeur approchée de  $I_m$  pour différentes valeurs de  $m \in \mathbb{N}$  à l'aide de Python. Que peut-on conjecturer lorsque  $m$  tend vers  $+\infty$  ?
- [ 3.a. ] Démontrer que l'intégrale  $J$  est convergente.
- [ 3.b. ] Au moyen d'une intégration par parties, démontrer que  $J = I_0$ .
- [ 4.a. ] Démontrer que l'intégrale  $I_m$  converge pour tout  $m \in \mathbb{N}$ .
- [ 4.b. ] Démontrer que la suite  $(I_m)_{m \in \mathbb{N}}$  est décroissante et positive.
- [ 4.c. ] Étudier la limite de cette suite.

[ 1. ]

```
def f(t):
    return (np.sin(t)/t)**2

integr.quad(f, 0, np.inf)
```

La valeur approchée renvoyée est 1,5708678849453772 mais l'erreur d'approximation n'est majorée que par 0,0015587759422626135. Il convient donc de se limiter à  $J \approx 1,57$ , ce qui fait inévitablement penser à  $\pi/2$ .

[ 2. ] L'aide-mémoire officiel permet de coder facilement une fonction qui renvoie des valeurs approchées de  $I_m$ .

```
def I(m):
    def f(t):
        return (np.sin(t))**(2*m+1)/t
    return integr.quad(f, 0, np.inf)
```

Pour les basses valeurs de  $m$ , la précision du résultat fourni est douteuse. La situation s'arrange quand  $m$  augmente et devient acceptable lorsque  $m$  est grand.

$m$	Valeur approchée de $I_m$	Estimation de l'erreur	Avertissement
2	1,6038945322719702	0,6129034957144435	oui
3	1,3248005912724021	0,21013705196798793	oui
10	0,42028706142479655	0,2048485658010973	oui
50	0,18799240819666735	0,10201097481351346	oui
100	0,1430154314835025	0,06481619952222575	oui
500	0,03363622679817765	1,3711177634921904e-08	non
1000	0,02378636335431956	4,06028470386619e-09	non

Les premiers résultats sont accompagnés d'un avertissement (IntegrationWarning) : *The integral is probably divergent, or slowly convergent*. Autrement dit, Python suggère de **ne pas** se fonder sur les valeurs calculées pour conjecturer la convergence de l'intégrale.

En revanche, pour les grandes valeurs de  $m$ , la précision des calculs est satisfaisante et permet de conjecturer que  $I_m$  devient très petite : pour  $m = 10^4$ , la valeur approchée de l'intégrale est inférieure à l'estimation de l'erreur (qui est de l'ordre de  $10^{-11}$ ).

🔗 Néanmoins, l'exécution de `I(5000)` renvoie une valeur approchée égale à  $-0,005318855451711839$  avec une estimation de l'erreur de l'ordre de  $10^{-8}$ . Et pourtant nous démontrerons plus loin que  $I_m$  est positive pour tout  $m \geq 1$  !

[ 3.a. ] La fonction  $f$  définie par  $f(0) = 1$  et par

$$\forall t > 0, \quad f(t) = \frac{\sin^2 t}{t^2}$$

est continue sur  $\mathbb{R}_+$  ( $y$  compris en  $t = 0$ ) et  $f(t) = \mathcal{O}(1/t^2)$  au voisinage de  $+\infty$ , donc elle est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  et l'intégrale  $J$  est convergente.

[ 3.b. ] Soient  $0 < \varepsilon < A$ . On intègre par parties :

$$\int_{\varepsilon}^A \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \left[ \frac{-\sin^2 t}{t} \right]_{\varepsilon}^A + \int_{\varepsilon}^A \frac{2 \sin t \cos t}{t} dt.$$

Il est clair que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 \varepsilon}{\varepsilon} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{-\sin^2 A}{A} = 0.$$

Par ailleurs, le changement de variable  $u = 2t$  nous donne

$$\int_{\varepsilon}^A \frac{2 \sin t \cos t}{t} dt = \int_{\varepsilon}^A \frac{\sin 2t}{t} dt = \int_{2\varepsilon}^{2A} \frac{\sin u}{u} du.$$

Sachant que l'intégrale  $J$  est convergente, on en déduit que l'intégrale  $I_0$  est elle aussi convergente et donc que

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = I_0.$$

[ 4.a. ] Pour  $m = 0$ , le résultat a déjà été établi.

• Pour tout entier  $m \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sin^{2m+1} t = (1 - \cos^2 t)^m \cdot \sin t$$

donc il existe un polynôme  $P_m \in \mathbb{R}[X]$  tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sin^{2m+1} t = P'_m(\cos t) \cdot (-\sin t) \quad \text{et} \quad P_m(1) = 0.$$

• Un tel polynôme  $P_m$  doit vérifier  $P'_m = -(1 - X^2)^m$ . Il est donc déterminé à une constante additive près et la condition  $P_m(1) = 0$  impose la valeur de cette constante. Cela prouve l'existence, mais aussi l'unicité, d'un tel polynôme  $P_m$ .

Il est inutile d'expliciter ce polynôme.

Comme  $P_m(1) = 0$  et que  $P'_m(1) = 0$  (puisque  $m \geq 1$ ), il existe un polynôme  $Q_m$  tel que  $P_m = (X - 1)^2 Q_m$  et de ce fait,

$$P_m(\cos t) = (\cos t - 1)^2 Q_m(\cos t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(t^4).$$

Intégrons par parties : quels que soient  $0 < \varepsilon < A$ ,

$$\int_{\varepsilon}^A \frac{\sin^{2m+1} t}{t} dt = \int_{\varepsilon}^A \frac{P'_m(\cos t) \cdot (-\sin t)}{t} dt = \left[ \frac{P_m(\cos t)}{t} \right]_{\varepsilon}^A + \int_{\varepsilon}^A \frac{P_m(\cos t)}{t^2} dt.$$

Comme  $P_m(\cos t)$  est continue et périodique, cette expression est bornée, donc

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{P_m(\cos A)}{A} = 0.$$

Comme  $P_m(\cos t) = \mathcal{O}(t^4)$  lorsque  $t$  tend vers 0,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P_m(\cos \varepsilon)}{\varepsilon} = 0$$

et la fonction

$$t \mapsto \frac{P_m(\cos t)}{t^2}$$

est prolongeable en une fonction continue sur l'intervalle fermé  $[0, +\infty[$  et  $\mathcal{O}(1/t^2)$  au voisinage de  $+\infty$ , donc intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

[ 4.b. ] Comme l'intégrale  $I_m$  est convergente, on peut appliquer la relation de Chasles pour exprimer  $I_m$  comme la somme d'une série.

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad I_m = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin^{2m+1} t}{t} dt$$

On effectue alors le changement de variable  $u = t - k\pi$ , en prenant en compte les changements de signe de  $\sin t$ .

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad I_m = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^\pi \frac{\sin^{2m+1} u}{k\pi + u} du$$

Il est alors clair que l'intégrale

$$\int_0^\pi \frac{\sin^{2m+1} u}{k\pi + u} du$$

est décroissante en fonction du paramètre  $k$  :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall 0 < u \leq \pi, \quad 0 \leq \frac{\sin^{2m+1} u}{(k+1)\pi + u} \leq \frac{\sin^{2m+1} u}{k\pi + u}$$

qui tend vers 0 lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$  :

$$\forall k \geq 1, \forall 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq \frac{\sin^{2m+1} u}{k\pi + u} \leq \frac{\sin^{2m+1} u}{k} \pi.$$

D'après le Critère spécial des séries alternées, la somme  $I_m$  est du signe du premier terme ( $k = 0$ ), qui est positif. Donc

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad I_m \geq 0.$$

• Pour  $m \in \mathbb{N}$ , on applique le même raisonnement à l'intégrale

$$I_m - I_{m+1} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2m+1} t \cdot \cos^2 t}{t} dt$$

et on en déduit que la suite  $(I_m)$  est décroissante :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad I_m - I_{m+1} \geq 0.$$

• En tant que suite décroissante et positive, la suite  $(I_m)$  est convergente.

[ 4.c. ] On a pu appliquer le Critère spécial des séries alternées, qui nous dit aussi que la valeur absolue de la somme est dominée par la valeur absolue de son premier terme. Donc

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_m \leq \int_0^\pi \frac{\sin^{2m+1} t}{t} dt.$$

Le théorème de convergence dominée prouve que le majorant tend vers 0 lorsque  $m$  tend vers  $+\infty$ , donc la suite  $(I_m)$  tend vers 0.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$H_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 : n = 2p + 3q\},$$

on note  $\sigma(n)$ , le cardinal de  $H_n$  et on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sigma(n)x^n.$$

☞ La fonction  $S$  est la **fonction génératrice** de la suite d'entiers  $(\sigma(n))_{n \in \mathbb{N}}$ .

[ 1. ] Démontrer l'existence de  $\sigma(n)$ . Calculer  $\sigma(0)$ ,  $\sigma(1)$ ,  $\sigma(2)$ . Démontrer que

$$\forall n \geq 3, \quad \sigma(n) \geq 1.$$

[ 2. ] Tracer  $\sigma(n)$  pour  $n \in \llbracket 0, 25 \rrbracket$ .

[ 3. ] Déterminer le rayon de convergence de la série entière de somme  $S$ .

[ 4. ] Démontrer que, pour un intervalle  $I$  à préciser,

$$\forall x \in I, \quad S(x) = \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3}.$$

[ 5. ] Déterminer les nombres complexes  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  et  $f$  tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| < 1 \implies S(z) = \frac{a}{1-z} + \frac{b}{(1-z)^2} + \frac{c}{1+z} + \frac{d}{1-jz} + \frac{f}{1-j^2z}$$

où  $j$  est bien sûr la racine cubique de l'unité de partie imaginaire strictement positive.

[ 6. ] En déduire une expression de  $\sigma(n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

[ 1. ] Si  $(p, q) \in H_n$ , alors  $p$  et  $q$  sont des entiers naturels tels que  $2p \leq n$  et  $3q \leq n$ . Il n'y a donc qu'un nombre fini de couples  $(p, q)$  dans  $H_n$  et cela prouve l'existence de  $\sigma(n)$  en tant qu'entier naturel.

☛ L'ensemble  $H_0$  est réduit à  $(0, 0)$ , donc  $\sigma(0) = 1$ .

L'ensemble  $H_1$  est clairement vide, donc  $\sigma(1) = 0$ .

L'ensemble  $H_2$  est réduit à  $(1, 0)$ , donc  $\sigma(2) = 1$ .

☛ Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ .

Comme les entiers 2 et 3 sont premiers entre eux, il existe un couple  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $2a + 3b = m$ . Comme  $m$  n'est pas nul, les deux entiers  $a$  et  $b$  ne peuvent être tous les deux nuls.

L'entier  $a$  (resp.  $b$ ) est nul si, et seulement si,  $m$  est un multiple de 3 (resp. de 2).

Supposons que  $a > 0$  et que  $b < 0$ . Pour tout entier  $k \in \mathbb{Z}$ , il est clair que

$$2(a - 3k) + 3(b - 2k) = m.$$

La division euclidienne de  $a$  par 3 nous donne un entier  $k$  particulier (= le quotient de la division euclidienne) tel que

$$0 \leq a - 3k < 3 \quad \text{et donc que} \quad 0 \leq 2(a - 3k) \leq 4$$

(inégalité stricte entre nombres entiers). Supposons alors que  $b + 2k < 0$ , c'est-à-dire que  $b + 2k \leq -1$  (inégalité stricte entre entiers à nouveau). On a donc  $3(b + 2k) \leq -3$ . Par conséquent,

$$m = 2(a - 3k) + 3(b - 2k) \leq 4 - 3 = 1.$$

Supposons enfin que  $b > 0$  et que  $a < 0$ . En raisonnant de même, on dispose d'un entier  $k \in \mathbb{Z}$  tel que

$$m = 2(a - 3k) + 3(b + 2k) \quad \text{et} \quad 0 \leq 3(b + 2k) \leq 3.$$

Si  $a - 3k < 0$ , alors  $a - 3k \leq -1$  et  $2(a - 3k) \leq -2$ , d'où  $m \leq 3 - 2 = 1$  à nouveau.

On a ainsi démontré que

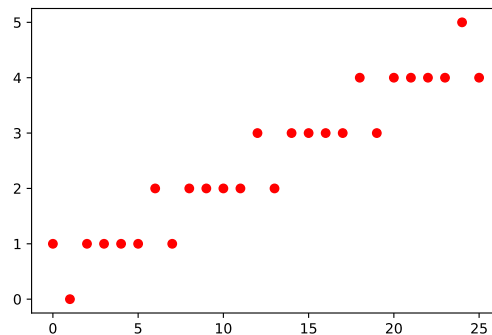
$$\forall m \geq 2, \quad H_m \neq \emptyset.$$

[ 2. ] On sait que l'entier  $q$  varie entre 0 et  $\lceil n/3 \rceil$ . Pour chaque valeur de  $q$ , il existe au plus une valeur de  $p$ . Plus précisément, à  $q$  fixé, il existe un entier  $p$  convenable si, et seulement si,  $n - 3q$  est pair.

```
def sigma(n):
    s, qmax = 0, n//3 + 1
    for q in range(qmax):
        if (n-3*q)%2==0:
            s += 1
    return s
```

Le tracé montre que  $\sigma(n)$  croît à peu près linéairement en  $n$ .

```
N = range(26)
S = [sigma(n) for n in N]
plt.plot(N, S, 'ro')
```



[ 3. ] Comme  $\sigma(n) \geq 1$  pour tout  $n \geq 2$ , alors le rayon de convergence de la série entière  $\sum \sigma(n)x^n$  est inférieur à 1.

↳ Il y a divergence grossière pour  $x \geq 1$ .

D'après la remarque initiale,  $0 \leq 3q \leq n$ , donc il y a au plus  $\lceil n/3 \rceil$  valeurs possibles pour  $q$  et par conséquent,  $\sigma(n) = \mathcal{O}(n)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Donc le rayon de convergence de la série  $\sum \sigma(n)x^n$  est supérieur à 1.

↳ La série entière  $\sum nx^n$  est une série de référence (cf série géométrique), dont le rayon de convergence est égal à 1.

Donc le rayon de convergence de la série entière  $\sum \sigma(n)x^n$  est égal à 1.

[ 4. ] Soit  $0 \leq r < 1$ . La famille  $(r^{2p+3q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$  est une famille de réels positifs et cette famille est sommable d'après le Théorème de Fubini, puisque :

— pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , la sous-famille  $(r^{2p+3q})_{q \in \mathbb{N}}$  est sommable, de somme

$$s_p = \sum_{q=0}^{+\infty} r^{2p+3q} = \frac{r^{2p}}{1-r^3}$$

(suite géométrique de premier terme  $r^{2p}$  et de raison  $0 < r^3 < 1$ );

— la famille des sommes partielles  $(s_p)_{p \in \mathbb{N}}$  est sommable (c'est une suite géométrique de raison  $0 \leq r^2 < 1$ ).

Par conséquent, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , la famille  $(x^{2p+3q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$  est sommable. Il est clair que

$$\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} H_n.$$

On déduit alors du Théorème de Fubini que

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} x^{2p+3q} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{(p,q) \in H_n} x^{2p+3q} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{(p,q) \in H_n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sigma(n)x^n$$

mais aussi (avec une autre partition, naturelle, de  $\mathbb{N}^2$ ) que

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} x^{2p+3q} = \sum_{p=0}^{+\infty} x^{2p} \left( \sum_{q=0}^{+\infty} x^{3q} \right) = \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3}.$$

Par conséquent,

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad S(x) = \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3}.$$

[ 5. ] Allons-y progressivement et cherchons d'abord la décomposition dans  $\mathbb{R}(X)$  :

$$\frac{1}{(1-X^2)(1-X^3)} = \frac{a}{1-X} + \frac{b}{(1-X)^2} + \frac{c}{1+X} + \frac{\Delta X + F}{1+X+X^2}.$$

On détermine directement  $b = 1/6$  et  $c = 1/4$ . En calculant un équivalent au voisinage de l'infini, on obtient l'équation

$$0 = -a + \frac{1}{4} + \Delta \quad \text{c'est-à-dire} \quad a - \Delta = \frac{1}{4}$$

et en calculant un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0, on obtient d'une part

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)} = (1+o(x))(1+o(x)) = 1+o(x)$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \frac{a}{1-x} + \frac{b}{(1-x)^2} + \frac{c}{1+x} + \frac{\Delta x + F}{1+x+x^2} &= a(1+x) + b(1+2x) + c(1-x) + (F+\Delta x)(1-x) + o(x) \\ &= [a+b+c+F] + [a+2b-c+\Delta-F]x + o(x). \end{aligned}$$

En égalant ces deux développements limités, on obtient les équations

$$a + F = 1 - b - c = \frac{7}{12} \quad \text{et} \quad a + \Delta - F = \frac{-1}{12}.$$

En sommant ces trois équations, on obtient  $3a = 3/4$ , donc  $a = 1/4$ . On en déduit que  $\Delta = 0$  et que  $F = 1/3$ . On a donc

$$\frac{1}{(1-X^2)(1-X^3)} = \frac{1}{4(1-X)} + \frac{1}{6(1-X)^2} + \frac{1}{4(1+X)} + \frac{1}{3(1+X+X^2)}.$$

☞ On pourrait procéder différemment, mais ce ne serait pas forcément plus rapide.

On commence bien sûr par factoriser le dénominateur en produit de polynômes deux à deux premiers entre eux :

$$\frac{1}{(1-X^2)(1-X^3)} = \frac{1}{P_0 P_1 P_2}$$

avec  $P_0 = (1-X)^2$ ,  $P_1 = 1+X$  et  $P_2 = 1+X+X^2$ . On sait alors que les polynômes

$$Q_0 = P_1 P_2, \quad Q_1 = P_0 P_2, \quad Q_2 = P_0 P_1$$

sont premiers dans leur ensemble. L'algorithme de Blankinskip nous permet de trouver une solution de l'équation de Bézout :

$$(5-3X)Q_0 + 3Q_1 + 4Q_2 = 12$$

ce qui nous donne, en divisant par  $P_0 P_1 P_2$  :

$$\frac{12}{(1-X^2)(1-X^3)} = \frac{5-3X}{P_0} + \frac{3}{P_1} + \frac{4}{P_2} = \frac{2+3(1-X)}{(1-X)^2} + \frac{3}{1+X} + \frac{4}{1+X+X^2}$$

et on retrouve ainsi

$$\frac{1}{(1-X^2)(1-X^3)} = \frac{1}{4(1-X)} + \frac{1}{6(1-X)^2} + \frac{1}{4(1+X)} + \frac{1}{3(1+X+X^2)}.$$

Les calculs ne sont pas vraiment plus courts (il y a quelques divisions euclidiennes de polynômes à poser), mais ils me paraissent moins pénibles — avis strictement personnel.

```

import numpy as np
from numpy.polynomial import Polynomial
X = Polynomial([0, 1]) # l'indéterminée X
Z = Polynomial([0]) # polynôme nul
U = Polynomial([1]) # polynôme unité

P = [(1-X)**2, 1+X, (1+X+X**2)]

Q = [P[1]*P[2], P[2]*P[0], P[0]*P[1]]

def afficher(A):
    n, p = A.shape
    for i in range(n):
        s = " & ".join([str(A[i,j]) for j in range(p)])
        print(s)
    print()

# Initialisation de l'algorithme de Blankinship
A = np.zeros((3, 4), dtype=np.polynomial.polynomial.Polynomial)
for i in range(3):
    for j in range(3):
        if j!=i:
            A[i,j] = Z
        else:
            A[i,j] = U
    A[i,-1] = Q[i]
afficher(A)

def argmin(L):
    m = min(L)
    return L.index(m)

# Itération
degres = [p.degree() for p in A[:,-1]]
m, j = min(degres), argmin(degres)
# Si un reste est constant, c'est qu'on a atteint le pgcd
while (m>0):
    # Algorithme d'Euclide de calcul du pgcd
    for i in range(3):
        if i!=j:
            q = A[i,-1]//A[j,-1]
            for k in range(4):
                A[i,k] = A[i,k] - q*A[j,k]
    afficher(A)
    degres = [p.degree() for p in A[:,-1]]
    m, j = min(degres), argmin(degres)

```

• Il reste à décomposer dans  $\mathbb{C}(X)$  le dernier terme. Les deux pôles sont simples et conjugués ( $j$  et  $\bar{j} = j^2$ ), donc il est souhaitable d'appliquer une méthode spécifique.

On rappelle que, quel que soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ , quel que soit  $Q \in \mathbb{C}[X]$  scindé à racines simples,

$$\frac{P}{Q} = \sum_{\zeta \in Z(Q)} \frac{P(\zeta)}{Q'(\zeta)(X - \zeta)}.$$

Ici,  $P = 1$  et  $Q = 1 + X + X^2$ , donc  $Q' = 2X + 1$ , donc

$$Q'(j) = j + (1 + j) = j - j^2 = j - \bar{j} = 2i \Im(j) = i\sqrt{3}.$$

Comme  $Q' \in \mathbb{R}[X]$ , on en déduit que  $Q'(\bar{j}) = \overline{Q'(j)} = -i\sqrt{3}$  et donc que

$$\frac{1}{1 + X + X^2} = \frac{1}{i\sqrt{3}} \left( \frac{1}{X - j} - \frac{1}{X - j^2} \right) = \frac{i}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{X - j^2} - \frac{1}{X - j} \right) = \frac{i}{\sqrt{3}} \left( \frac{j^2}{1 - j^2 X} - \frac{j}{1 - jX} \right).$$

[ 6. ] On a démontré plus haut que

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad \frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sigma(n)x^n.$$

On déduit de la décomposition en éléments simples qui précède et de la décomposition en série entière de chaque terme que, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)} &= a \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + b \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n + c \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n + d \sum_{n=0}^{+\infty} j^n x^n + f \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{j}^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} [a + (n+1)b + (-1)^n c + 2\Re(dj^n)] x^n. \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière (le rayon de convergence est strictement positif), on en déduit une formule pour  $\sigma(n)$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sigma(n) = \frac{1}{4} + \frac{n+1}{6} + \frac{(-1)^n}{4} - 2\Re\left(\frac{ij^{n+1}}{3\sqrt{3}}\right).$$

✎ *Ce n'est certainement pas la meilleure façon de calculer les entiers  $\sigma(n)$ . On sait que*

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad (1-x^2)(1-x^3) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \sigma(n)x^n \right) = 1.$$

*En développant le premier membre (inutile d'invoquer le produit de Cauchy pour cela), on obtient*

$$\begin{array}{ll} \sigma(0) = 1 & \text{(coefficient constant)} \\ \sigma(1) = 0 & \text{(coefficient de } x) \\ \sigma(2) - \sigma(0) = 0 & \text{(coefficient de } x^2) \\ \sigma(3) - \sigma(0) - \sigma(1) = 0 & \text{(coefficient de } x^3) \\ \sigma(4) - \sigma(1) - \sigma(2) = 0 & \text{(coefficient de } x^4) \\ \sigma(n) - \sigma(n-1) - \sigma(n-2) - \sigma(n-5) = 0 & \text{(coefficient de } x^n \text{ pour } n \geq 5) \end{array}$$

*d'où  $\sigma(0) = 1, \sigma(1) = 0, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 1, \sigma(4) = 1$  et*

$$\forall n \geq 5, \quad \sigma(n) = \sigma(n-2) + \sigma(n-3) - \sigma(n-5).$$

On lance une pièce de monnaie avec probabilité  $p$  d'obtenir Pile. On note  $X_n$ , la variable aléatoire comptant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir  $n$  fois Pile. On notera  $\mathcal{P}(n, p)$ , la loi suivie par  $X_n$ .

[ 1. ] Quelle est la loi  $\mathcal{P}(1, p)$  ?

[ 2.a. ] Écrire un programme simulant les  $X_n$ .

[ 2.b. ] Écrire un programme pour estimer la valeur moyenne de  $X_n$ . Conjecturer la valeur de  $\mathbf{E}(X_n)$ .

[ 2.c. ] Écrire une fonction `fn_repartition(n, p, t)` qui renvoie une valeur approchée de  $\mathbf{P}(X_n \leq t)$ .

[ 3. ] Démontrer que

$$\forall k \geq n, \quad \mathbf{P}(X_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$$

où  $q = 1 - p$ .

[ 4. ] Démontrer que

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \left( \frac{x}{1-x} \right)^n.$$

En déduire que  $\mathbf{P}(X_n = +\infty) = 0$ .

[ 5. ] Démontrer que l'expression de la fonction génératrice de  $X_n$  est

$$G_{X_n}(t) = \left( \frac{pt}{1-qt} \right)^n.$$

En déduire  $\mathbf{E}(X_n)$ .

[ 6. ] On considère  $n$  variables aléatoires indépendantes  $Z_1, \dots, Z_n$  qui suivent toutes la loi géométrique  $\mathcal{G}(p)$ . Démontrer que la variable aléatoire  $Z = Z_1 + \dots + Z_n$  suit la même loi que  $X_n$ .

Calculer alors  $\mathbf{E}(X_n)$  et  $\mathbf{V}(X_n)$ .

[ 7. ] On pose

$$\forall 0 < x < 1, \quad \beta(x, m, n) = \int_0^x t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt \quad \text{et} \quad I(m, n) = \frac{\beta(p, m, n)}{\beta(1, m, n)}.$$

On admet que

$$\beta(1, m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

[ 7.a. ] Pour différentes valeurs de  $n$ , superposer le graphe de  $k \mapsto I(n, k - n + 1)$  et celui de `fn_repartition(n, p, k)` en fonction de  $k$ .

[ 7.b. ] On suppose que  $Y$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(k, p)$ . Démontrer que

$$\forall 1 \leq i < k, \quad \mathbf{P}(Y = i) = I(i, k - i + 1) - I(i + 1, k - i).$$

[ 7.c. ] Démontrer que  $\mathbf{P}(Y \geq n) = I(n, k - n + 1)$ .

[ 1. ] La loi  $\mathcal{P}(1, p)$  est la loi géométrique  $\mathcal{G}(p)$  [question de cours].

[ 2.a. ] On compte le nombre de tentatives jusqu'à ce qu'on obtienne le  $n$ -ième succès.

```
def simul_X(n, p):
    nb_lancers, nb_succes = 0, 0
    while nb_succes < n:
        resultat = rd.binomial(1, p)
        nb_lancers += 1
        nb_succes += resultat
    return nb_lancers
```

[ 2.b. ] On s'appuie sur la Loi des grands nombres : la moyenne empirique tend vers l'espérance.

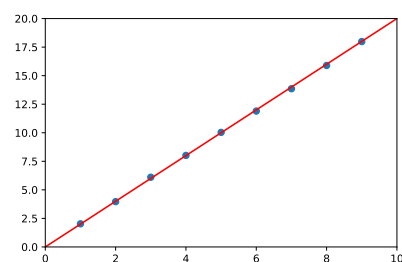
```
def moyenne_X(n, p, N=10000):
    somme = 0
    for i in range(N):
        somme += simul_X(n, p)
    return somme/N
```

• Si on n'a aucune idée de  $\mathbf{E}(X_n)$  (si on n'a pas lu la suite de l'énoncé, par exemple), il est bien difficile de proposer une conjecture.

On fixe  $p$  (en prenant différentes valeurs entre 0 et 1) et on étudie comment la moyenne varie en fonction de  $n$ .

```
Liste_moy = [moyenne_X(n, p) for n in range(1, 10)]
plt.figure()
plt.plot(list(range(1, 10)), Liste_moy, 'o')
```

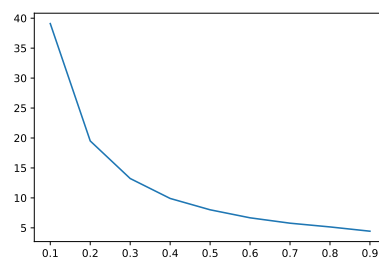
Il semble bien que la moyenne soit proportionnelle à  $n$ .



On fixe  $n$  (en prenant ici aussi différentes valeurs entières) et on étudie cette fois comment la moyenne varie en fonction de  $p$ .

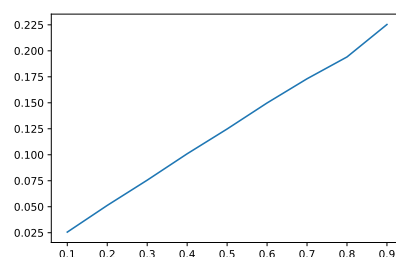
```
P = np.arange(0.1, 1.0, 0.1)
Liste_moy = np.array([moyenne_X(n, p) for p in P])
plt.figure()
plt.plot(P, Liste_moy)
```

La moyenne décroît visiblement en fonction de  $p$ .



Et si on étudiait comment l'inverse de la moyenne varie en fonction de  $p$ ?

```
plt.figure()
plt.plot(P, 1/Liste_moy)
```



C'est clair : l'espérance est inversement proportionnelle à  $p$ .

Et si  $\mathbf{E}(X_n)$  était égale à  $n/p$  ?

[ 2.c. ] On utilise une fois encore la Loi des grands nombres : la probabilité  $\mathbf{P}(X_n \leq t)$  est proche de la proportion de tirages pour lesquels  $X_n$  est inférieur à  $t$  pour peu que le nombre  $N$  de tirages soit "assez grand". On prendra  $N = 100$  par défaut.

On rappelle que : si  $s$  et  $t$  sont deux réels, alors  $s \leq t$  est un booléen et que sommer une liste de booléens, c'est précisément compter le nombre de booléens qui prennent la valeur True.

```
def fn_repartition(n, p, t, N=100):
    echantillon = [simul_X(n, p) for i in range(N)]
    nb_succes = sum([s <= t for s in echantillon])
    return nb_succes/N
```

[ 3. ] On observe le  $n$ -ième succès lors du  $k$ -ième lancer : il faut répartir  $(n - 1)$  succès (et donc  $(k - n)$  échecs) lorsque des  $(k - 1)$  premiers lancers, le  $k$ -ième lancer étant, par hypothèse, un succès.

[ 4. ] Pour  $n = 1$ , c'est la somme géométrique qui commence avec  $k = 1$  :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \quad \text{avec} \quad a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \geq 1, \quad a_k = 1.$$

Le rayon de convergence de cette série entière est égal à 1, on peut donc appliquer le Théorème sur le produit de Cauchy de manière répétée.

On suppose (HR) que, pour un entier  $n \geq 1$ ,

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \left(\frac{x}{1-x}\right)^n$$

et on pose

$$\forall 0 \leq k < n, \quad b_k = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \geq n, \quad b_k = \binom{k-1}{n-1} x^k.$$

On sait alors que

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{n+1} \quad \text{avec} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad c_k = \sum_{i=0}^k b_i a_{k-i} = \sum_{i=n}^{k-1} b_i$$

puisque  $a_0 = 0$  et  $b_i = 0$  pour  $i < n$ . On en déduit que  $c_k = 0$  pour  $k - 1 \leq n$ , c'est-à-dire pour  $k \leq n + 1$  et que

$$\forall k \geq n + 1, \quad c_k = \sum_{i=n}^{k-1} \binom{i-1}{n-1} = \binom{k-1}{n}$$

en vertu d'une formule combinatoire bien connue (et dotée de nombreux sobriquets).

Le résultat est ainsi vérifié par récurrence.

• Avec  $x = q \in ]0, 1[$ , on en déduit que

$$\mathbf{P}(X_n < +\infty) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbf{P}(X_n = k) = \frac{p^n}{q^n} \cdot \left(\frac{q}{1-q}\right)^n = 1$$

et donc que  $\mathbf{P}(X_n = +\infty) = 0$ .

[ 5. ] Pour  $t \in [0, 1]$ , on prend  $x = qt \in ]0, 1[$  et

$$G_{X_n}(t) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbf{P}(X_n = k) t^k = \frac{p^n}{q^n} \cdot \left(\frac{qt}{1-qt}\right)^n = \left(\frac{pt}{1-qt}\right)^n.$$

Le rayon de convergence de la série génératrice est égal à  $1/q > 1$ , donc  $X_n$  est d'espérance finie et  $\mathbf{E}(X_n) = G'_{X_n}(1)$ .

On trouve bien  $\mathbf{E}(X_n) = n/p$ .

[ 6. ] Comme les variables aléatoires  $Z_1, \dots, Z_n$  sont indépendantes et suivent toutes la loi géométrique  $\mathcal{G}(p)$ ,

$$\mathbf{E}(t^Z) = \mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^n t^{Z_k}\right) = \prod_{k=1}^n \mathbf{E}(t^{Z_k}) = (\mathbf{E}(t^{Z_1}))^n.$$

☞ Les variables aléatoires  $t^{Z_k}$  sont d'espérance finie (elles sont bornées entre 0 et 1) et indépendantes (lemme des coalitions), donc l'espérance de leur produit est égale au produit de leurs espérances.

On a déjà justifié que

$$\forall t \in [0, 1], \quad \mathbf{E}(t^{Z_1}) = \frac{pt}{1-qt}.$$

On en déduit que les variables aléatoires  $X_n$  et  $Z_n$  ont même fonction génératrice. Par conséquent, ces deux variables aléatoires ont même loi.

☞ La loi d'une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  est caractérisée par sa fonction génératrice.

☛ Comme les variables aléatoires  $Z_1, \dots, Z_n$  sont d'espérance finie (égale à  $1/p$ , ce sont des variables aléatoires de loi géométrique), on déduit de la linéarité de l'espérance que

$$\mathbf{E}(X_n) = \mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^n Z_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(Z_k) = n \cdot \frac{1}{p}.$$

☛ Comme les variables aléatoires  $Z_1, \dots, Z_n$  sont de variance finie (égale à  $q/p^2$ ) et qu'elles sont indépendantes, on déduit du Théorème de Pythagore que

$$\mathbf{V}(X_n) = \mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^n Z_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbf{V}(Z_k) = n \cdot \frac{q}{p^2}.$$

☞ On a utilisé le fait que deux variables aléatoires de même loi avaient même espérance et même variance.

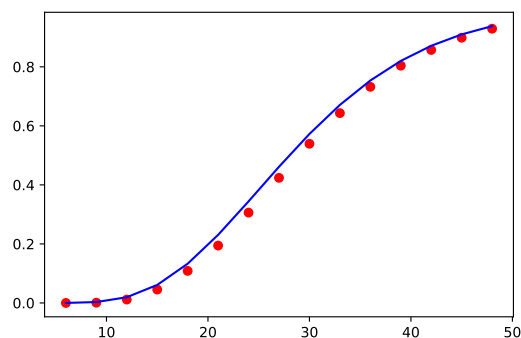
[ 7.a. ] On peut calculer sans trop de fatigue les valeurs de  $I(n, k - n + 1)$ .

```
from scipy.integrate import quad

def beta_incomplete(m, n, p):
    def f(t):
        return t**(m-1)*(1-t)**(n-1)
    return quad(f, 0, p)[0]/quad(f, 0, 1)[0]
```

On superpose les points rouges obtenus avec la fonction `fn_repartition` et la courbe bleue obtenue avec la fonction `beta_incomplete`.

```
K = range(n, 50, 3)
Y = [fn_repartition(n, p, k) for k in K]
Z = [beta_incomplete(n, k-n+1, p) for k in K]
plt.figure()
plt.plot(K, Y, 'ro')
plt.plot(K, Z, 'b')
```



On s'assure en faisant varier les paramètres  $p$  et  $n$  que ces deux courbes coïncident autant qu'il est possible.

[ 7.b. ] Pour  $i = 0$  et  $i = k$ , l'égalité n'a aucun sens car les deux arguments de la fonction  $\beta$  doivent être strictement positifs.

On vérifie sans peine que

$$P(Y = k) = p^k = I(k, 1)$$

et que  $P(Y = 0) = q^k = 1 - I(1, k)$ .

[ 7.c. ] À suivre...

☞ Les événements  $[Y \geq n]$  et  $[X_n \leq k]$  ont même probabilité : le premier signifie qu'on a connu au moins  $n$  succès lors de  $k$  tentatives, le second qu'on a obtenu le  $n$ -ième succès au plus tard lors de la  $k$ -ième tentative.

Autrement dit,

$$\forall k \geq n \geq 1, \quad P(X_n \leq k) = I(n, k - n + 1)$$

ainsi qu'on l'a conjecturé plus haut.

On trouvera une démonstration purement analytique de cette identité dans l'article de CHARTIER, F. et MORICE, E. : *Relations entre quelques lois de probabilités*. Revue de statistique appliquée, 1967, vol. 15, no 4, p. 17-33.

On lance des pièces de monnaie indépendamment les unes des autres. La probabilité d'obtenir Pile en lançant la  $n$ -ième pièce est égale à  $p_n$ .

On note  $X_n$ , le nombre de fois où on a obtenu Pile lors des  $n$  premiers lancers et  $\pi_n$ , la probabilité pour que l'entier  $X_n$  soit pair.

[ 1.a. ] On suppose connue une fonction  $p$  telle que  $p(n)$  renvoie la valeur  $p_n$ . Écrire une fonction `proba(p, n)` qui renvoie une valeur approchée de  $\pi_n$ .

[ 1.b. ] Observer l'évolution de  $\pi_n$  pour  $1 \leq n \leq 100$  en supposant que

$$\forall i \geq 1, \quad p_i = \frac{1}{2(i+1)^2}$$

puis en supposant que

$$\forall i \geq 1, \quad p_i = \frac{1}{2\sqrt{i+1}}.$$

Que remarque-t-on si on modifie la fonction  $p$  pour imposer  $p_{50} = 1/2$  dans chacun des deux exemples précédents ?

[ 1.c. ] On suppose que

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad p_i = \frac{1}{2(i+1)^\alpha}.$$

Observer l'évolution de  $\pi_{100}$  en fonction du paramètre  $\alpha \in [0, 4]$ .

[ 2. ] Pour tout  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = \pi_n - 1/2$ .

[ 2.a. ] Démontrer que

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \frac{1}{2} \prod_{i=1}^n (1 - 2p_i).$$

[ 2.b. ] Que se passe-t-il s'il existe un indice  $i \geq 1$  tel que  $p_i = 1/2$  ?

[ 2.c. ] On suppose que

$$\forall i \geq 1, \quad p_i = \frac{1}{2(i+1)^2}.$$

Démontrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  converge.

[ 3. ] On suppose à présent que  $p_k < 1/2$  pour tout  $k \geq 1$ .

[ 3.a. ] Démontrer que la suite  $(\pi_n)_{n \geq 1}$  converge vers un réel  $\ell \in [1/2, 1]$ .

[ 3.b. ] Démontrer que la série  $\sum p_i$  diverge si, et seulement si,  $\ell = 1/2$ .

↪ Deux autres questions non abordées.

[ 1.a. ] Pour le moment, nous faisons comme si l'expression de  $\pi_n$  était inconnue (cf question 2) et nous allons estimer la probabilité d'un évènement d'après la Loi des grands nombres (méthode de Monte-Carlo).

On effectue  $N$  simulations successives (avec  $N = 10^4$  par défaut).

Pour chacune de ces simulations, on dispose de  $n$  valeurs prises au hasard entre 0 et 1, qu'on compare aux probabilités  $p_i$  pour  $1 \leq i \leq n$ , ce qui revient à simuler un échantillon de  $n$  variables aléatoires indépendantes de lois respectives  $\mathcal{B}(p_i)$ .

On peut alors compter le nombre de Pile et vérifier si ce nombre est, ou non, pair.

Au terme des  $N$  simulations, on renvoie la proportion de simulations pour lesquelles le nombre de Pile était pair.

```
def proba(p, n, N=10000):
    nb_pair = 0
    distri_proba = [p(i+1) for i in range(n)]
    for k in range(N):
        nb_piles = np.sum(rd.random(n) < distri_proba)
        nb_pair += nb_piles % 2 == 0
    return nb_pair / N
```

↪ Le calcul de la liste  $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$  est assez coûteux en temps, il faut effectuer ce calcul une seule fois !

• Si  $A$  et  $B$  sont deux tableaux numpy de même taille qui contiennent des réels, l'instruction  $A < B$  renvoie un tableau de booléens :

$$[A < B] = (a_i < b_i)_{1 \leq i \leq n}.$$

En Python, le booléen `True` est un avatar de l'entier `1` : une somme de booléens est donc en fait le nombre de booléens qui ont la valeur `True`.

• Le choix de  $N = 10^4$  est un peu arbitraire. Avec  $N = 10^3$ , le résultat est obtenu plus rapidement mais les fluctuations d'échantillonnage sont assez sensibles. (Pour ceux qui ne parlent que français, cela signifie qu'en exécutant plusieurs fois de suite la fonction `proba` avec les mêmes paramètres, on obtient des résultats assez différents.)

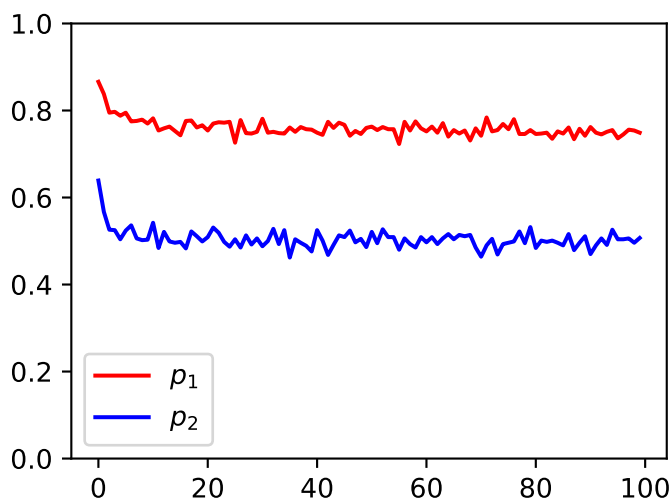
[ 1.b. ] On définit les deux fonctions  $p$  à tester.

```
def p1(n):
    return 1/(2*(n+1)**2)

def p2(n):
    return 1/(2*np.sqrt(n+1))
```

On estime les valeurs de  $\pi_n$  pour  $1 \leq n \leq 100$  et on trace les deux courbes sur une même figure.

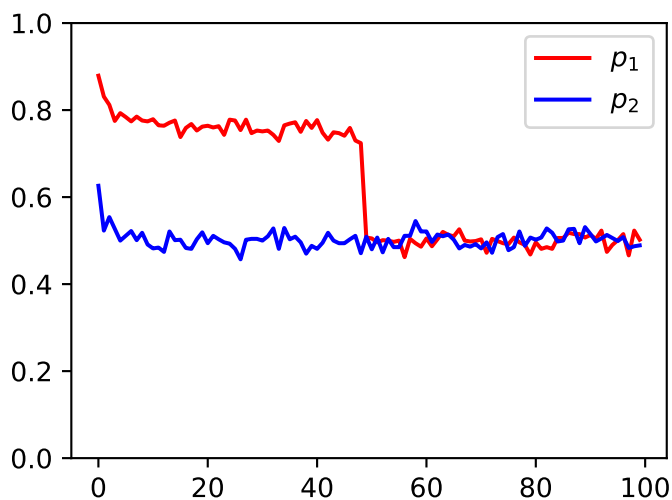
```
Liste_pi_1 = [proba(p1, n+1, 1000) for n in range(100)]
Liste_pi_2 = [proba(p2, n+1, 1000) for n in range(100)]
plt.plot(Liste_pi_1, 'r', label="p_1")
plt.plot(Liste_pi_2, 'b', label="p_2")
plt.ylim(0, 1)
plt.legend()
```



• En imposant  $p_{50} = 1/2$ , on ne change rien dans le second cas alors que le changement est brutal dans le premier cas : à partir de  $n = 50$ , la valeur de  $\pi_n$  est quasiment égale à  $1/2$ .

```
def p1_bis(n):
    if n!=50:
        return 1/(2*(n+1)**2)
    else:
        return .5
```

(On modifie la fonction `p2` de manière analogue.)

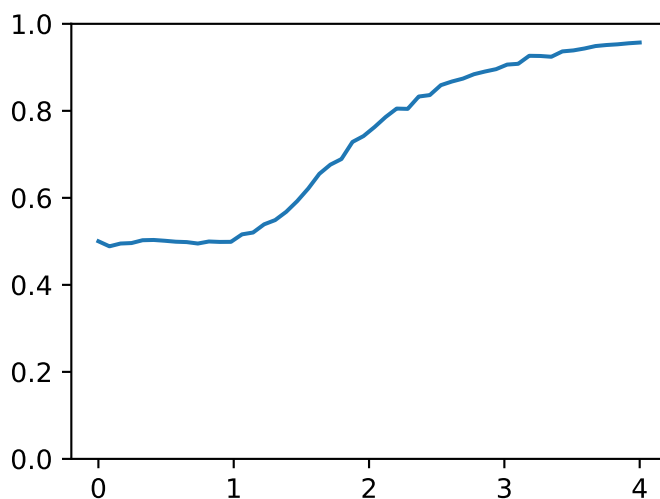


[ 1.c. ] Pour utiliser la fonction `proba`, il faut maintenant définir une fonction du paramètre  $\alpha$  qui renvoie la fonction  $p_\alpha$ .

```
def P(a):
    def p_a(n):
        return 1/(2*(n+1)**a)
    return p_a
```

On trace alors  $\pi_{100}$  en fonction du paramètre  $\alpha \in [0, 4]$ .

```
A = np.linspace(0, 4)
Liste_pi100 = [proba(P(a), 100) for a in A]
plt.plot(A, Liste_pi100)
plt.ylim(0, 1)
```



• Il semblerait que  $\pi_n$  tende vers  $1/2$  pour  $\alpha < 1$  et vers une valeur strictement supérieure à  $1/2$  pour  $\alpha > 1$ . (Il serait téméraire de conjecturer quoi que ce soit pour  $\alpha = 1$ .)

[ 2.a. ] Il est clair que  $\pi_1 = (1 - p_1)$  et donc que  $u_1 = \pi_1 - 1/2 = 1/2 - p_1 = (1 - 2p_1)/2$ .  
En notant  $E_n = [X_n \in 2\mathbb{N}]$ , on déduit de la formule des probabilités totales que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(E_{n+1}) = (1 - p_{n+1}) \mathbf{P}(E_n) + p_{n+1} [1 - \mathbf{P}(E_n)].$$

La formule donnée s'en déduit par récurrence.

- [ **2. b.** ] La probabilité  $\pi_n$  est égale à  $1/2$  pour tout  $n \geq i$ , indépendamment des valeurs des  $p_i$  !
- [ **2. c.** ] Passer au logarithme pour se ramener à l'étude d'une série convergente.
- [ **3. a.** ] La suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est décroissante et positive.
- [ **3. b.** ] Critère de convergence pour les séries dont le terme général est de signe constant.

↳ Revenons à la question 1.c. : la série de terme général (positif!)

$$p_i = \frac{1}{2(i+1)^\alpha}$$

est convergente si, et seulement si,  $\alpha > 1$ . On a ainsi expliqué pourquoi  $\pi_{100} \approx 1/2$  pour  $0 \leq \alpha \leq 1$  et  $\pi_{100} > 1/2$  pour  $1 < \alpha \leq 4$ .