Oraux blancs MPI — 2 juin 2026

rms120-988

> *Soit*
> $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}).$$
> [**1.**] *Démontrer que* A *est diagonalisable et que ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.*
> [**2.**] *Démontrer qu'il existe une matrice* $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ *telle que*
> $$M^5 + M^3 + M = A.$$

[**1.**] En calculant le polynôme caractéristique de A avec soin (= sans appliquer la règle de Sarrus), on trouve que

$$\chi_A = (X-1)(X^2+X-8).$$

Le discriminant de X^2+X-8 est strictement positif et 1 n'est pas racine de ce trinôme. Par conséquent, le polynôme caractéristique possède trois racines réelles distinctes.

Comme $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, on en déduit que A est diagonalisable et que ses trois sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

✍ *Il faut lire l'énoncé et ne pas l'interpréter : on ne demande pas de préciser les valeurs propres de* A *et encore moins de calculer une base de vecteurs propres ! Pas d'efforts inutiles !*

[**2.**] Posons $P_0 = X^5 + X^3 + X$. On cherche ici une matrice $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $P_0(M) = A$.

✍ *Ici aussi, il ne faut pas interpréter l'énoncé : on ne cherche pas toutes les matrices* M *telles que* $P_0(M) = A$ *mais seulement une matrice* M *qui vérifie cette propriété.*

❧ D'après la question précédente, il existe trois réels distincts $\alpha = 1$, β et γ et une matrice inversible $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ tels que

$$Q^{-1}AQ = \operatorname{Diag}(\alpha, \beta, \gamma).$$

❧ Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on sait que

$$P(Q^{-1}MQ) = Q^{-1}\big[P(M)\big]Q$$

et par conséquent :

$$P_0(M) = A \iff P_0(Q^{-1}MQ) = Q^{-1}AQ = \operatorname{Diag}(\alpha, \beta, \gamma).$$

❧ Par ailleurs, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on sait que

$$P\big(\operatorname{Diag}(a, b, c)\big) = \operatorname{Diag}\big(P(a), P(b), P(c)\big).$$

Cela nous incite à chercher une matrice $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$Q^{-1}MQ = \operatorname{Diag}(a, b, c) \quad \text{avec} \quad \big(P_0(a), P_0(b), P_0(c)\big) = (\alpha, \beta, \gamma).$$

❧ L'application polynomiale $[t \mapsto P_0(t)]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $P_0'(t) = 5t^4 + 3t^2 + 1 \geqslant 1 > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc cette application est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, il est clair que $P_0(t)$ tend vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$) lorsque t tend vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$), donc cette application réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et il existe un unique triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\big(P_0(a), P_0(b), P_0(c)\big) = (\alpha, \beta, \gamma).$$

La matrice M définie par

$$M = Q \operatorname{Diag}(a, b, c) Q^{-1}$$

vérifie donc $P_0(M) = A$.

✍ *Et on ne cherchera surtout pas à calculer les coefficients de cette matrice !*

rms120-1036

[**1.**] *Soit* $C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *telle que*

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(C+M) = \det(M).$$

Démontrer que $C = 0_n$.
[**2.**] *Soient* A *et* B *dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *telles que*

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(A+M) = \det(B+M).$$

Démontrer que $A = B$.
[**3.**] *Soient* A *et* B *dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *telles que*

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(A+M) = \det(B+M^\top).$$

Que dire de A *et* B *?*

[**1.**] Raisonnons par l'absurde.
Si $C \neq 0_n$, alors il existe un entier $1 \leqslant r \leqslant n$ tel que C soit équivalente à J_r : il existe deux matrices P, Q inversibles telles que

$$Q^{-1}CP = J_r.$$

Dans ces conditions, la matrice M définie par

$$M = Q(I_n - J_r)P^{-1}$$

n'est pas inversible et $\det(M) = 0$.

✍ *La matrice* $(I_n - J_r)$ *est diagonale et l'un de ses coefficients diagonaux (au moins) est nul.*

Mais la somme $C + M = QI_nP = QP$ est inversible (produit de matrices inversibles), donc $\det(C+M) \neq 0$: c'est impossible.
Par conséquent, la matrice C est nécessairement la matrice nulle.

✍ *La propriété étudiée est évidente pour la matrice nulle, faut-il le dire ?*

[**2.**] L'application $M \mapsto B + M$ réalise une bijection de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sur lui-même. On suppose donc ici que

$$\forall\, M' \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(C+M') = \det(M') \qquad \text{avec} \qquad C = A - B.$$

On déduit de la question précédente que $C = 0_n$ et donc que $A = B$.
[**3.**] Une matrice et sa transposée ont même déterminant. Par conséquent, on suppose ici que

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \qquad \det(A+M) = \det(B^\top + M)$$

et on déduit de la question précédente que $A = B^\top$.

rms132-1166

> *Démontrer l'existence de l'intégrale*
> $$\int_0^{+\infty} 1 - t \operatorname{Arctan} \frac{1}{t} \, dt$$
> *puis calculer sa valeur.*

Il est clair que la fonction $f = [t \mapsto 1 - t \operatorname{Arctan} {}^1\!/_t]$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Comme la fonction Arctan tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$, la fonction f tend vers 1 au voisinage de $t = 0$. Admettant une limite finie au voisinage de 0, elle est donc intégrable au voisinage de 0.

D'autre part, d'après le développement limité à l'ordre trois au voisinage de 0 de la fonction Arctan,

$$\operatorname{Arctan} \frac{1}{t} \underset{t \to +\infty}{=} \frac{1}{t} - \frac{1}{3t^3} + o\Big(\frac{1}{t^3}\Big)$$

donc

$$f(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{3t^2},$$

ce qui prouve que f est intégrable au voisinage de $+\infty$.

La fonction f est donc intégrable sur $]0, +\infty[$, ce qui prouve que l'intégrale généralisée est bien définie ("convergente", comme on dit).

❧ On connaît l'identité classique :

$$\forall\, t > 0, \quad \operatorname{Arctan} \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} t. \tag{$\star$}$$

On en déduit que

$$\forall\, t > 0, \quad f(t) = 1 - \frac{\pi}{2} t + t \operatorname{Arctan} t.$$

En intégrant par parties,

$$\int t \operatorname{Arctan} t \, dt = \frac{t^2}{2} \operatorname{Arctan} t - \int \frac{t^2}{2} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \frac{t^2}{2} \operatorname{Arctan} t - \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{1+t^2} \, dt = \frac{t^2}{2} \operatorname{Arctan} t - \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} t$$

donc une primitive de f est

$$F(t) = \frac{t}{2} - \frac{\pi t^2}{4} + \frac{t^2}{2} \operatorname{Arctan} t + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} t.$$

Par définition,

$$\int_0^{+\infty} f(t) \, dt = \lim_{t \to +\infty} F(t) - F(0) = \lim_{t \to +\infty} F(t).$$

Avec l'identité $(\star)$ rappelée plus haut,

$$\frac{t}{2} - \frac{\pi t^2}{4} + \frac{t^2}{2} \operatorname{Arctan} t = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2} \operatorname{Arctan} \frac{1}{t} = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2} \Big[\frac{1}{t} + o\Big(\frac{1}{t^2}\Big)\Big] = o(1)$$

donc

$$\int_0^{+\infty} f(t) \, dt = \frac{\pi}{4}.$$

rms132-1173

[**1.**] *Démontrer que l'intégrale généralisée*

$$\int_0^1 \frac{\ell n(t^2)\,\ell n(1-t^2)}{t^2}\,dt$$

est convergente.

[**2.**] *Calculer l'intégrale*

$$u_n = \int_0^1 t^{2n-2}\,\ell n(t^2)\,dt$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

[**3.**] *Au moyen d'un développement en série entière, en déduire que*

$$\int_0^1 \frac{\ell n(t^2)\,\ell n(1-t^2)}{t^2}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(2n-1)^2}.$$

[**1.**] Il est clair que la fonction f définie par

$$\forall\, 0 < t < 1, \qquad f(t) = \frac{\ell n(t^2)\,\ell n(1-t^2)}{t^2}$$

est continue sur l'intervalle ouvert $]0,1[$.

✍ *On sait que ℓn est intégrable au voisinage (droit !) de 0. On sait aussi que $\ell n(a-u)$ est intégrable au voisinage (gauche !) de a pour tout $a \in \mathbb{R}$ (changement de variable affine).*

- Lorsque t tend vers 0, on a $f(t) \sim -2\,\ell n\, t$, donc f est intégrable au voisinage de 0.
- Lorsque t tend vers 1,

$$f(t) = \frac{2\,\ell n(1+t)}{t^2} \cdot \ell n\, t \cdot \ell n(1-t) = o\big(\ell n(1-t)\big),$$

donc f est intégrable au voisinage de 1.

Ainsi, la fonction f est intégrable sur l'intervalle $]0,1[$ et l'intégrale généralisée est (absolument) convergente.

[**2.**] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\varphi_n = \big[t \mapsto t^{2n-2}\,\ell n(t^2)\big]$ est continue sur l'intervalle $]0,1]$ et dominée par $\ell n\, t$ au voisinage de $t = 0$.

✍ *On a en fait $\varphi_1(t) = 2\,\ell n\, t$ et $\varphi_n(t) = o(\ell n\, t)$ pour $n \geqslant 2$.*

Par conséquent, l'intégrale généralisée u_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour tout $0 < \varepsilon < 1$, en intégrant par parties,

$$\int_\varepsilon^1 t^{2n-2}\,\ell n(t^2)\,dt = \left[\ell n(t^2)\frac{t^{2n-1}}{2n-1}\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{2}{t}\cdot\frac{t^{2n-1}}{2n-1}\,dt \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0 - \frac{2}{2n-1}\int_0^1 t^{2n-2}\,dt.$$

Par définition des intégrales généralisées convergentes, on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 t^{2n-2}\,\ell n(t^2)\,dt = \frac{-2}{(2n-1)^2}.$$

[**3.**] D'après le développement en série entière de $\ell n(1-u)$ au voisinage de 0,

$$\forall\, t \in]0,1[, \quad f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(t) \quad \text{où} \quad \psi_n(t) = \frac{-t^{2n-2}\,\ell n(t^2)}{n} = \frac{-1}{n}\cdot\varphi_n(t).$$

D'après la question précédente, la série $\sum \psi_n$ est une série de fonctions intégrables sur $]0,1[$; cette série converge simplement sur $]0,1[$ et sa somme, la fonction f, est continue sur cet intervalle.

De plus,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 |\psi_n(t)|\,dt = \frac{-1}{n}\int_0^1 \varphi_n(t)\,dt = \frac{2}{2(2n-1)^2},$$

donc la série $\sum \int_0^1 |\psi_n(t)| \, dt$ est convergente.

On déduit alors du Théorème d'intégration terme à terme que la fonction f est intégrable sur $]0,1[$ (ce qu'on avait déjà prouvé) et que

$$\int_0^1 f(t) \, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \psi_n(t) \, dt = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)^2}.$$

rms132-1175

On considère l'équation différentielle

$$(x^2-1)y''(x)-(x+1)y'(x)+y(x)=0. \tag{E}$$

[**1.**] *Déterminer les solutions polynomiales de* (E).
[**2.**] *Déterminer une équation différentielle* (E') *vérifiée par* $z(x)={}^{y(x)}/_{x}$.
[**3.**] *Calculer les réels* a, b *et* c *tels que*

$$\frac{2-4X^2}{X(X^2-1)}=\frac{a}{X}+\frac{b}{X-1}+\frac{c}{X+1}.$$

[**4.**] *En déduire les solutions de* (E')*, puis les solutions de* (E).

[**1.**] L'équation étant linéaire et homogène, on peut supposer que la solution y est une fonction polynomiale unitaire de degré d :

$$y(x)=x^d+\cdots$$

où les termes absents constituent une fonction polynomiale de degré strictement inférieur à d.

On en déduit que

$$xy'(x)=dx^d+\cdots \quad \text{et} \quad (x^2-1)y''(x)=d(d-1)x^d+\cdots.$$

Par conséquent,

$$(x^2-1)y''(x)-(x+1)y'(x)+y(x)=(d^2+d-2)x^d+\cdots$$

et comme le second membre est identiquement nul, il faut que

$$0=d^2+d-2=(d-1)(d+2)$$

et donc que $d=1$.

En substituant $y(x)=x+a$ dans l'équation, on trouve $a=0$.

Par conséquent, y est une solution polynomiale de l'équation (E) si, et seulement si, il existe une constante réelle K telle que

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\qquad y(x)=K.x.$$

[**2.**]

✍ *L'énoncé suggère simplement d'achever la résolution de l'équation en appliquant la méthode de variation de la constante !*

On cherche une solution y de la forme $y(x)=xz(x)$. En supposant que z soit de classe $\mathscr{C}^2$, on en déduit que

$$\begin{aligned} y(x)&=xz(x)\\ y'(x)&=xz'(x)+z(x)\\ y''(x)&=xz''(x)+2z'(x) \end{aligned}$$

et donc que

$$(x^2-1)y''(x)+2xy'(x)-2y(x)=(x^2-1)xz''(x)+(4x^2-2)z'(x).$$

La fonction z est donc une solution de l'équation

$$(x^2-1)xz''(x)+(4x^2-2)z'(x)=0. \tag{E'}$$

On remarquera que cette équation est en fait une équation du *premier ordre* en l'inconnue $z'(x)$.

[**3.**] Avec les méthodes usuelles, on trouve rapidement

$$\frac{2-4X^2}{X(X^2-1)}=\frac{-2}{X}-\frac{1}{X-1}-\frac{1}{X+1}.$$

[**4.**] En considérant (E') comme une équation d'inconnue $z'(x)$, on déduit de la décomposition en éléments simples précédentes que z est solution de (E') si, et seulement si, il existe une constante réelle K_1 telle que

$$z'(x)=\frac{K_1}{x^2(x+1)(x-1)}.$$

Nouvelle décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{X^2(X+1)(X-1)} = \frac{-1}{X^2} - \frac{1/2}{X+1} + \frac{1/2}{X-1}$$

et on en déduit que z est solution de (E') si, et seulement si, il existe deux constantes réelles K_1 et K_2 telles que

$$z(x) = K_2 + K_1\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\Big|\frac{1-x}{1+x}\Big|\Big).$$

❧ Par conséquent, y est solution de (E) si, et seulement si, il existe deux constantes réelles K_1 et K_2 telles que

$$y(x) = K_1\Big(1 + \frac{x}{2}\ln\Big|\frac{1-x}{1+x}\Big|\Big) + K_2 x.$$

✍ *On a passé sous silence la question des intervalles de définition. Il y a ici trois singularités :* $x = \pm 1$ *(qui se voient sur l'équation différentielle elle-même) et* $x = 0$ *(qui apparaît lors de la mise en œuvre de la méthode de variation de la constante). Par conséquent, il y a quatre intervalles de résolution :*

$$I_1 =]-\infty, -1[, \quad I_2 =]-1, 0[, \quad I_3 =]0, 1[, \quad I_4 =]1, +\infty[$$

et, pour chacun de ces intervalles, il y a deux constantes d'intégration — soit en tout huit *constantes d'intégration !*

Plus précisément, pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4\}$*, il existe deux constantes réelles* A_k *et* B_k *telles que*

$$\forall\, x \in I_k, \quad y(x) = A_k\Big(1 + \frac{x}{2}\ln\Big|\frac{1-x}{1+x}\Big|\Big) + B_k x.$$

❧ *Je rappelle que* $\ln|u(x)|$ *est une primitive de* $\frac{u'(x)}{u(x)}$ *sur tout intervalle sur lequel la fonction* u *ne s'annule pas.*

Il est donc inutile de discuter sur l'intervalle pour calculer les primitives, c'est seulement pour simplifier l'expression des primitives (= éliminer la valeur absolue) que la discussion est nécessaire.

✍ *On peut ensuite se pencher sur la question des raccordements en* $x = 0$ *et en* $x = \pm 1$*.*

❧ *Pour que les solutions sur* I_3 *et* I_4 *se raccordent par continuité en* $x = 1$*, il faut d'une part que* $A_3 = A_4 = 0$ *(pour qu'il y ait une limite finie) et d'autre part que* $B_3 = B_4$ *(pour que les limites à gauche et à droite coïncident).*

Il est clair que la fonction $[x \mapsto Bx]$ *est solution sur* $]0, +\infty[$*.*

❧ *Idem pour le raccordement autour de* $x = -1$*.*

❧ *Pour le raccordement en* $x = 0$*, il faut que* $A_2 = A_3$ *(égalité de la limite à gauche et de la limite à droite pour la continuité) et que* $B_2 = B_3$ *(égalité de la dérivée à gauche et de la dérivée à droite pour la dérivabilité).*

Réciproquement, quelles que soient les constantes A *et* B*, sur l'intervalle* $]-1, 1[$*, les solutions de la forme*

$$Ax + B\Big[1 + \frac{x}{2}\ln\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big)\Big],$$

sont clairement développables en série entières sur $]-1, 1[$ *: on aurait donc pu trouver ces solutions en cherchant les solutions développables en série entière (ce qui aurait masqué la singularité en* $x = 0$*).*

✍ *Avec*

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

on obtient la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{n-1}{n+1} \cdot a_n.$$

❧ *Pour les indices impairs, le coefficient* a_1 *peut être choisi arbitrairement et comme* $a_3 = 0 \times a_1$*, tous les autres termes d'indice impair sont nuls.*

❧ *Pour les indices pairs, on trouve*

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p} = \frac{-a_0}{2p-1}$$

donc

$$y(x) = a_1 x + a_0 \Big(1 - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{2p-1}\Big),$$

ce qui est conforme aux résultats trouvés plus haut.

✍ *Enfin, pour l'anecdote, les solutions sur* $\mathbb{R}$ *sont les fonctions* $[x \mapsto Ax]$ *(pour* $A \in \mathbb{R}$ *quelconque).*

rms132-1177

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = \phantom{-x+{}} y - z \\ y' = -x \phantom{{}-y} + z \\ z' = x - y \end{cases} \tag{S}$$

avec les conditions $x(0) = 1$ *et* $y(0) = z(0) = 0$.

[**1.**] *Discuter l'existence et l'unicité des solutions de* (S).

[**2.**] *On suppose que* (x, y, z) *est une solution de* (S). *Démontrer que les fonctions* $x + y + z$ *et* $x^2 + y^2 + z^2$ *sont constantes. Que peut-on en déduire pour la trajectoire ?*

[**3.**] *Résoudre le système* (S).

[**1.**] Le système (S) peut aussi s'écrire sous la forme d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants sous forme résoluble :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = A.X(t) \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $I = \mathbb{R}$ est un intervalle, la Théorie de Cauchy-Lipschitz nous assure que, pour la condition initiale particulière

$$\big(t = 0, X(0) = (1, 0, 0)\big),$$

le système (S) admet une, et une seule, solution.

[**2.**] En tant que fonctions polynomiales des fonctions x, y et z (qui sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I), les fonctions $f = x + y + z$ et $g = x^2 + y^2 + z^2$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ et, d'après (S),

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = x'(t) + y'(t) + z'(t) = 0$$
$$g'(t) = 2\big(x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + z(t)z'(t)\big) = 0$$

donc les fonctions f et g sont constantes sur l'intervalle I.

D'après la condition initiale, $f(0) = g(0) = 1$.

La trajectoire

$$\Gamma = \big\{\big(x(t), y(t), z(t)\big),\ t \in \mathbb{R}\big\}$$

est donc contenue dans l'intersection du plan affine d'équation $[x + y + z = 1]$ et de la sphère d'équation $[x^2 + y^2 + z^2 = 1]$: elle est donc contenue dans un cercle.

REMARQUE.— Il est trop tôt pour établir que l'inclusion réciproque est vraie.

✍ ***Variantes***

❧ *Si* $AX = \lambda X$, *alors* $A^n X = \lambda^n X$ *pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$ *et par conséquent,*

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{N} \frac{t^n A^n}{n!} \cdot X = \sum_{n=0}^{N} \frac{(t\lambda)^n}{n!} \cdot X.$$

Il est clair que le second membre tend vers $e^{\lambda t} \cdot X$. *Comme l'application*

$$[M \mapsto MX]$$

est continue (application linéaire définie sur un espace vectoriel de dimension finie), on déduit du théorème de composition des limites que

$$\lim_{N\to+\infty} (M_n.X) = \Big(\lim_{N\to+\infty} M_n\Big).X$$

et donc, par unicité de la limite, que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) \cdot X = e^{\lambda t} \cdot X.$$

Ce qui vaut pour les colonnes vaut aussi pour les lignes : comme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \exp(tA) \cdot X(0) = e^{0 \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X(0) = f(0) = 1.$$

❧ *On peut aussi remarquer que* $g(t) = X(t)^\top.X(t)$.

▶ *On en déduit que*

$$\begin{aligned}\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) &= \big[X'(t)\big]^\top.X(t) + X(t)^\top.X'(t)\\ &= \big[A.X(t)\big]^\top.X(t) + X(t)^\top.A.X(t)\\ &= X(t)^\top.(-A).X(t) + X(t)^\top.A.X(t)\\ &= 0\end{aligned}$$

puisque la matrice A *est anti-symétrique.*

▶ *Mais on peut procéder d'une autre manière ! Comme* $X(t) = \exp(tA).X(0)$, *alors*

$$\begin{aligned}\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X(t)^\top.X(t) &= X(0)^\top.[\exp(tA)]^\top.\exp(tA).X(0)\\ &= X(0)^\top.\exp(tA^\top).\exp(tA).X(0)\\ &= X(0)^\top.\exp(0_n).X(0)\\ &= X(0)^\top.X(0)\end{aligned}$$

ce qui prouve que l'expression $g(t) = X(t)^\top.X(t)$ *est bien indépendante de* t.

[**3.**] La matrice A étant anti-symétrique, elle n'est pas diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ mais elle l'est dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ (un peu de culture mathématique ne peut pas nuire).

Comme je n'ai pas envie de calculer dans $\mathbb{C}$, je vais calculer le polynôme minimal de A pour en déduire l'expression générale des puissances de A.

▶ On vérifie sans peine que

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad A^3 = -3A.$$

On en déduit (de proche en proche, par tâtonnements) que

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad A^{2p+1} = (-3)^p A \quad \text{et que} \quad \forall\, p \in \mathbb{N}^*, \quad A^{2p} = (-3)^{p-1}A^2.$$

✍ *Le polynôme* $X^3 + 3X = X(X^2+3)$ *est un polynôme annulateur de* A, *c'est même son polynôme minimal et son polynôme caractéristique — mais c'est inutile de le savoir, ça ne simplifierait pas nos calculs.*

On en déduit que

$$\begin{aligned}\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) &= I_3 + \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-3)^{p-1}t^{2p}}{(2p)!}\right)\cdot A^2 + \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-3)^p t^{2p+1}}{(2p+1)!}\right)\cdot A\\ &= I_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p(\sqrt{3}\,t)^{2p+1}}{(2p+1)!}\right)\cdot A - \frac{1}{3}\cdot\left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p(\sqrt{3}\,t)^{2p}}{(2p)!}\right)\cdot A^2\\ &= \left[I_3 - \frac{1}{3}A^2\right] + \frac{\sin\sqrt{3}\,t}{\sqrt{3}}\cdot A + \frac{\cos\sqrt{3}\,t}{3}\cdot A^2.\end{aligned}$$

En tenant compte de la condition initiale,

$$X(t) = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}5\\-1\\-1\end{pmatrix} + \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\left[\cos\sqrt{3}\,t\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} + \sin\sqrt{3}\,t\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right]$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Comme les deux vecteurs qui apparaissent dans le crochet sont unitaires et orthogonaux, on reconnaît bien le paramétrage d'un cercle de rayon $\sqrt{2/3}$ et de centre $\frac{1}{3}\cdot(5,-1,-1)$.

On vérifie sans peine que ce cercle est contenu dans le plan $[x+y+z=1]$.

rms132-1190

> *Soient X et Y, deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et de même loi. On suppose que X admet un moment d'ordre deux et que la variable aléatoire*
>
> $$Z = X + Y + 1$$
>
> *suit la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$.*
>
> [**1.**] *Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$ en fonction de p.*
>
> [**2. a.**] *Calculer la fonction génératrice de X.*
>
> [**2. b.**] *En déduire la loi de X.*

[**1.**] Comme Z suit la loi $\mathscr{G}(p)$, alors $\mathbf{E}(Z) = 1/p$ et $\mathbf{V}(Z) = q/p^2$.

❧ Comme X et Y ont même loi et par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y) + 1 = 1 + 2\,\mathbf{E}(X)$$

et donc

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1-p}{2p} = \frac{q}{2p}.$$

❧ Par ailleurs, comme X et Y sont indépendantes,

$$\mathbf{V}(Z) = \mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) = 2\,\mathbf{V}(X)$$

et donc $\mathbf{V}(X) = \frac{q}{2p^2}$.

[**2. a.**] Comme Z suit la loi $\mathscr{G}(p)$, alors

$$\forall\, t \in [0,1], \quad G_Z(t) = \frac{pt}{1-qt}.$$

Or $Z = X + Y + 1$ et comme X et Y sont indépendantes,

$$\forall\, t \in [0,1], \quad G_Z(t) = \mathbf{E}(t^Z) = \mathbf{E}(t^X.t^Y.t^1) = \mathbf{E}(t^X).\,\mathbf{E}(t^Y).t = t\big[G_X(t)\big]^2.$$

Or $G_X(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [0,1]$ (somme de termes positifs), donc

$$\forall\, t \in [0,1], \quad G_X(t) = \sqrt{\frac{p}{1-qt}}.$$

[**2. b.**] On sait que

$$\forall\, u \in\,]-1,1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1+u}} = (1+u)^{-1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1/2)(-3/2)\cdots[-(2k-1)/2]}{k!}\, u^k.$$

Par conséquent, avec $u = -qt$ (où $0 < q < 1$),

$$\forall\, t \in [0,1], \quad G_X(t) = \sqrt{p}\Bigg[\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k} \cdot \frac{q^k}{4^k} \cdot t^k\Bigg].$$

Comme le rayon de convergence d'une série génératrice est au moins égal à 1, on peut identifier les coefficients terme à terme. On en déduit que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{\sqrt{p}\, q^k}{4^k} \binom{2k}{k}.$$

rms132-1204

> *Soient u et v, deux endomorphismes de E, espace vectoriel complexe de dimension finie. Démontrer que toute valeur propre λ de $u \circ v$ est aussi une valeur propre de $v \circ u$.*
> Indication : *on distinguera les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$.*

❧ **Cas** $\lambda = 0$

Puisque E est un espace de dimension finie, le réel 0 est une valeur propre de $u \circ v$ si, et seulement si, $\det(u \circ v) = 0$. Or

$$\det(v \circ u) = \det v.\det u = \det(u \circ v) = 0$$

donc 0 est aussi une valeur propre de $v \circ u$.

✍ ***Variante*** *sans déterminant.*

Si 0 n'est pas une valeur propre de $v \circ u$, alors $v \circ u$ est injectif, donc u est injectif, donc (Théorème du rang, puisque u est un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie) u est inversible. De ce fait, l'endomorphisme

$$v = (v \circ u) \circ u^{-1}$$

est injectif comme composé d'endomorphismes injectifs et $u \circ v$ est alors injectif (pour la même raison).

❧ **Cas** $\lambda \neq 0$

Soit $x \in E$, un vecteur propre de $u \circ v$ associé à $\lambda \neq 0$:

$$u\big(v(x)\big) = \lambda \cdot x \neq 0_E$$

(puisque $\lambda \neq 0$ par hypothèse et $x \neq 0_E$ en tant que vecteur propre). Par conséquent, $v(x) \neq 0_E$ et en composant par v l'égalité précédente, on obtient

$$v\big[u\big(v(x)\big)\big] = v(\lambda \cdot x)$$

c'est-à-dire

$$(v \circ u)\big(v(x)\big) = \lambda \cdot v(x).$$

Comme $v(x) \neq 0_E$, on en déduit que $v(x)$ est un vecteur propre de $v \circ u$ associé à λ.

rms132-1220

Soit $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *Pour* $f \in E$, *on définit* $T(f)$ *en posant* $T(f)(0) = f(0)$ *et*

$$\forall x \neq 0, \quad T(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt.$$

[**1.**] *Démontrer que* $T(f)$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^*$ *et que*

$$\forall x > 0, \quad x\big[T(f)\big]'(x) + T(f)(x) = f(x).$$

[**2.**] *Démontrer que* $T(f)$ *est continue en* 0. *En déduire que* T *est bien un endomorphisme de* E.
[**3.**] *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$, *une valeur propre de* T.
[**3. a.**] *Démontrer que* $\lambda \neq 0$.
[**3. b.**] *Démontrer qu'un vecteur propre de* T *associé à une valeur propre* λ *est une solution de l'équation différentielle suivante.*

$$\forall x > 0, \quad y'(x) = \frac{1-\lambda}{\lambda x}\,y(x)$$

En déduire que le spectre de T *est contenu dans* $]0, 1]$.

[**1.**] Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on déduit du Théorème fondamental que $T(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et que

$$\forall x \neq 0, \quad [T(f)]'(x) = \frac{-1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt + \frac{1}{x}f(x) = \frac{-T(f)(x) + f(x)}{x}.$$

[**2.**] On recommence avec le Théorème fondamental !
En notant F, une primitive de f sur $\mathbb{R}$,

$$\forall x \neq 0, \qquad T(f)(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}.$$

Comme F est une primitive de f, on en déduit que

$$\lim_{x \to 0} T(f)(x) = F'(0) = f(0) = T(f)(0),$$

ce qui prouve que $T(f)$ est continue en 0.

❧ On a déjà démontré que $T(f)$ était continue sur $\mathbb{R}^*$, donc $T(f)$ est bien continue sur $\mathbb{R}$ et T est bien une application de E dans E.

❧ La linéarité de l'intégrale permet de vérifier facilement que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(\lambda f + g)(x) = \lambda T(f)(x) + T(g)(x)$$

quelles que soient les fonctions f et g dans E. Par conséquent, T est bien un endomorphisme de E.
[**3. a.**] Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, une valeur propre de T. Il existe donc une fonction $f \in E$ non identiquement nulle telle que $T(f) = \lambda f$. D'après la première question,

$$\forall x \neq 0, \quad \lambda x f'(x) + \lambda f(x) = f(x). \tag{$\star$}$$

Si $\lambda = 0$, alors f doit être identiquement nulle sur $\mathbb{R}^*$ et comme f est continue sur $\mathbb{R}$, il faudrait que f soit identiquement nulle sur $\mathbb{R}$: c'est impossible par définition des vecteurs propres.

Donc 0 n'est pas valeur propre de T et l'application linéaire T est injective.
[**3. b.**] On reprend les calculs précédents. Comme $\lambda \neq 0$, l'équation différentielle $(\star)$ donne :

$$\forall x > 0, \qquad f'(x) = \frac{1-\lambda}{\lambda x}\cdot f(x) = a \cdot \frac{f(x)}{x} \quad \text{avec} \quad a = \frac{1-\lambda}{\lambda}.$$

Une fonction f est solution de l'équation différentielle $y'(x) = \frac{a}{x}y(x)$ sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) = Kx^a$ pour tout $x > 0$. On impose ici $f \in E$, donc il faut que f ait une limite finie au voisinage de 0 et donc que $a \in \mathbb{R}_+$.

L'étude du signe de $a = \frac{1-\lambda}{\lambda}$ montre que : si λ est une valeur propre de T, alors $0 < \lambda \leqslant 1$.

✍ *Il est facile de vérifier la réciproque : pour tout réel* $0 < \lambda \leqslant 1$, *le paramètre* $a = \frac{1-\lambda}{\lambda}$ *est positif et on déduit de l'équation différentielle* $(\star)$ *que* f *est un vecteur propre de* T *associé à la valeur propre* λ *si, et seulement si, il existe deux constantes* K_+ *et* K_- *telles que*

$$\forall x \leqslant 0, \quad f(x) = K_-|x|^a \quad \textit{et} \quad \forall x \geqslant 0, \quad f(x) = K_+x^a.$$

La continuité de f *n'impose aucune contrainte sur les constantes* K_- *et* K_+, *donc le sous-espace propre de* T *associé à* λ *est un plan.*

rms132-1231

Soit $\varphi \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *Pour* $(x, y) \in U = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, *on pose*

$$f(x, y) = \varphi(y/x).$$

[**1.**] *Démontrer que* U *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$.
[**2.**] *Démontrer que* f *est de classe* $\mathscr{C}^2$ *sur* U.
[**3.**] *Calculer le laplacien de* f.
[**4.**] *On suppose que* f *est harmonique sur* U *(soit* $\Delta f(M) = 0$ *pour tout* $M \in U$*). Que dire de* φ *?*

[**1.**] L'ensemble U est le complémentaire de la droite vectorielle $[x = 0]$. Un sous-espace de dimension finie est toujours fermé, donc U est ouvert (en tant que complémentaire d'une partie fermée).

✍ ***Variantes***
❧ *Si une suite* $u_n = (x_n, y_n)$ *de points dans* U^c *converge vers un point* $\ell = (\ell_x, \ell_y)$*, alors en particulier* y_n *converge vers* ℓ_y*. Or* $y_n = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *(par définition de* U^c*), donc* $\ell_y = 0$ *et par conséquent* $\ell \in U^c$*. Ainsi, la partie* U^c *est fermée (car stable par passage à la limite) et son complémentaire* U *est donc ouvert.*
❧ *On peut aussi interpréter* U *comme l'image réciproque de* $\mathbb{R}^*$ *par l'application*

$$\pi = [(x, y) \mapsto x] \;:\; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

L'ensemble $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ *est ouvert (en tant qu'union de deux ouverts de* $\mathbb{R}$*) et l'application* π *est continue (application linéaire définie sur un espace de dimension finie), donc* U *est ouvert (image réciproque d'un ouvert par une application continue).*
Autre variante
On peut aussi représenter graphiquement U *(c'est le complémentaire de l'axe des ordonnées) et constater l'évidence :* on voit bien *que* U *est un voisinage de chacun de ses points (à montrer sur la figure !).*

[**2.**] Analysons la définition de f :

$$\begin{array}{ccccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & y/x & \longmapsto & f(x, y) \end{array}$$

la fonction f est la composée d'une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur l'ouvert U par la fonction φ : c'est donc la composée d'une application de classe $\mathscr{C}^\infty$ par une application de classe $\mathscr{C}^2$, donc f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.
[**3.**] On applique la formule de dérivation des fonctions composées.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2} \cdot \varphi'\Big(\frac{y}{x}\Big) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x} \cdot \varphi'\Big(\frac{y}{x}\Big)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3} \cdot \varphi'\Big(\frac{y}{x}\Big) + \frac{y^2}{x^4} \cdot \varphi''\Big(\frac{y}{x}\Big) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2} \cdot \varphi''\Big(\frac{y}{x}\Big)$$

et par conséquent

$$\Delta f(x, y) \overset{\text{déf.}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M) = \frac{2y}{x^3} \cdot \varphi'\Big(\frac{y}{x}\Big) + \frac{x^2 + y^2}{x^4} \cdot \varphi''\Big(\frac{y}{x}\Big)$$

pour tout $M = (x, y) \in U$.

✍ *La règle de la chaîne est inutile ici, car la fonction* φ *est une fonction d'une seule variable réelle.*

[**4.**] Sur U, on a toujours $x \neq 0$, donc f est harmonique si, et seulement si,

$$\forall\,(x, y) \in U, \quad x^2 \Delta f(x, y) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall\,(x, y) \in U, \quad \Big[1 + \Big(\frac{y}{x}\Big)^2\Big] \cdot f''\Big(\frac{y}{x}\Big) + 2 \cdot \Big(\frac{y}{x}\Big) \cdot f'\Big(\frac{y}{x}\Big) = 0.$$

Comme l'application $(x, y) \mapsto y/x$ est surjective de U dans $\mathbb{R}$, on en déduit que f est harmonique sur U si, et seulement si,

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad (1 + t^2)\varphi''(t) + 2t\varphi'(t) = 0. \tag{E}$$

Il s'agit en fait d'une équation du premier ordre en φ', donc sa résolution se fait en deux étapes.

L'application φ est solution de l'équation (E) si, et seulement si, il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = K_1 + K_2 \operatorname{Arctan} t.$$

Par conséquent, la fonction $f(x, y) = \varphi(y/x)$ est harmonique sur U si, et seulement si, il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que

$$\forall\, (x, y) \in U, \quad f(x, y) = K_1 + K_2 \operatorname{Arctan} \frac{y}{x}.$$

rms132-1235

Soit X, une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.
[**1.**] *Calculer la probabilité pour que X soit paire et la probabilité pour que X soit un multiple de 3.*
[**2.**] *Ces événements sont-ils indépendants ?*

[**1.**] Comme X est, par hypothèse, une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad [X = n] \in \mathcal{A}.$$

Par conséquent,

$$A = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} [X = 2k] \quad \text{et} \quad B = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} [X = 3k]$$

sont deux événements (= des éléments de la tribu $\mathcal{A}$).

Par σ-additivité de $\mathbf{P}$, on en déduit que

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = 2k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{2k-1} = p(1-p) \cdot \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p},$$
$$\mathbf{P}(B) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = 3k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{3k-1} = p(1-p)^2 \cdot \frac{1}{1-(1-p)^3} = \frac{(1-p)^2}{3-3p+p^2}.$$

[**2.**] Comme 2 et 3 sont premiers entre eux, X est simultanément multiple de 2 et multiple de 3 si, et seulement si, X est multiple de 6 :

$$A \cap B = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} [X = 6k]$$

et, comme précédemment,

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = 6k) = p(1-p)^5 \cdot \frac{1}{1-(1-p)^6}.$$

Or

$$1 - q^6 = (1-q^3)(1+q^3) = (1-q^3)(1+q)(1-q+q^2).$$

✍ *C'est toujours utile de bien connaître les racines sixièmes de l'unité...*

Donc

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{(1-p)^5}{(3-3p+p^2)(2-p)(1-p+p^2)} = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B) \cdot \frac{(1-p)^2}{1-p+p^2}.$$

Comme $(1-p)^2 = 1-2p+p^2 \neq 1-p+p^2$ pour tout $p \in]0,1[$, on en déduit que $\mathbf{P}(A \cap B) \neq \mathbf{P}(A).\mathbf{P}(B)$ et donc que ces deux événements ne sont pas indépendants.

rms136-1398

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $0 < u_0 < \pi/2$ et par la relation de récurrence suivante.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \sin u_n.$$

[**1.**] *Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Préciser sa limite.*
[**2.**] *Étudier la nature de la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$. En déduire la nature de la série $\sum u_n^3$.*
[**3.**] *Étudier la nature de la série*

$$\sum \ell n \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

En déduire la nature de la série $\sum u_n^2$.

[**1.**] Par hypothèse, $0 < u_0 < \pi/2$ et on sait que

$$\forall\, x \in [0, \pi 2], \qquad 0 \leqslant \sin x \leqslant \min\{x, 1\}.$$

Par conséquent, $u_n \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad 0 \leqslant u_{n+1} = \sin u_n \leqslant u_n.$$

En tant que suite décroissante et positive, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

La suite extraite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge elle aussi, vers la même limite. Or $u_{n+1} = \sin u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et sin est continue sur $\mathbb{R}$, donc la limite ℓ vérifie $\sin \ell = \ell$, c'est-à-dire $\ell = 0$.

✍ *On doit connaître quelques propriétés de* sin.

[**2.**] La série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est une série télescopique. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est convergente.

Le terme général de cette série est négatif (puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante), donc cette série est en fait *absolument* convergente.

❧ Comme u_n tend vers 0, on déduit du développement limité de sin au voisinage de 0 que

$$u_{n+1} = \sin u_n \underset{n\to+\infty}{=} u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$$

et donc

$$u_n^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} -6(u_{n+1} - u_n).$$

Comme la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est <u>absolument</u> convergente, on en déduit que la série $\sum u_n^3$ est absolument convergente.

✍ *On ne peut appliquer* AUCUN *théorème de comparaison à une série semi-convergente.*

[**3.**] Comme u_n tend vers 0 par valeurs strictement supérieures, la *suite* de terme général $\ell n\, u_n$ tend vers $-\infty$. Or

$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad \ell n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell n\, u_{n+1} - \ell n\, u_n.$$

Il s'agit à nouveau d'une série télescopique, mais elle est divergente.

❧ On sait que

$$\frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

et donc que

$$\ell n \frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

Par conséquent, comme u_n tend vers 0,

$$\ell n \frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-u_n^2}{6}$$

c'est-à-dire

$$u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} -6\,\ell n \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Le second membre est le terme général *positif* d'une série *divergente*, donc la série $\sum u_n^2$ est divergente.

✍ *On peut démontrer à l'aide du Théorème de Cesaro que $u_n \sim \sqrt{3/n}$. Cet équivalent explique les résultats précédents.*